文章编号:1001-1595(2008)04-0526-05　　中图分类号:P217　　文献标识码:A

抗差趋势面与正交多面函数结合拟合 DEM 数据

张菊清[1], 刘平芝[2]

1. 长安大学 地质工程与测绘学院,陕西 西安 710054; 2. 西安测绘研究所,陕西 西安 710054

Combining Fitting Based on Robust Trend Surface and Orthogonal Multiquadrics with Application in DEM Fitting

ZHANG Ju-qing[1], LIU Ping-zhi[2]

1. *School of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an* 710054, *China*; 2. *Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an*, 710054, *China*

Abstract: Spatial data interpolation is an indispensable process in DEM. A combining fitting with trend surface fitting and multidimensional curve fitting is proposed. In order to control the influence of some outstanding points to surface fitting, a robust fitting of the trend surface by using an equivalent weight is adopted. An adaptive node choosing method is proposed based on the effect of every node to the curve fitting calculated by using the orthogonal least squares. Last, a practical example of terrain fitting shows that the proposed combined method is effective in improving the quality of DEM fitting.

Key words: trend surface fitting; basic curve; node; fitting

摘　要:空间数据内插是 DEM 建模中不可缺少的环节。本文提出将趋势面与多面函数结合拟合 DEM 数据。在趋势面拟合过程中,提出将局部有显著起伏的采样点视为异常观测值,采用抗差估计法,控制显著异常点对曲面拟合的不利影响;针对多面函数拟合中,难以合理地选择节点这一问题,提出基于正交最小二乘法的基本思想,计算各节点核函数对曲面拟合贡献的大小,并依此为依据自适应地选择节点。最后利用新提出的方法,对野外实测的地形数据进行拟合,结果表明进行趋势面拟合后,再进行多面函数拟合,整体上优于直接利用多面函数拟合,而基于正交最小二乘法的多面函数拟合法的精度明显优于常规的多面函数拟合法。

关键词:趋势面拟合;核函数;节点;拟合

1　引　言

自 Hardy 1977 年提出多面函数拟合法以来,该法已在测量界尤其在地壳形变分析和 GPS 水准拟合方面得到了广泛应用[1~4]。其基本思想是,任何一个不规则的复杂曲面均可由一系列规则的数学表面总和以任意精度逼近[5,6]。应用多面函数拟合,首先要解决 4 个问题,即规则的数学表面——核函数的选择,节点与平滑因子的确定,拟合方法的选择以及异常影响的控制。

对于核函数,有不少的学者作了相应的研究,提出可选用同一类型的简单函数,如圆锥面、双曲面、三次曲面、旋转面等加以表示[6~9]。

对于节点的选择,通常直接取采样点或采样点的某些统计值,具体的选择可通过试验并结合经验确定,显然不同的节点会具有不同的拟合结果,带有一定的随意性。由于每个节点对曲面拟合的贡献不同,文献[2]采用 t 检验或逐步回归的方法来选择节点,取得了较好的效果。本文结合 Chen 等人提出的正交最小二乘基本思想(OLS)[10],即将误差方程系数正交化,计算观测向量与每个正交化向量之间的夹角,根据夹角大小来判断节点对曲面拟合的贡献大小[11],并依此为依据选择合适的多面函数节点,从而达到自主选择节点的目的。如此,既提高了曲面拟合的精度,同时又保证了函数拟合的稳定性。

平滑因子能够改变核函数的形状,不同的平滑因子也会影响拟合结果。对于平滑因子 δ^2,文献

收稿日期:2008-01-08; **修回日期**:2008-03-28
基金项目:国家自然科学基金(40672173,40774001);地球空间与大地测量教育部重点实验室开放基金(1469990324233-04-11)
作者简介:张菊清(1968-),女,浙江台州人,博士生,副教授,主要从事测量数据处理和地理信息系统的教学与研究工作。
E-mail: zhangjq@chd.edu.cn

[5]提出取采样点平均间距平方的 0.665 倍,而文献[2]通过大量的试验认为 δ^2 应取采样点平均间距的 10 至 100 倍之间,实际计算中常以对核函数的影响不敏感为原则,一般通过反复试验加以确定。

