非线性约束规划的极大熵多目标进化算法

刘淳安
LIU Chun-an

宝鸡文理学院 计算与信息科学研究所,陕西 宝鸡 721013
Computation and Information Institute, Baoji College of Arts and Science, Baoji, Shaanxi 721013, China
E-mail:liu2006@126.com

LIU Chun-an.Maximum entropy multi-objective evolutionary algorithm for nonlinear constrained programming.Computer Engineering and Applications, 2007, 43(21): 40-42.

Abstract: The difficult to solve the Nonlinear Constraint Programming problems (NCPs) is how to do with the constraint.In this paper, a new maximum entropy function based on the constraint conditions of NCPs is given.Then using the new maximum entropy function, the nonlinear constrained programming problems is transformed into a bi-objective optimization problem.By combining the reasonable design of the searching operation and different parameters, a new maximum entropy evolutionary algorithm is finally proposed.The computer simulations demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: nonlinear programming; constrained programming; evolutionary algorithm; maximum entropy

摘 要:解非线性约束规划的困难在于如何处理问题的约束,从问题的约束条件出发构造了一个新的极大熵函数,利用此函数将原非线性约束规划问题转化成了两个目标的多目标优化问题。通过对搜索操作和参数的合理设计给出了一种新的极大熵多目标进化算法。计算机仿真表明该算法对带约束的非线性优化问题求解是非常有效的。

关键词:非线性规划;约束规划;进化算法;极大熵
文章编号:1002-8331(2007)21-0040-03 **文献标识码**:A **中图分类号**:TP301.6

1 引言

非线性约束规划问题一直是最优化领域中 NP 难问题,其求解的困难在于如何处理问题的约束,通常的解法是利用罚函数法把其转化为无约束的优化问题,但是罚函数法的一个最大缺陷是其罚因子难以选择[1,2]。近年来,借鉴生物进化理论发展起来的遗传算法,因其独特的优化机制及其通用性、灵活性在优化领域得到了广泛重视和应用。在文献[3]中,作者将现有的约束优化算法分成了四类:保留可行解法,可行解优于不可行解法及其它混合方法。本文利用多目标优化的思想,提出了一种求解非线性约束规划问题的新方法,该方法从问题的约束条件出发构造了一个极大熵函数,并利用构造的新极大熵函数将原约束规划问题转化成了两个目标的多目标优化问题,并对转化后的优化问题设计了一种新的进化算法。最后数据实验表明该算法对带约束的非线性规划问题求解是非常有效的。

非线性约束规划问题可描述为如下形式:

$$\begin{cases}\min f(x)\\ \text{st. } g_i(x)\leqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,m\end{cases} \tag{1}$$

其中$[L,U]$为 R^n 空间上的 n 维向量域,称$[L,U]=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|l_i\leqslant x_i\leqslant u_i,i=1,2,\cdots,n\}$为搜索空间,集合 $D=\{x|x\in[L,U],g_i(x)\leqslant 0,i=1,2,\cdots,m\}$为解的可行域。由于等式约束 $g_k(x)=0$ 等价于 $g_k^2(x)\leqslant 0(k=l+1,l+2,\cdots,p)$,因此,具有等式约束的问题均可以转为(1)的形式。对非线性约束最优化问题式(1),若存在 $x^*\in D$ 使得对任意 $x\in D$ 都有 $f(x^*)\leqslant f(x)$成立,则称 x^* 是 $f(x)$在可行域 D 上的全局最优点,$f(x^*)$称为全局最优解[2]。

2 非线性约束规划问题的转化

2.1 极大熵函数 $G(x,p)$的引入

引理 1 记 $S=\{x|g_i(x)\leqslant 0,i=1,2,\cdots,m\}$,$\bar{S}=\{x\,|\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x)\leqslant 0\}$,则 $S=\bar{S}$。

证明:$\because$ 对 $\forall x\in S$,有 $g_i(x)\leqslant 0,i=1,2,\cdots,m$,$\therefore \bar{S}=\{x\,|\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x)\leqslant 0\}$成立,即 $x\in\bar{S}$,因此,$S\subset\bar{S}$;又 $\because$ 对 $\forall x\in\bar{S}$,有 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x)\leqslant 0$,$\therefore g_i(x)\leqslant 0,i=1,2,\cdots,m$,即 $x\in S$,因此,$\bar{S}\subset S$。故有 $S=\bar{S}$。

定义 1 称 $G(x,p)=\dfrac{1}{p}\ln(\sum\limits_{i=1}^{m}e^{(p\cdot g_i(x))})$,为由问题(1)的约

