

土壤粒径分布的多重分形描述

刘雪梅 (华东交通大学土木建筑学院, 江西南昌 330013)

摘要 将激光粒度分析方法和多重分形分析方法相结合, 分析土壤粒径分布的分形特征。对9个土壤样品的分析结果表明, 土壤粒径分布的多重分形性质与粘粒含量没有直接关系, 主要与土壤颗粒在整个粒径范围内的分布均一程度有关, 粒径分布越不均一的土壤越具有多重分形性质。

关键词 激光粒度分析; 多重分形; 粘粒含量; 土壤粒径分布

中图分类号 S152.3+2 文献标识码 A 文章编号 0517-6611(2008)24-10557-03

Multifractal Description of Soil Particle Size Distribution

LIU Xue-mei (College of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang, Jiangxi 330013)

Abstract Laser particle-size analysis method and multi-fractal theory were combined to analyze the fractal characters of soil particle size distribution. Analysis results of nine soil samples showed that there was no relation between the multi-fractal characters of soil particle size distribution and clay particle content, but the multi-fractal characters had relation with the homogeneity of soil particle size distribution. The uneven particle size distribution had more multi-fractal characters.

Key words Laser particle size analysis; Multi-fractal; Clay particle content; Soil particle size distribution

土壤粒径分布的分形结构常被用于估计土壤的其他性质, 如土壤水分特征曲线, 土壤饱和及非饱和水力传导度等。目前对于土壤粒径分布分形结构的研究大多数是根据常规试验数据, 用单一分形维数来描述土壤粒径的分形结构。然而, 在一些土壤中根据不同的粒径范围段所计算出来的分形维数不一样, 而且常规试验中由于条件的限制, 无法把粒径段分得很细, 从而可能忽略一些异常变换。研究表明仅仅用简单的单一分形(mono-fractal)不能充分描述粒径分布的整个粒径范围^[1-3]; 发育良好的土壤在任意粒径段表现出简单分形(mono-fractal)特征; 反之, 发育不完全的土壤(如高岭土、砂土)则表现出多重分形(multi-fractal)特征^[4]。但是粘粒含量小于10%的土壤表现的是单一分形性质^[5]。多重(维)分形(multi-fractal)技术是研究土壤粒径分布的成功选择^[6]。笔者将激光粒度分析方法和多重分形分析方法相结合, 分析土壤粒径分布的多重分形特征。

1 材料与试验方法

1.1 土壤样品的采集与测定 共取了9个土壤表层样品, 有砂土、壤土、粘土, 各土样编号、来源及土壤类型见表1。土样采集后, 风干, 研磨, 过2 mm筛, 制成待测样品。用激光粒度仪分析。

表1 土样编号、来源及土壤类型

Table 1 The code, source and soil type of soil samples

样号	土壤类型	来源	样号	土壤类型	来源
Sample code	Soil type	Soil source	Sample code	Soil type	Soil source
0	潮土	河北曲周	5	灌淤土	宁夏
1	栗钙土	河北坝上	6	潮土	河北沧州
2	红壤	昆明	7	褐土	北京昌平
3	淡灰钙土	宁夏	8	黑土	黑龙江阿城
4	风沙土	腾格里沙漠			

1.2 激光粒度仪分析 试验所用的激光粒度分析仪型号是Master Sizer 2000。称经处理的待测样品0.4 g, 设3个测定重

复, 加蒸馏水和分散剂(根据土壤pH值, 2号样选用0.5 ml/L的氢氧化钠, 其余样选用0.5 ml/L的六偏磷酸钠)浸泡2 h, 煮沸, 沸腾持续1 h, 冷却静置12 h, 把分散后的土样洗入激光粒度仪的加样池中测量。

激光粒度仪的粒径分析范围是0.020~2 000 μm, 共分为100个粒径段。即每个土样测量得到100个粒径段的百分含量 v_1, v_2, \dots, v_{100} 。