在拟合方法应用方面,尽管理论上认为任意不规则的曲面均可由一系列简单的规则曲面叠合以任意精度逼近,但这意味着需要有足够多的规则曲面,实际上很难满足。考虑到任何区域的地形总可以分成趋势性成分和随机性局部变化两部分[8],因此为了突出地反映地形的起伏,在进行多面函数拟合之前,一般先进行趋势面分析,再对剩余部分进行曲面拟合。如此,可灵活地对局部地形起伏进行拟合与分析。

由于趋势面分析方法是将短尺度的、局部的变化看作随机的和非结构的噪声,因此当局部地形起伏比较明显时,应用常规的最小二乘法难以抵制局部异常地形的影响,从而可能会导致拟合的趋势面存在系统偏差,影响后续的曲面拟合。抗差估计可通过调整采样点数据的权的大小来达到减小或剔除异常值对内插成果影响的目的[12,13],已得到了广泛的应用。因此在趋势面拟合时,可将局部较明显的变化视为异常观测,采用抗差趋势面分析的方法更合理地揭示地形的整体趋势。本文讨论基于抗差趋势面分析与自适应多面函数相结合的 DEM 空间数据拟合方法。

2　抗差趋势面拟合

趋势面是一个光滑的数学曲面,它反映的是空间物体在空间区域上变化的主体特征,常用多项式函数来实现,即

$$\hat{z} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} \hat{a}_{ij} x^i y^j \tag{1}$$

式中,$\hat{a}_{ij}(i=0,\cdots,m,j=0,\cdots,m)$为待求的多项式系数,$(x,y)$表示点的平面坐标,$\hat{z}$为相应的高程值。假定有 n 个观测点,应用最小二乘准则即可解得多项式系数$\hat{a}_{ij}$。一般情况下,对于简单的地形,可选用低次多项式描述,但对于比较复杂的地形,需采用高次多项式。然而高次多项式容易导致解不稳定,即参考点微小的变化都有可能引起内插值有剧烈的变化。因此为了既能够灵敏地反映地形的整体趋势,同时又避免震荡现象,需对趋势面的拟合程度进行 F 检验,即[14]

$$F=\frac{U/t}{Q/(n-t-1)} \tag{2}$$

其中,$U = \sum_{i=1}^{n}(\hat{z}_i - \bar{z})^2$ 为回归平方和,$Q = \sum_{i=1}^{n}(z_i - \hat{z}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$ 为残差平方和,t 为多项式项数(不包括常数项),n 为数据点个数。当 $F>F_\alpha$ 时,趋势面显著,否则不显著,需重新确定多项式次数进行求解。

由于趋势面分析方法是将短尺度的、局部的变化看作随机的和非结构的噪声,因此当局部地形起伏比较明显时,可将其局部的变化视作异常观测,并采用抗差估计原理控制局部异常起伏对整体趋势面拟合的影响。

设有误差方程

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{V}} = \underset{n\times m}{\boldsymbol{A}}\ \underset{m\times 1}{\hat{X}} - \underset{n\times 1}{\boldsymbol{l}} \tag{3}$$

其中,$\boldsymbol{V}$ 为观测值残差向量,$\boldsymbol{A}$ 为设计矩阵,$\boldsymbol{l}$ 为观测向量。根据抗差估计理论,可以构造如下极值条件[12,13]

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \rho(v_i) = \min \tag{4}$$

式中,ρ 为凸函数。对上式求极值,并利用等价权理论[12],可得

$$\hat{\boldsymbol{X}}^k = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}^k\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}^k\boldsymbol{l} \tag{5}$$

其中,$\bar{\boldsymbol{P}}^k$ 为观测等价权矩阵,其元素可采用 IGGI-II 函数[12]或其他的等价权函数,即

$$\bar{p}_i^k = \begin{cases} p_i & |\tilde{v}_i^k| \leqslant c_0 \\ p_i\ \dfrac{c_0}{|\tilde{v}_i^k|}\dfrac{(c_1-|\tilde{v}_i|)^2}{(c_1-c_0)^2} & c_0<|\tilde{v}_i^k|\leqslant c_1 \\ 0 & |\tilde{v}_i^k|>c_1 \end{cases} \tag{6}$$

式中,$c_0=1\sim1.5$, $c_1=3.0\sim8.0$,$\tilde{v}_i^k$ 为第 i 个采样点经 k 次迭代后的标准化残差,即 $\tilde{v}_i^k=v_i^k/\sigma_{v_i}$,其中 k 为迭代次数。

