



准地转过程分析和大尺度天气过程的物理机制（3）

北京大学地球物理系 陶祖钰

第三讲 准地转 ω 方程和位势倾向方程

在准地转的假定下，即在涡度方程中涡度和涡度平流用地转涡度及地转风涡度平流代替，但保留实测风的散度，利用静力学方程以及连续性方程，可将涡度方程和热力学方程变换为由 ω 方程和倾向方程组成的准地转方程组。准地转方程组也称为诊断方程组，因为 ω 方程给出了大尺度水平环流和次级环流的联系，即根据大尺度水平运动的特点诊断垂直运动的性质。倾向方程则给出了大尺度水平环流的演变规律，即诊断大尺度水平流场和温度场的变化趋势。因此，准地转方程组是大气大尺度运动中所进行的准地转过程的集中体现。下面我们来分析 ω 方程和倾向方程是如何反映我们在前面已讨论过的准地转过程。

一、 ω 方程的物理意义

为了导出常用形式下的 ω 方程，绝热条件下热力学方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \vec{V} \cdot \nabla T + \omega (\Gamma_d - \Gamma)$$

可改写为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \vec{V} \cdot \nabla T + \omega \frac{P}{R} \sigma \quad (3.1)$$

其中 σ 为以位温表示的静力稳定度参数，

$$\sigma = - \frac{1}{\rho \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

将(3.1)式中的 ω 移到等号的左边，得

$$\omega = \frac{R}{\sigma p} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T \right) \quad (3.2)$$

对(3.2)式作拉普拉斯运算，得

$$\nabla^2 \omega = \frac{R}{\sigma p} \left[\nabla^2 \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla^2 (\vec{V} \cdot \nabla T) \right] \quad (3.3)$$

从(3.2)式到(3.3)式时设静力稳定度参数 σ 为常数。

根据涡度方程和连续方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \vec{V} \cdot \nabla (\zeta + f) - Df$$

$$D = - \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

可得

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{1}{f_0} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla (\zeta + f) \right] \quad (3.4)$$

将(3.4)式对气压求偏微商再乘以 f_0^2/σ 则得

$$\begin{aligned} \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} &= \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \\ &- \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[- \vec{V} \cdot \nabla (\zeta + f) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

将(3.3)式和(3.5)式相加可得

$$\begin{aligned} \nabla^2 \omega + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} &= \frac{R}{\sigma p} \nabla^2 (\vec{V} \cdot \nabla T) \\ &+ \frac{R}{\sigma p} \nabla^2 \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \\ &- \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{V} \cdot \nabla (\zeta + f) \right] \\ &+ \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

根据静力学方程可知

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{R}{p} T$$

因此(3.6)式中的右边第二项可写成

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sigma p} \nabla^2 \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) &= \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{p} T \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi) \right] \\ &= -\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \zeta g}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

如果任何时刻 $\zeta = \zeta g$, $\partial \zeta / \partial t = \partial \zeta g / \partial t$, 则(3.6)式中右边的第二项和第四项将抵消, (3.6)式就变为常用的 ω 方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 \omega + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} \\ &= \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[\vec{V} g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) \right] \\ &+ \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[\vec{V} g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

由此可见, ω 方程的物理意义为大尺度水平运动保持地转平衡必须有相应的次级环流使被平流过程破坏了地转平衡立即重新恢复到地转平衡。换句话说, ω 方程表示大尺度运动的准地转过程中所伴随的次级环流, 即垂直分布不均匀的涡度平流和水平分布不均匀