1.3 多重分形分析 将多重分形分析方法用于粒径分布区间 $J = [a, a+L]$ 的数量关系, 要求 J 的各子区间间隔相等。利用二分法原理, 把区间 J 连续划分成 $L = 2^k$, $k = 1, 2, 3, \dots, L$ 是区间 J 的长度, 在每一个尺度 2^{-k} 中, 有 $N(2^{-k}) = 2^k$ 个子区间, $\mu(2^{-k})$ 为每个子区间相对应的概率分布密度(百分含量)。取区间 $I = [0.020, 2000]$, 划分为100个子区间 $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, 100$, 对应于激光粒度仪系统划分的100个粒径段, 粒径在子区间 I_i 内的土壤颗粒的体积百分数为 v_1, v_2, \dots, v_{100} , x_i 为激光粒度仪测得的粒径。激光粒度仪所划分的各个 I_i 的区间长度不一样, 而要实现利用多重分形的方法分析土壤颗粒的粒径分布特征, 必须使各个子区间的长度一样, 即各个子区间等长。

根据激光粒度仪划分粒径段的原理, 在测定区间 $I = [0.020, 2000]$ 内 $\lg(x_{i+1}/x_i)$ 为一个常数, 为使各子区间长度一样, 以0.020为区间起点, 取对数, 由此构造一个新的区间 $J = [\lg(0.020/0.020), \lg(2000/0.020)] = [0, 5]$, 其中 $J_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, 100$ 。在区间 J 中, 有 $N(2^{-k}) = 2^k$ 个同尺寸的小区间 2^{-k} , 每个小区间里至少包含一个测量值, 为使最小的子区间中包含有测量值, k 的取值范围为1~6。 $\mu(2^{-k})$ 为落在子区间 J_i 内所有测量值 v_i 的加和, 其中 $v_i = v_i / \sum_{i=1}^{100} v_i$, $i = 1, 2, \dots, 100$, $\sum_{i=1}^{100} v_i = 1$ 。再利用 $\mu(2^{-k})$ 构造一个配分(partition)函数族 $\mu(q, 2^{-k})$, $\mu(q, 2^{-k}) = \mu(2^{-k})^q / \sum_{i=1}^N \mu(2^{-k})^q$ 为第 i 个子区间的 q 阶概率, q 为实数。 $\sum_{i=1}^N \mu(2^{-k})^q$ 是对所有子区间的 q 阶概率求和。相对于 $\mu(q)$ 的Hausdorff维数 $f(a(q))$ 公式:

$$f(a(q)) = \lim_{2^{-k} \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(2^{-k})} \mu(q, 2^{-k}) \lg \mu(q, 2^{-k})}{\lg 2^{-k}} \quad (1)$$

作者简介 刘雪梅(1978-), 女, 江西安福人, 硕士, 讲师, 从事土壤污染方面的研究。

收稿日期 2008-03-10

对应于 $\mu(q)$ 的奇异性强度 a_i 的平均值公式:

$$a(q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N \mu(q, i) \lg \mu(q, i)}{\lg \mu(q, i)} \quad (2)$$