3　基于正交最小二乘法的多面函数拟合法

经过趋势面分析后,对剩下的残差再作局部拟合。根据多面函数原理,有[1,2,8,9]

$$z(x,y) = \sum_{k=1}^{s}\hat{\beta}_k g_k(x,y,x_{0k},y_{0k},\delta) \tag{7}$$

其中,$\beta_k(k=1,\cdots,p)$为待定系数,s 为节点的个数,(x_{0k},y_{0k})为节点,$g(x,y,x_{0k},y_{0k})$为核函数(或称基底函数),可取双曲函数,如式(8),也可以取其他函数,δ 为扩展常数。

$$g_k(x,y,x_{0k},y_{0k},\delta)=\sqrt{(x-x_{0k})^2+(y-y_{0k})^2+\delta^2} \tag{8}$$

由于核函数一般取曲面函数,因此若事先未进行趋势面拟合,可在式(7)的基础上增加一常数项系数,起到剔除常量(平均高程)的作用,从而保证以较少的核函数达到较高的精度,于是式(7)改写为

$$z=\sum_{k=1}^{s}\hat{\beta}_k\sqrt{(x-x_{0k})^2+(y-y_{0k})^2+\delta^2}+\hat{\beta}_0 \tag{9}$$

其中,$\hat{\beta}_0$ 是待解的常系数。

显然上式的求解,节点的选择是关键,一般直接取均匀分布在研究区域内的观测点。如果选择所有的采样点作为节点,即 $n=s$,此时会出现过分拟合现象,即内部符合精度很高,但无法保证推估或内插精度,尤其当采样点数据受异常误差污染时,内插精度会更低。另外若采用模型(9),方程会出现亚定,即方程个数(n)小于未知参数个数($n+1$),从而无法求解,因此一般选择的节点个数小于采样点个数。

这里假定已采用趋势面拟合法去除了趋势性影响,再假设先选择所有的采样点为节点,此时构建的误差方程系数阵为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1\quad \boldsymbol{a}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}_n)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \tag{10}$$

其中,

$$\boldsymbol{a}_i=(\boldsymbol{a}_{1i}\quad \boldsymbol{a}_{2i}\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}_{ni})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} g_{1i}(x_1,y_1,x_{0i},y_{0i},\delta)\\ g_{2i}(x_2,y_2,x_{0i},y_{0i},\delta)\\ \vdots\\ g_{ni}(x_n,y_n,x_{0i},y_{0i},\delta)\end{bmatrix}\quad (i=1,\cdots,n) \tag{11}$$

显然在求解多面函数系数 $\boldsymbol{\beta}$ 时,每一列向量 $\boldsymbol{a}_j$ 的贡献是不同的,这意味着每一节点对函数拟合的影响是不同的,因此可以根据各节点贡献的大小来选择核函数的节点。

将式(7)表示成向量形式,则有

$$\boldsymbol{Z}=\sum_{k=1}^{n}\hat{\beta}_k\boldsymbol{a}_k \tag{12}$$

式中,$\boldsymbol{Z}$ 为由观测点高程值组成的向量,元素为 z_i。若向量 $\boldsymbol{a}_k$ 之间相互正交,则左乘 $\hat{\beta}_k\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}$ 后,有

$$\hat{\beta}_k\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}=\hat{\beta}_k(\hat{\beta}_1\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1+\cdots+\hat{\beta}_k\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_k+\cdots+\hat{\beta}_n\boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}})=\hat{\beta}_k^2\,\|\boldsymbol{a}_k\|^2 \tag{13}$$

两边求和,于是

$$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}=\sum_{k=1}^{n}\hat{\beta}_k^2\,\|\boldsymbol{a}_k\|^2 \tag{14}$$

即

$$1=\frac{\sum_{k=1}^{n}\hat{\beta}_k^2\,\|\boldsymbol{a}_k\|^2}{\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}} \tag{15}$$

故选择 $r(r\leqslant n)$ 个基矢量时的能量总贡献为

$$f=\frac{\sum_{k=1}^{r}\hat{\beta}_k^2\,\|\boldsymbol{a}_k\|^2}{\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}} \tag{16}$$

显然,$0\leqslant f\leqslant 1$。r 越大,f 就越大,表明由多面函数拟合的曲面与采样点的逼近程度就越高;尤其当 $r=n$ 时,$f=1$,此时拟合的多面函数通过所有的采样点,拟合误差为零,就采样点来讲,逼近精度最高,但此时由于没有多余观测数,可靠性很差,难以保证推估的精度,为此应根据每个基矢量的贡献大小来选择若干个节点[11],既使 f 足够大,即具有较高的拟合度,又能有足够的多余观测,保证推估的可靠性。