基金项目:国家自然科学基金资助项目(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60374063);陕西省自然科学基础研究计划项目(the Natural Science Foundation of Shaanxi Province of China under Grant No.2006A12);陕西省教育厅科学技术研究计划项目(No.07JK180);宝鸡文理学院重点科研项目(No.ZK0619)。
作者简介:刘淳安(1972-),男,汉,副教授,博士生,研究方向:最优化理论、进化算法与人工智能。

束条件构造的极大熵函数，这里：$p>0$，且当 $p\to\infty$ 时，$G(x,p)$一致收敛于 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x)\leqslant 0$。

证明：$\because G(x,p)-\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x)=\frac{1}{p}\ln(\sum\limits_{i=1}^{m} e^{(p\cdot g_i(x))})-\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x)=\frac{1}{p}\ln(\sum\limits_{i=1}^{m} e^{(p\cdot g_i(x))})-\frac{1}{p}\ln(e^{p\cdot \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x)})=\frac{1}{p}\ln(\sum\limits_{i=1}^{m} e^{p\cdot(g_i(x)-\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x))})$，

$\therefore 0\leqslant G(x,p)-\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x)\leqslant \frac{\ln(m)}{p}$，因此，当 $p\to\infty$ 时，$G(x,p)$一致收敛于 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x)\leqslant 0$。

2.2 非线性约束规划问题的转化

由上述定义 1 知，对于极大熵函数 $G(x,p)$，当 $p\to\infty$ 时，$G(x,p)$一致收敛于 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x)\leqslant 0$。又由引理 1 知，集合 $S=\{x|g_i(x)\leqslant 0,i=1,2,\cdots,m\}$等价于集合$\bar{S}=\left\{x\,\middle|\,\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x)\leqslant 0\right\}$，因此，若令 $g(x,p)=\max(0,G(x,p))$，则问题(1)可以转化为下列两个目标的多目标优化问题：

$$\min\{f(x),g(x,p)\} \tag{2}$$

从式(2)可以看出，对第二个目标函数 $g(x,p)$不断极小化可以促使种群向可行解集移动，同时对第一个目标函数 $f(x)$不断极小化也就意味着对问题(1)的最优解不断加以改善。因此非线性约束规划问题(1)的求解完全可以转化为具有两个目标的多目标优化问题(2)的求解。

3 极大熵多目标进化算法(CEEA)

3.1 开关选择算子

对于 $\forall x\in[L,U]$，定义其适应度为

$$F(x,p)=\omega_1 f(x)+\omega_2 g(x,p)\text{，其中：}\omega_1,\omega_2\in\{0,1\} \tag{3}$$

情形 1：若被选个体中所含原问题(1)的可行解的数目已经超过了种群规模 N，在式(3)中令 $\omega_1=1,\omega_2=0$ 此时对可行解按其适应度的大小值排序，用比例选择法选取 N 个个体作为下一代种群。

情形 2：若被选个体中所含原问题(1)的可行解的数目为 $k,0\leqslant k\leqslant N$，则保留所有可行解，在式(3)中令 $\omega_1=0,\omega_2=1$，计算剩余个体的适应度值并从小到大对其进行排序，用比例选择法选取 $N-k$ 个个体与已有的可行解个体组成下一代种群。

3.2 正交杂交算子

设以杂交概率选取两个父代个体 $\boldsymbol{x}_i=(x_i^1,x_i^2,\cdots,x_i^n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_j=(x_j^1,x_j^2,\cdots,x_j^n)^{\mathrm{T}}$，用正交杂交算子(其设计方法过程参见文献[4])对其进行正交杂交，共产生 q_1 个个体作为其杂交后代。

3.3 变异算子

从当前种群中随机选择 $p_m\times N$(N 为种群规模)个父代个体进行变异，设 x 是随机选择的一个父代个体，o 是经过变异得到的子代个体，则 $o=x+\Delta x$，其中 $\Delta x\sim N(0,\sigma^2)=N(0,\sigma_1^2)$，$N(0,\sigma_2^2)$，$\cdots$，$N(0,\sigma_n^2))$，$\Delta x$ 是服从均值为 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，方差为 $\boldsymbol{\sigma}^2=(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_n^2)^{\mathrm{T}}$ 的 n 维标准正态分布。

4 极大熵多目标进化算法(CEEA)流程

(1)给定杂交概率 p_c，变异概率 p_m 及种群规模 N，随机在搜索空间$[L,U]$里产生初始种群 $p(0)$，令 $t=0$。

(2)在 $p(t)$中随机选择 $p_c\times N$ 个父代，用 3.2 正交杂交算子进行杂交产生其后代，没有杂交的父代看作自己的后代，所有后代的集合记为 $c(t)$。

(3)对 $c(t)$中的每个个体作为父代以概率 p_m 按 3.3 的变异策略进行变异，用变异后产生的个体替换变异前的父代个体，并与中没有参与 $c(t)$变异的个体组成中间种群 $p'(t)$。