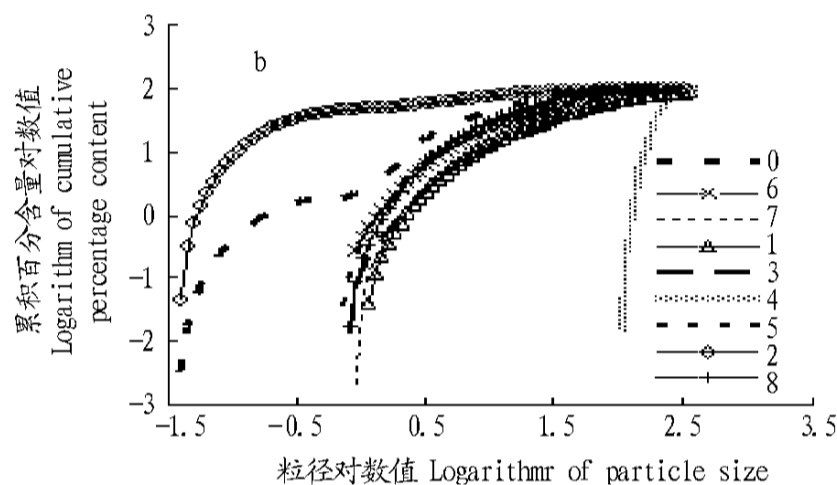
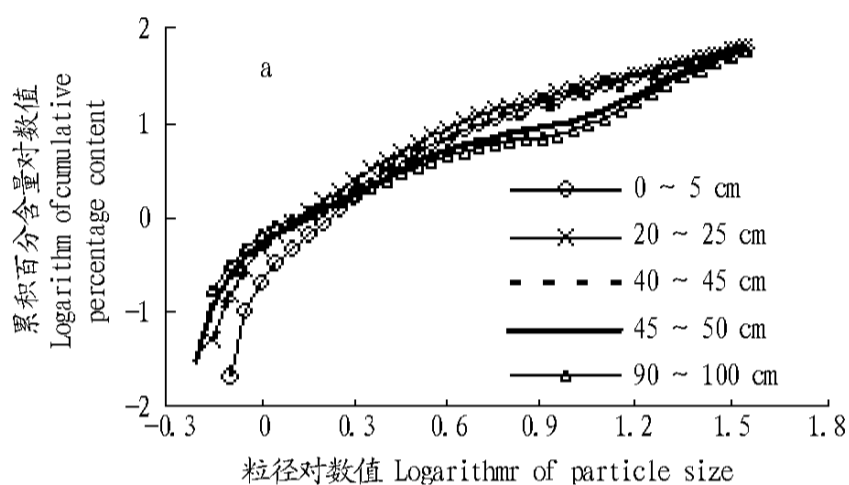
(1), (2) 两式即为计算 $f(a) - a$ 谱的基本公式。q 原则上应为 $0 < q < 1$ 。实际计算时先计算出 $\mu(q, i)$, 然后在散点图 $\sum_{i=1}^N \mu(q, i) \lg \mu(q, i) - \lg \mu(q, i)$ 上用最小二乘法求出趋势线的斜率即为 $f(a(q))$ 。用同样的方法可以从图 $\sum_{i=1}^N \mu(q, i) \lg \mu(q, i) - \lg \mu(q, i)$ 上求出 $a(q)$ 。

当 $q=0$ 时, $f(a(0)) = D_0$, 称之为计盒子维数(counting box dimension); 当 $q=1$ 时, $f(a(1)) = a(1) = D_1$, 称之为信息熵维数(entropy dimension) (Evertsz et al., 1992)。因 $\mu \in [0, 1], 0 < D_1 < 1$ 。 D_1 的值接近1 时说明系统在整个尺度上是均匀分布的, D_1 的值接近0 时则反映了某个子区间的分布过于集中。每个土样的粒径分布的奇异性谱 $a(q)$ 和 $f(a(q))$

是利用公式(1) 通过最小二乘拟合以及 $-10 \leq q \leq 10$ 以 0.5 的步长计算出来的。拟合得到的决定系数用于刻画标度性质。参数 q 是对于稀疏和密集区域 μ 的一个缩放系数, 当 $q > 1$ 时, 含量高的区域被放大, 而当 $q < 1$ 时, 含量低的区域被放大, 当 $q = 1$ 时, μ 的 q 次方仍为 μ (Kravchenko et al., 1999)。

2 结果与分析

2.1 粒径累积分布描述 图1 是所测得的土壤颗粒百分含量累积分布双对数曲线, 图1(a) 是0 号土样所处地区一个剖面不同深度的分布曲线, 图1(b) 是9 个土样的累积对数分布曲线。从图1a ~b 中可以明显看出, 仅仅用单标度分形是不能描述整个粒径范围内的所有数据的。从图1(a) 中可以看出, 底层土壤比表层土壤所具有的多标度性更明显。这个结果和 Huang 等(2003) 的研究结果一致。



注:a、b 分别是0 号土样不同深度土壤和9 个土样的土粒累积对数分布曲线。

Note :a and b are the Log-Log plots of particle-size distribution of soil sample 0 at different layers and nine soil samples, respectively.