顾及 $\boldsymbol{a}_k$ 的正交性,由式(11),式(12)有

$$\hat{\beta}_k=\frac{\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_k}=\frac{\boldsymbol{a}_k^{T}\boldsymbol{Z}}{\|\boldsymbol{a}\|_k}\quad (k=1,\cdots,r) \tag{17}$$

显然,$\hat{\beta}_k$ 越大,也即向量 $\boldsymbol{a}^k$ 与观测向量 $\boldsymbol{Z}$ 之间的夹角 α_j[11]

$$\alpha_j=\frac{\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j^1}{\|\boldsymbol{Z}\|\ \|\boldsymbol{a}_j^1\|} \tag{18}$$

越大,表明与 $\boldsymbol{a}_k$ 相对应的节点对多面函数拟合的贡献越明显。

由于系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,各向量之间并不正交,因此在计算过程中应对 $\boldsymbol{A}$ 进行 Gram-Schmidt 正交化,使向量 $\boldsymbol{a}_i$ 之间两两正交,逐次找出与观测向量 $\boldsymbol{Z}$ 之间具有最大夹角的向量 $\boldsymbol{a}^k$,选择与之对应的点(x_k,y_k)为多面函数的节点,直至满足精度要求。具体计算步骤为:

1. 将所有的采样点视为节点,按式(10),式(11)计算系数矩阵 $\boldsymbol{A}$,得 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量分别为 $\boldsymbol{a}_1^1,\boldsymbol{a}_2^1,\cdots,\boldsymbol{a}_n^1$;

2. 计算 $\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{a}_j^1$ 之间的夹角,若

$$\alpha_k=\max(\alpha_j)(j=1,\cdots,n) \tag{19}$$

则表明 $\boldsymbol{a}_k^1$ 对 $\boldsymbol{Z}$ 的贡献最大,于是可将与 $\boldsymbol{a}_k^1$ 相对应的坐标(x_k,y_k)选为节点,$\boldsymbol{a}_k^1$ 构成1维欧式空间 E_1。

3. 按下式解算系数 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} \tag{20}$$

式中,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_k^1)$,计算残差 $\boldsymbol{V}$,视其是否满足所设定的精度要求,若满足精度要求,终止计算;否则对

剩余的 $n-1$ 个向量作 Gram-Schmidt 正交化，使之正交于 E_1，得到 $\boldsymbol{a}_1^2, \boldsymbol{a}_2^2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}^2$。

其中，

$$\boldsymbol{a}_j^2 = \boldsymbol{a}_j^1 - \frac{(\boldsymbol{a}_j^1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}_k^1)}{(\boldsymbol{a}_k^1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}_k^1)} a_j^1 \quad j=1,\cdots,n-1 \tag{21}$$

4. 找出与 $\boldsymbol{Z}$ 具有最大夹角的 $\boldsymbol{a}_j^2$，选择与之对应的点 (x_j, y_j) 为节点，于是构成 2 维欧式空间 $E_2 = \{\boldsymbol{a}_k^1, \boldsymbol{a}_j^2\}$。

5. 重复以上步骤，直至找到 p 个节点，并能保证满足精度要求为止。

值得说明的是，对系数矩阵进行正交化，仅是用于节点的选择，并不参与多面函数系数 β 的求解，因此不会影响最终的结果。

4 算 例

现分别对坡度<1%，1%<坡度<5%，坡度>5%的不同地形采集地形数据点，其中坡度<1%及坡度>5%采用的是野外实测数据点，而坡度在1%与5%之间的直接从等高线上进行采样，并取其中的部分点作为检核点，具体点数如表 1 所示。

表 1　不同地形条件下数据点的个数

Tab.1　The number of data corresponding to different terrain

	坡度<1%	1%<坡度<5%	坡度>5%
采样点个数	18	144	122
检核点个数	7	47	55

为了检验不同核函数的影响，分别采用了双曲(SQ)与高斯(GS)两种不同的核函数，其中双曲函数如式(9)所示，高斯函数的表达式如下

$$\hat{z}_j = \sum_{k=1}^{r} \hat{\beta}_k \exp^{-\frac{1}{\delta^2}[(x_j - x_{0k})^2 + (y_j - y_{0k})^2]} + \hat{\beta}_0$$