的温度平流所产生垂直运动。上一节中我们已看到垂直运动在准地转过程产生的物理机制。图3.1为常见的斜压扰动中涡度平流和温度平流所引起的垂直运动分布。

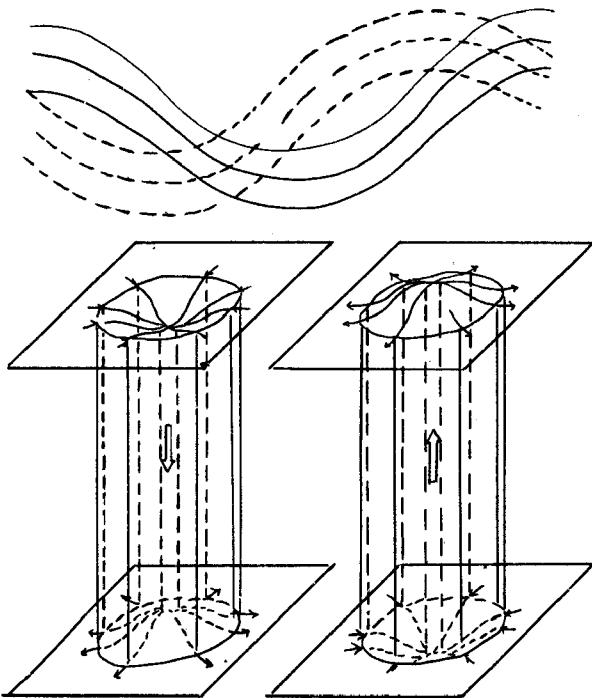


图3.1 斜压扰动中温度平流和涡度平流所引起的垂直运动分布

二、倾向方程的物理意义

类似的方法也可用来分析倾向方程的物理意义。将热力学方程(3.1)式对气压求偏微商并两边乘以 $f_0^2 p / (\sigma R)$ 得

$$\begin{aligned} \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{P}{R} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \\ = \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{P}{R} \frac{\partial}{\partial p} \left(-\vec{V} \cdot \nabla T \right) + f_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial p} \end{aligned} \quad (3.8)$$

将涡度方程乘以 f_0 得

$$f_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -f_0 \vec{V} \cdot (\zeta + f) - f_0^2 D \quad (3.9)$$

根据连续方程

$$D + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

(3.9) 式减去(3.8)式即可得到

$$\begin{aligned} f_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{p}{R} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \\ = -f_0 \vec{V} \cdot \nabla (\zeta + f) \\ - \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{p}{R} \frac{\partial}{\partial p} (-\vec{V} \cdot \nabla T) \end{aligned} \quad (3.10)$$

在任何时刻都符合静力平衡及地转平衡的条件下，即

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta g = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{\partial \zeta g}{\partial t} = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \\ T &= -\frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{p}{R} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

则(3.10)式就可变为常用的倾向方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ = -f_0 \vec{V} g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) \\ + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{V} g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

比较(3.10)和(3.11)式可见，倾向方程的左端二项的含义就是涡度倾向和温度倾向的垂直微商，因此倾向方程实际上是反映了准地转过程中流场和温度场变化的原因。即一部分是由于其自身的平流造成的，一部分是在适应过程中通过次级环流使流场和温度场之间发生相互作用造成的。为了便于说明这种相互作用的机制，我们先假设温度场不随时间变化的情况，则倾向方程简化为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -f_0 \vec{V} g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) \\ &+ \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{V} g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \end{aligned}$$

它说明涡度的变化一部分是由涡度场自身的平流造成的，涡度倾向的符号和涡度平流的符号相同。另一部分是温度平流的垂直分布不均匀造成的，当低层有冷平流高层有暖平流时，涡度增大。涡度增加原因是由于要保持温度场不变，低层必须有下沉运动的绝热增温抵消冷平流的作用，高层必须有上升运动的绝热冷却抵消暖平流的作用。低层下沉运动、高层上升运动要求中层有水平辐合。水平辐合在地转偏向力的作用下制造涡度，使涡度增大。这就是倾向方程中所包含的温度场通过次级环流影响流场的机制。图3.2给出温度平流使流场发生变化的物理机制（示意图）。

倾向方程中所反映的温度场变化的机制在一般教科书中很少谈到。用类似的方法，即在假设流场不变的情况下，也可从倾向方程看出温度场变化的机制。在 $\partial \zeta / \partial t = 0$ 的假设下倾向方程变为

$$\begin{aligned} \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ = -f_0 \vec{V} g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) \\ + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{V} g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

比较(3.12)式和(3.10)式不难看出，右边第二项表示温度场本身的平流所造成的温度倾向。图3.3给出了垂直分布不均匀的温度平流所造成的温度倾向的垂直分布及其相应的位势倾向的垂直分布。从图可见垂直分布不均匀的温度平流可引起气柱质心在垂直方向上发生位移，等压面位势倾向在中层出现极值。