图1 土壤粒径累积分布双对数曲线

Fig.1 Log-Log plots of particle-size distribution of soil samples

2.2 相关性分析 表2 是各土样粒径分布的信息熵维数值 D_1 及其相对应的决定系数 R^2 。各土样粒径分布的信息熵维数值 D_1 相对应的决定系数表现出了很好的相关性。所有土样的决定系数 R^2 都大于 0.950。 D_1 值最小的是4 号土样, 为 0.713, 最大的是1 号土样, 为 0.942, 说明1 号土样的粒径分布均一性最好, 4 号土样的粒径分布均一性最差。

表2 各土样粒径分布的信息熵维数(D_1) 及其相对应的决定系数(R^2)
Table 2 Entropy dimension (D_1) and its corresponding coefficient of determination (R^2) of particle size distribution of soil samples

样号 Sample No.	D_1	R^2	样号 Sample No.	D_1	R^2
0	0.874	0.994	5	0.881	0.994
1	0.942	0.998	6	0.861	0.991
2	0.929	1.000	7	0.875	0.992
3	0.932	0.979	8	0.773	0.994
4	0.713	0.985			

图2 是各土样拟合得到奇异性谱时相对应的决定系数值 R^2 , 不同的土样在 $R^2 > 0.950$ 时其 q 值范围是不一样的, 大部分土样在 $-10 \leq q \leq 10$ 这个范围内其决定系数是大于 0.950 的。5 号土样在 q 为负值时, 决定系数小于 0.950, 而 q 为正值时, 决定系数大于 0.950, 说明密集区域比稀疏区域标度性好, 7 号土样是当 q 为正值时, 决定系数小于 0.950, 当 q 为负值时大于 0.950, 说明7 号土样的稀疏区域比密集区域

标度性好。标度性最好的是0 号土样, 在 $-10 \leq q \leq 10$ 范围内, $R^2 > 0.980$ 。另外, 所有土样的 D_0 和 D_1 相对应的决定系数都大于 0.950。

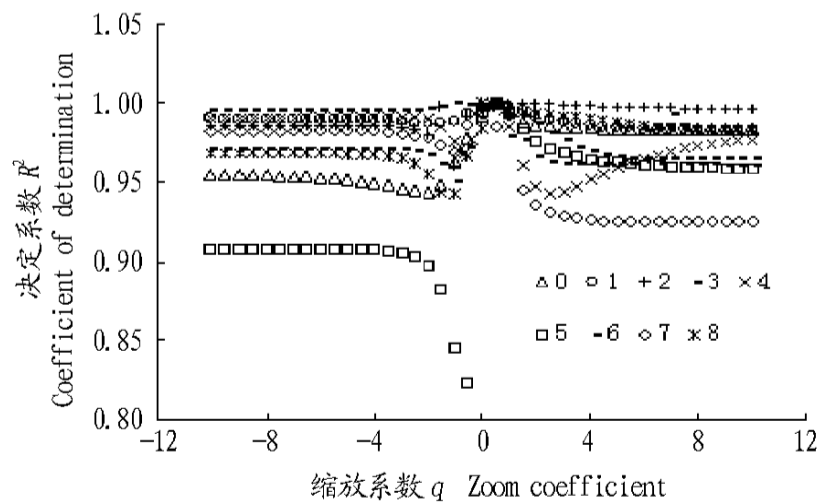


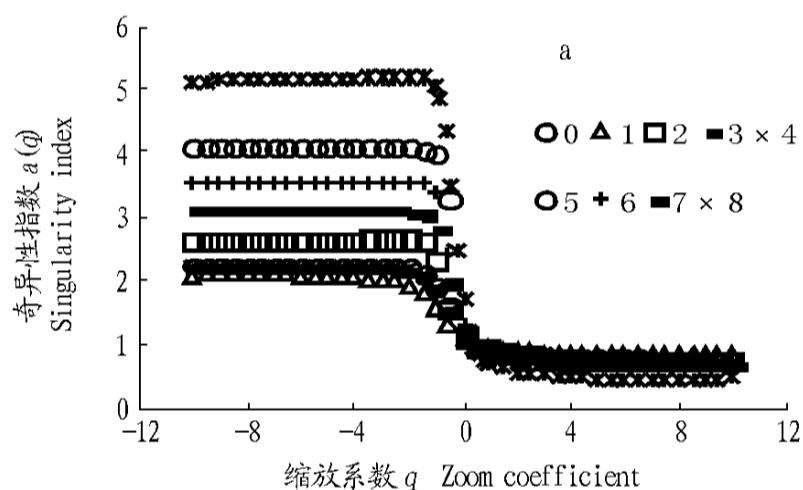
图2 各土样粒径分布奇异性谱及其相对应的决定系数值

Fig.2 Corresponding coefficients of determination (R^2) of the singularity spectrum of particle size distribution of soil samples