(4)对 $p'(t)\cup c(t)$中的个体按 3.1 的选择策略选出规模为 N 的下代种群 $p(t+1)$，同时保留 $p'(t)$中满足约束的最好解 $x^*=\arg\min\limits_{x\in D\cap p(t)} f(t)$，令 $t=t+1$。

(5)当终止条件满足时，停，否则，转(2)。

5 数值模拟

5.1 试验函数

本文选了 4 个标准测试函数，其中 $G1,G2$ 取自文献[5]。$G3,G4$ 其余选自文献[2,6]，所用函数如下：

$G1$[5]：$\min f(t)=3x_1+0.000\,001x_1^3+2x^2+(\frac{0.000\,002}{3})x_2^3$

$$\text{Subject to:}\begin{cases}-x_4+x_3-0.55\leqslant 0;-x_3+x_4-0.55\leqslant 0\\ 1\,000\sin(-x_3-0.25)+1\,000\sin(-x_4-0.25)+894.8-x_1=0\\ 1\,000\sin(-x_3-0.25)+1\,000\sin(x_3-x_4-0.25)+894.8-x_2=0\\ 1\,000\sin(-x_4-0.25)+1\,000\sin(x_4-x_3-0.25)+1\,294.8=0\\ 0\leqslant x_1,x_2\leqslant 1\,200;-0.55\leqslant x_3,x_4\leqslant 0.55\end{cases}$$

最优点 $x^*=(679.945,1\,026.067,0.118\,876,-0.396\,233\,6)$，最优值 $f^*=5\,126.498$。

$G2$[5]：$\min f(t)=e^{x_1x_2x_3x_4x_5}$

$$\text{Subject to:}\begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-10=0\\ x_2x_3-5x_4x_5=0;x_1^3+x_2^3+1=0\\ -2.3\leqslant x_i\leqslant 2.3(i=1,2);-3.2\leqslant x_i\leqslant 3.2(i=3,4,5)\end{cases}$$

最优点 $x^*=(-1.717\,1,1.595\,7,1.827\,2,-0.763\,64,-0.763\,6)$，最优值 $f^*=0.053\,949\,8$。

$G3$[2,6]：$\min f(t)=(x_1-10)^2+5(x_2-12)^2+x_3^4+3(x_4-11)^2+10x_5^6+7x_6^2+x_7^4-4x_6x_7-10x_6-8x_7$。

$$\text{Subject to:}\begin{cases}127-2x_1^2-3x_2^4-x_3-4x_4^2-5x_5\geqslant 0;282-7x_1-3x_2-10x_3^2-x_4+x_5\geqslant 0\\ 196-23x_1-3x_2^2-6x_6^2-8x_7\geqslant 0;-4x_1^2-x_2^2+3x_1x_2-2x_3^2-5x_6+11x_7\geqslant 0\\ -10\leqslant x_i\leqslant 10,i=1,2,\cdots,7\end{cases}$$

最优点 $x^*=(2.330\,49,1.951\,37,-0.477\,54,4.365\,72,-0.624\,48,1.038\,13,1.594\,22)$，最优值 $f^*=680.630$。

$G4$[2,6]：$\min f(t)=\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^4(x_i)-2\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i^2}}\right|$

$$\text{Subject to:}\begin{cases}0.75-\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant 0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-7.5n\leqslant 0\\ 0\leqslant x_i\leqslant 10(i=1,\cdots,n)\\ n=20\end{cases},$$

目前知道的最优值 $f^*=0.803\,619$。

表 1 新算法 CEEA 与文献[5]中算法的结果比较

函数	最优值	最好值		平均值		最差值	
		CEEA	文献[5]	CEEA	文献[5]	CEEA	文献[5]
$G1$	5 126.498	5 126.653	5 126.988	5169.213	5 179.163	5 322.462	5 379.227
$G2$	0.053 950	0.054 118	0.054 332	0.131545	0.145 269	0.348 721	0.387 152

表 2 新算法 CEEA 与文献[2]和文献[6]中算法的结果比较

函数	最优值	最好值			平均值			最差值		
		CEEA	文献[6]	文献[2]	CEEA	文献[6]	文献[2]	CEEA	文献[6]	文献[2]
$G3$	680.63	80.592 2	686.592 9	680.630 0	680.639 7	704.351 2	680.640 0	680.674 6	719.151 7	680.676 0
$G4$	0.803 619	0.803 235	0.801 158	0.802 760	0.789 893	0.370 697	0.777 458	0.765 752	0.678 203	0.731 220