按以下几种方案进行拟合：

方案一，常规多面函数拟合(Normal Multi-Quadrics, NMQ)；

方案二，基于正交最小二乘的多面函数拟合(Multi-Quadrics Fitting Based on Orthogonal Least Squares, OLS)；

方案三，基于抗差趋势面与常规多面函数的组合拟合(Combined Fitting Based on Normal Multi-Quadrics and Robust Trend Surface Fitting, NMQ-RT)；

方案四，基于抗差趋势面与正交最小二乘多面函数的组合拟合(Combined Fitting Based on Robust Trend Surface and Orthogonal Least Squares, OLS-RT)；

值得说明的是，不同的扩展常数也会影响内插精度，由于受篇幅限制，本文主要讨论节点的选择问题，对于扩展常数，本文参考文献[2]，并通过多次试验比较，具体大小如表 2～表 4 所示。

在应用常规多面函数拟合时，选择均匀分布在区域范围内的部分采样点作为节点。趋势面拟合中的等价权函数采用式(6)表示的 IGGIII 函数，其中 $c_0 = 1.3$，$c_1 = 8$。

表 2～表 4 分别列出了各种不同地形条件下相应于两种不同核函数的检核点残差绝对值最大值(MAX)及均方误差(RMSE)。

表 2　坡度<1%的检核点统计值

Tab.2　Maximum and RMS comparison for check point to gradient<1%　/m

方案	扩展因子	核函数	NMQ	OLS	NMQ_RT	OLS _ RT
MAX	15	SQ	1.654 6	0.819 1	2.908 4	0.663 5
	55	GS	1.249 6	0.615 0	1.466 3	0.439 2
RMSE	15	SQ	0.930 9	0.437 2	1.107 7	0.452 1
	55	GS	0.742 9	0.351 1	0.566 2	0.403 4

表 3　1%<坡度<5%的检核点统计值

Tab.3　Maximum and RMS comparison for check point to 1%<gradient<5%　/m

方案	扩展因子	核函数	NMQ	OLS	NMQ_RT	OLS _ RT
MAX	1	SQ	3.970 2	1.597 7	3.916 1	1.509 2
	25	GS	2.663 2	1.826 4	2.550 0	1.661 0
RMSE	1	SQ	0.925 8	0.625 4	0.917 3	0.577 9
	25	GS	0.793 3	0.640 5	0.770 7	0.580 6

表 4　坡度>5%的检核点统计值

Tab.4　Maximum and RMS comparison for check point to gradient>5%　/m

方案	扩展因子	核函数	NMQ	OLS	NMQ_RT	OLS _ RT
MAX	35	SQ	2.741 8	1.884 8	1.823 2	1.078 4
	43	GS	3.490 9	1.325 0	2.727 3	1.133 3
RMSE	35	SQ	0.724 8	0.657 4	0.665 1	0.474 8
	43	GS	0.770 9	0.623 0	0.727 0	0.453 2

从表 2～表 4 可以看出：

1. 当地形起伏比较平缓或整体趋势呈水平变化时，由于在多面函数拟合时增加了常系数项，它实质上起到了剔除趋势性成分的作用，因此组合拟合法效果并没有较大改善，甚至不如直接采用多面函数拟合。但当整体地形有明显的趋势变化时，先进行趋势面拟合，再将剩余残差进行多面函数再拟合的组合拟合法，检核点残差分布较为集中，最大

残差也有所减少,这说明应用抗差趋势面与多面函数组合拟合可以改善空间数据内插的精度。

2. 基于正交最小二乘的多面函数内插精度明显优于常规的多面函数,检核点最大残差也明显减少,这说明根据核函数贡献的大小来自适应地选择节点,可以更加合理地反映地形的变化,保证拟合的精度。

3. 不同的核函数对 DEM 数据拟合结果的影响也不同,但差别不明显。在计算过程中还发现,扩展因子对拟合精度有较大的影响。

5 结 论

1. 若整体趋势比较平坦,可在核函数模型中加一常系数,这在一定程度上起到了趋势面拟合的作用。但对于地形变化比较复杂的区域,先进行趋势面拟合,再对剩余误差进行拟合,以突出反映地形的局部起伏,其拟合效果要比直接进行多面函数拟合理想。