(3.12) 式右边的第一项为流场平流对温度场的作用。在涡度倾向 $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$ 的假设下，正涡度平流必需被辐散所抵消，上层应有下沉运动。低层应有上升运动。正涡度平流伴随的垂直环流所引起的温度绝热变化和高层暖平流、低层冷平流所引起的温度变化相同，同样引起气柱质心的高度下降，使中层等压面的位势倾向出现极小值。通过分析不难看出正涡度平流通过次级环流使低层温度降低，高层温度升高。这和上节准地转过程分析中得到的温度场变化的规律是一致的。

实际大气中流场扰动的變化既有平流过程造成的涡度变化，也有次级环流造成的涡度个别变化。图3.4为流场扰动在移动过程中气块的水平轨迹及气块涡度在平移过程中发生的个别变化。在脊前到槽后的气块在平移过程中，由于辐合，气块涡度将增大。在槽前到脊后的气块在平移过程中，由于辐散，气块涡度将减小。因此槽和脊的移速都比气块的移动速度慢。

总之， ω 方程和倾向方程的物理意义的讨论同样表明准地转过程基本特征是大尺度运动通过次级环流的作用保持其运动的地转平衡特征，以及通过次级环流使流场和温度场发生相互作用。

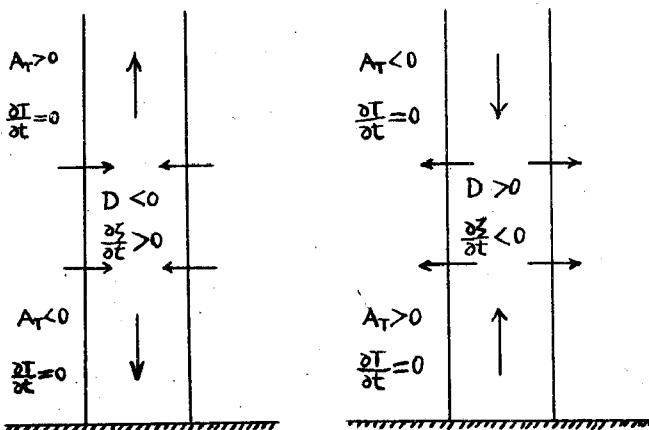


图3.2 垂直分布不均匀的温度平流
引起中层流场涡度变化机制

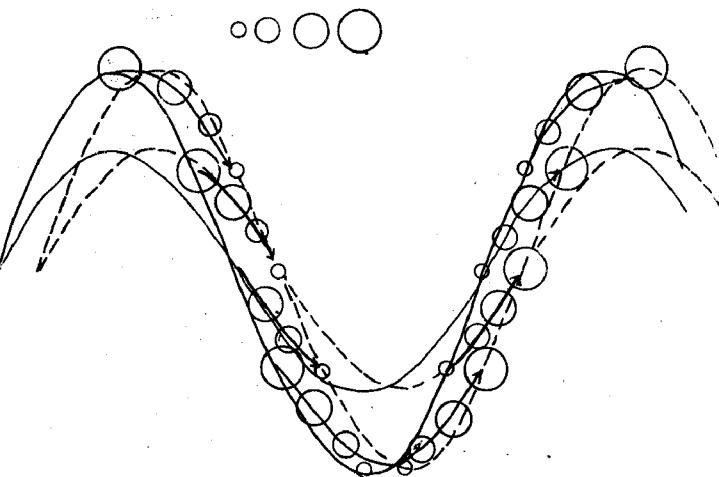


图3.3 垂直分布不均匀的温度平流
所引起的位势倾向垂直分布

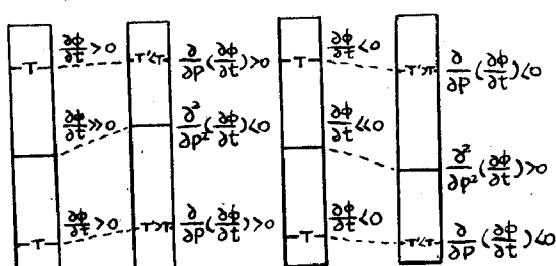


图3.4 高空急流轴上气块运动的轨迹及其在
运动过程中体积及涡度的变化

粗线为急流轴 细线为流线 圆的大小表示气块体积
矢线为轨迹 其曲率表示相对涡度