5.2 模拟结果

记本文算法为 CEEA,种群规模 N=100,杂交概率 p_c=0.75,变异概率 p_m=0.05。对上述测试函数 $G1$,$G2$,每次独立运行 30 次,每次运行 500 代,记录所得函数最好值,函数值的平均值及函数的最差值,并和文献[5]中结果进行比较,结果见表 1。$G3$,$G4$ 维数较大,每次独立运行 50 次,每次运行 1 000 代,记录所得函数最好值,函数值的平均值,函数最差值,并与文献[2,6]中的方法得到的结果进行了比较,结果见表 2。从表 1 和 2 可以明显看出,本文算法 CEEA 与文献相比,求出问题最好值,最好值的平均值及函数的最差值均比文献中的要好。

6 结论

文章提出了一种解非线性规划问题极大熵多目标进化算法(CEEA),新方法从问题的约束函数出发构造了一个极大熵函数,并利用构造的新极大熵函数将问题转化成两个目标的多目标优化问题,并对转化后的优化问题设计了一种新的极大熵多目标进化算法。最后数据实验表明该算法对带约束的非线性规划问题求解是非常有效的。(收稿日期:2007 年 3 月)

参考文献:

[1] Deb K,Agrawal S.A niched-penalty approach for constraint handing in genetic algorithms[C]//Proc of the Inter Conf in Protozoa Slovenia,Artificial Neural Nets and Genetic Algorithms.New York: Springer Verlag,1999:235-243.

[2] Runarsson T P,Yao X.Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization[J].IEEE Trans on Evolutionary Computation,2000,4(3): 284-294.

[3] Michalewicz Z,Schoenauer M.Evolutionary algorithms for constraint parameter optimization problems[J].Evolutionary Computation,1996,4(1):1-32.

[4] Leung Yiu-Wing,Wang Yu-ping.An orthogonal genetic algorithm with quantization for global numerical optimization[J].IEEE Trans on Evolutionary Computation,2001,5(1):41-53.

[5] Meeura-Montes E,Coello Coello C A.A simple multimembered evolution strategy to solve constrained optimization problems[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation,2005,9(1):1-17.

[6] Sangameswar Venkatraman,Gary G.A generic framework for constrained optimization using genetic algorithms [J].IEEE Transaction on Evolutionary Computation,2005,9(4):423-435.

(上接 31 页)

次是脊波去噪(RT),平移不变小波去噪(RI+TI)次之,再次之是小波去噪(WT)。但是,随着噪声方差的不断增加,4 种不同去噪算法图像去噪后的 PSNR 值也逐渐下降。

6 结论

脊波变换对含直线奇异的光滑函数能够达到最优的非线性逼近阶,凭借其在线和超平面奇异表现上的良好特性,获得比小波更加稀疏的图像表示。平移不变的去噪算法利用多次对含噪图像平移去噪后求平均值的过程进一步改善了图像的去噪效果。而本文提出的基于平移不变的脊波变换算法则集中了以上两种算法的优点。因此,在获得良好的去噪效果的同时还能够更好的保留图像的细节信息。

值得注意的是,从图 1 中的图(e)可以看出,脊波变换在图像去噪后,重构图像出现了轻微的"划痕",如何减轻和消除这种"划痕"是一个值得研究的问题。由于文献[8]的脊波变换是有冗余的(冗余数为 4:1),变换后的系数比原信号需要更多的存储空间和时间,所以它并不适合于信号的压缩。

(收稿日期:2007 年 6 月)

参考文献:

[1] Candes E J.Ridgelet:theory and applications[D].Department of Statistics,Stanford University,1998.

[2] Candes E J,Donoho D L.Ridgelets:a key to higher-dimensional intermittency[J].Phil Trans R Soc Lond A,1999,357:2495-2509.

[3] Do M N,Vetterli M.The finite ridgelet transform for image representation[J].IEEE Trans on Image Processing,2003,12(1): 16-28.

[4] Averbuch A,Coifman R,Donoho D L,et al.Fast slant stack:a notion of radon transform for data in a cartesian grid which is rapidly computible,algebraically exact,geometrically faithful and invertible[J].SIAM J Sci Comp.

[5] Coifman R R,Donoho D L.Translation-invariant denoising[C]// Antoniadis A,Oppenheim G.Lecture Notes in Statistics: Wavelets and Statistics.Berlin,Germany:Springer-Verlag,1995.

[6] Beylkin G.Discrete Radon transform[J].IEEE Tans ASSP,1987,35(1):162-172.

[7] Donoho D L.Orthonormal ridgelet and linear singularities[J].SIAM Journal on Mathematical Analysis,2000,31(5):1062-1099.

[8] Donoho D L,Flesia A G.Digital ridgelet transform based on true ridge functions[EB/OL].http://www.stat.Stanford.edu/donoho/Report.

[9] Starck J L,Candes E J,Donoho D L.The curvelet transform for image denoising[J].IEEE Trans Image Processing,2002,11(6): 670-684.