2. 由于趋势面拟合是将短尺度的、局部的变化看作随机的和非结构的噪声,因此当局部地形起伏比较明显时,可将其局部的变化视作异常观测,并采用抗差估计原理,遏制局部异常变化对整体趋势面拟合的影响。

3. 应用多面函数求解,节点的个数及选择将直接影响到最后的内插精度。若选择均匀分布在区域范围内的采样点为节点,随机性较大,很难保证拟合精度。基于正交最小二乘法的基本思想,依据各节点相对应的核函数对曲面拟合贡献大小来自适应地选择节点,既保证了解算的稳定性,同时又提高了内插精度。

4. 核函数模型也会影响内插精度,但从本次选用的算例看,影响并不显著。除此之外,扩展因子也会影响内插精度,如何自主选择扩展因子是值得进一步研究的问题。

5. 趋势面拟合是用于揭示地形的总体变化趋势,因此地形显著变化点与异常采样点对趋势面拟合的影响类同,故采样抗差趋势面拟合法可以遏制它们对趋势面拟合的影响,而多面函数拟合则是用于拟合区域的地形变化,故在多面函数拟合前,应从采样点中剔除异常观测值,或采用相应的抗差估计方法加以控制,因此有关抗差多面函数拟合法也是我们后续关注的话题。

参考文献:

[1] HARDY R L. Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces[J]. Journal of Geophysical Research, 1971, 76(8): 1 705-1 915.

[2] HUANG Li-ren, TAO Ben-zao, ZHAO Cheng-kun. The Application of Fitting Method of Multi-quadric Functions in Research on Crustal Vertical Movement[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1993,22(1):25-31.(黄立人,陶本藻,赵承坤.多面函数拟合在地壳垂直运动研究中的应用[J].测绘学报,1993,22(1):25-31.)

[3] YANG Yuan-xi, LIU Nian. A Kind of Approximation Method on Gravity Anomaly[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2001,30(3):192-196.(杨元喜,刘 念.重力异常的一种逼近方法[J].测绘学报,2001,30(3):192-196.)

[4] HARDY R L. The Application of Multiquadric Equations and Point Mass Anomaly Models to Crustal Movement Studies[R]. [s. l.]: NOAA,1978.

[5] HARDY R L. Least Squares Prediction[J]. Photogrammetric Engineering, 1977, 43(4): 475-492.

[6] LÜ Yan. Study of Multisurface Interpolation Method in DTM[J]. Journal of Wuhan College of Surveying and Mapping, 1981,(2).(吕 言.数字地面模型中多面函数内插法的研究[J].武汉测绘学院学报.1981,(2).)

[7] LÜ Yan. A Comparative Study between Multisurface and Collocation Method in DTM Interpolation [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1982, 11(3):185-189.(吕 言.数字地面模型内插中多面法与配置法比较性的研究[J].测绘学报,1982,11(3):185-189.)

[8] LI Zhi-lin, ZHU Qin. Digital Terrain Model [M]. Wuhan: Wuhan University Publishing House, 2001. (李志林,朱庆.数字高程模型[M].武汉:武汉大学出版社,2001.)

[9] HUANG Wei-bin. The Theory and Application for Modern Adjustment [M]. Beijing: PLA Publishing House, 1990.(黄维彬.近代平差理论及其应用[M].解放军出版社,1990.)

[10] CHEN S, COWAN C F N, GRANT P M. Orthogonal Least Squares Learning Algorithms for Radial Basis Function Networks[J]. IEEE Trans Neural Networks, 1991, 2(2):302-309.

[11] WEI Hai-kun. The Theory and Method of Physical Design in Neural Network [J]. Beijing: Defense Industry Press, 2005. 48-49.(魏海坤.神经网络结构设计的理论与方法[M].北京:国防工业出版社,2005. 48-49.)

[12] YANG Yuan-xi. The Theory and Application of Robust Estimation [M]. Beijing: Ba-yi Publishing House, 1993.(杨元喜.抗差估计理论及其应用[M].北京:八一出版社,1993.)

[13] YANG Yuan-xi. Adaptively Robust Least Squares Estimation [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1996, 25(3):206-211.(杨元喜.自适应抗差最小二乘估计[J].测绘学报,1996,25(3):206-211.)

[14] LIU Da-jie, TAO Ben-zao. The Method for Practical Data Processing of Surveying[M]. Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping, 2000.(刘大杰,陶本藻.实用测量数据处理方法[M].北京:测绘出版社,2000.)

(责任编辑:丛树平)