2.3 多维分形谱分析 $f(a)$ 谱的形状为钟形, 不同土壤的 $f(a)$ 谱的钟形开口和对称性是不一样的, 谱的钟形开口和对称性为描述不均一系统的标度指数的多样性提供了信息。当 $q=0$ 时, $f(a)$ 谱出现最大值, 即 $f(a(0)) = D_0$ 。 D_0 的值是不能为土壤粒径分布的标度性提供信息的, 因为 D_0 是在假设粒径为均一分布(任意子区间都是同样的概率分布) 的基础上计算的。不均一性可以通过 $f(a)$ 轴随 D_0 而变化的

大小来估计。 D_0 左边和右边的值也就是相对应于 q 的正负值所得到的 $f(a)$ 值, 比较 D_1 及 $f(a(-1))$ 与 D_0 的差, 差值接近 0 说明该土壤的粒径分布可以用单一分形描述; 差值越大说明越需要用多重分形来描述。表 3 是各土样粒径分布的 D_1 及 $f(a(-1))$ 与 D_0 的差值。4 号土样 D_0 和 D_1 的差值最大, 1 号土样最小。 $f(a(-1))$ 和 D_0 的差值是 4 号土样最大, 0 号土样最小。说明 4 号土样的粒径分布不管密集区域还是稀疏区域都是均一性最差, 1 号土样在密集区域均一性最好, 0 号土样在稀疏区域均一性最好。0 号土样和 2 号土样粘粒含量都比较高, 4 号土样是砂土, 1 号土样是壤土。从这里可以看出, 土粒的多重分形性质与粘粒含量没有直接的关系, 主要与土壤颗粒在整个粒径范围内的分布均一程度有关。按土壤质地划分依据, 应该是壤土分布相比于粘土和砂土更均一, 即壤土的粒径分布特征可以用单一分形描述, 而粘土和砂土需要用多重分形描述。关于砂土的结果和 Adolfo 等研究结果不同, 但与 Huang 等的结果一致^[4-5]。

图 3(a) 是各土样粒径分布的奇异性谱, 图 3(b) 是各土样粒径分布的 $f(a)$ 谱。4 号土样由于 D_1 及 $f(a(-1))$ 和 D_0 的差值比较大, 故在 $-1 < q < 1$ 以 0.2 为步长求值。从图 3

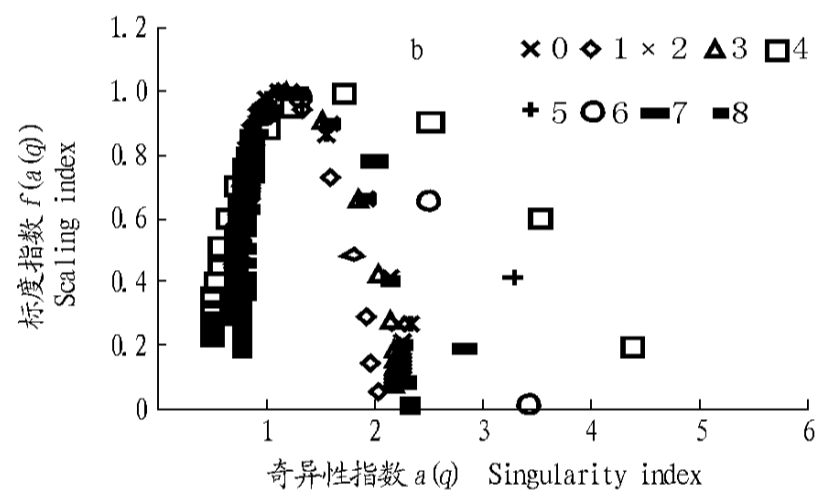


(a) 可以看出, 4 号土样的 $a(q)$ 值范围最宽, 1 号土样的范围最窄。当 q 增大或缩小时, $a(q)$ 变化不大或只是重复, 在这样的情况下, 尽管 q 增大或者缩小, 仍得不到其粒径分布的新信息, 即 $a(q)$ 达到了极限。从图 3(b) 同样可以看出, 各土样的 $f(a)$ 谱左边相比右边短很多, 反映了密集区域的分布比稀疏区域平均。4 号土样的钟形开口最宽, 顶部最圆; 1 号土样的钟形开口最窄, 顶部最尖。说明在整个粒径范围内 4 号土样分布不均匀, 1 号土样粒径分布相对均一。

表 3 各土样粒径分布 D_0 - D_1 值以及 $f(a(-1))$ - D_0 值比较

Table 3 Comparison the values D_0 - D_1 and $f(a(-1))$ - D_0 of particle size distribution of the soil samples

样号 Sample No.	D_0 - D_1	$f(a(-1))$ - D_0	样号 Sample No.	D_0 - D_1	$f(a(-1))$ - D_0
0	0.13	0.03	5	0.14	1.09
1	0.06	0.27	6	0.19	0.98
2	0.07	0.73	7	0.13	0.81
3	0.07	0.33	8	0.23	0.33
4	0.29	1.31			



注: a、b 分别是各土样粒径分布的奇异性谱和 $f(a)$ 谱。

Note: a and b are singularity-spectrum and $f(a)$ -spectra of particle size distribution of soil samples, respectively.

图 3 各土样粒径分布的奇异性谱和 $f(a)$ 谱

Fig.3 Singularity spectrum and $f(a)$ -spectra of particle size distribution of soil samples

3 结论

(1) 用多重分形方法分析土壤粒径分布, 这需要先进的分析土壤颗粒的技术(如激光粒度分析技术)的支持, 以保证有足够的数用于数学计算。通过对 9 个土壤样品的分析, 结果表明: 一般土壤的粒径分布表现了适度的多标度性质, 应用多重分形的方法来描述这些性质是非常有效的。土壤粒径分布的多重分形性质与粘粒含量没有直接关系, 主要与土壤颗粒在整个粒径范围内的分布均一程度有关, 分布越不均一的越需要用多重分形方法描述。分布均一的土壤粒径分布特征可以用单一分形描述, 而分布不均一的土壤的粒径分布则需要用多重分形描述。

(2) 从 $f(a)$ 谱上能得到土壤颗粒空间分布的丰富信息, 并将其定量化, 不仅可以看出百分含量空间分布从密集到稀疏的整体特征, 还可以分析某一粒径百分含量分布的特

征。对于 $f(a)$ 谱所含有空间分布信息的具体应用还有待进一步研究。

参考文献

- [1] WU Q, BORKOVEC M, SUTHER H. On particle-size distribution in soils[J]. Soil Science Society of America Journal, 1993, 57: 883 - 890.
- [2] GROUT H, TARQUIS A M, WESNER M R. Multifractal analysis of particle size distributions in soil[J]. Environment Science Technology, 1998, 32: 1176 - 1182.
- [3] BETTELLI M, CAMPBELL G S, FLURY M. Characterization of particle-size distribution in soils with a fragmentation model[J]. Soil Science Society of America Journal, 1999, 63: 782 - 788.
- [4] HUANG G Q, XUS M, LI X G. Characterizations of PSD fractal of porous medium[J]. Transactions of Tianjin University, 2003, 9(3): 170 - 173.
- [5] ADOLFONDP, DANIEL G, MARCO B, et al. Multi-fractal characterization of soil particle size distributions[J]. Soil Science Society of America Journal, 2001, 65: 1361 - 1367.
- [6] ADOLFONDP, DANIEL G, ROBERT Q, et al. Multi-fractal characterization of soil pore system[J]. Soil Science Society of America Journal, 2003, 67: 1361 - 1369.