弹性效用价格竞争博弈的纯策略寡占均衡

洪永发[1,2],徐　娟[1]
HONG Yong-fa[1,2],XU Juan[1]

1.同济大学 计算机科学与技术系,上海 200092
2.山东科技大学 信息科学与工程学院,山东 青岛 266510
1.Department of Computer Science and Technology,Tongji University,Shanghai 200092,China
2.College of Information Science and Engineering,Shandong University of Science and Technology,Qingdao,Shandong 266510,China
E-mail:hzycfl@126.com

HONG Yong-fa,XU Juan.Pure strategy oligopoly equilibrium of price competition game with elastic utility.Computer Engineering and Applications,2008,44(5):31-34.

Abstract: This paper discussed the price competition among multiple service providers in a parallel-path network with elastic traffic.The authors studied a model in which service provider owned the link in a network and set prices to maximize their profits,while the users had choosen the amount of flow to send and the routing of the flow according to Wardrop's principle. When utility function of users were concave and had concave first derivatives and the delay function was linear,the authors could prove the existence of pure strategy oligopoly equilibrium of price competition game among multiple service providers.
Key words: price competition game;equilibrium;oligopoly;elastic utility

摘　要:讨论了具有弹性效用的并行路径网络的多个服务提供商之间的价格竞争博弈问题。如果每个拥有链路的服务提供商的目的是设定使自己利润最大化的价格,而用户依据 Wardrop 原理选择自己的传输流量和传输路径。当每个用户的效用函数为凹函数且其一阶导数也是凹函数,网络链路的延迟函数为线性函数时,则证明了这种多个服务提供商之间的价格竞争博弈存在纯策略寡占均衡。
关键词:价格竞争博弈;均衡;寡占;弹性效用
文章编号:1002-8331(2008)05-0031-04　**文献标识码:**A　**中图分类号:**TP393

1　引言

目前,Internet 已经演化为一个复杂的巨系统,其不同层次的子网由不同的用户所拥有,而骨干网络一般也由不同的网络服务提供商所拥有。因此不同子网之间或不同网络服务提供商之间往往存在竞争或利益冲突。而博弈论作为使用严谨的数学模型研究冲突对抗条件下最优决策问题的理论[2],目前已经被广泛地应用到了通信网络的研究中。许多网络行为都可以被理解为某种博弈问题[2-10]。

由于在目前的网络中存在各种各样的网络服务提供商和各种类型的用户。网络服务提供商作为网络服务的提供者,其目的是使得自己的利润最大化。因此网络服务提供商之间是典型的非合作博弈关系。而网络用户在网络服务提供商给定服务价格的情况下,可以自主的选择服务的数量,其目的是使得自己的某种效用最大化。其中各种均衡的概念在这种非合作博弈关系的研究中起到了非常重要的作用。

文献[2,3,4]研究了并行链路网络的价格竞争博弈问题,给出了垄断均衡和寡占均衡的定义及均衡条件下的均衡价格特征,证明了在垄断均衡解与社会最优解之间的等价性。文献[3,4]分别证明了在保留效用和弹性效用函数的条件下,如果链路延迟函数为线性函数,则价格竞争博弈存在纯策略寡占均衡。更进一步的,文献[5]证明了在保留效用函数和链路延迟函数为线性函数的条件下,对于并行路径网络,其价格竞争博弈也存在纯策略寡占均衡。而本文的目的是要证明在弹性效用函数和;链路延迟函数的条件下,对于并行路径网络,其价格竞争博弈也存在纯策略寡占均衡。

2　模型及假设

本文考虑一类特殊拓扑结构的网络,此网络由一个源-目的对和连接此源-目的对的多条并行路径构成(见图 1)。

记 $I=\{1,2,\cdots,N\}$ 为并行路径的集合,$N_i=\{1,2,\cdots,n_i\}$ 为 i 路径上所有链路的集合,路径 i 所包含的链路数为 n_i。记 x_i 为路径 i 上的网络流量,$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_N]$ 为网络流量向量。网络中的每条链路都伴随一个基于流量的延迟函数 $l_j\ (x_i)(j\in N_i,i\in$

基金项目:上海市登山行动重点基础研究项目(No.06JC14065)。
作者简介:洪永发(1976-),男,博士研究生,讲师,研究方向为无限传感器网络,网络资源分配;徐娟(1973-),女,博士研究生,讲师,研究方向为无线通信,无线网络。
收稿日期:2007-09-14　修回日期:2007-11-30

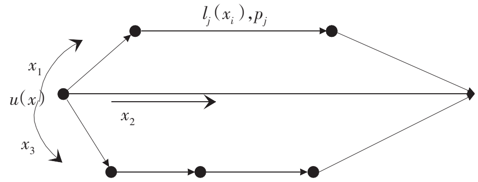

图1　三条并行路径连接一源-目的对的网络

I)和一个单位流量价格 $p_j(x_i)(j\in N_i,i\in I)$，记 $\boldsymbol{p}=[p_j]_{j\in N_i,i\in I}$ 为价格向量。链路延迟是由通信链路本身的特性所决定的，而单位流量价格往往是由提供该链路的服务提供商所设定。设用户的偏好可以用效用函数 $u\left(\sum_{i\in I}x_i\right)$来表示，其意义为当用户传输了 $\sum_{i\in I}x_i$ 的流量时的满足程度。本文假设网络的每条链路由不同的服务提供商所拥有，而服务提供商的目标是对自己所拥有的链路给出合适的单位流量价格以使得自己的利润最大化。由于用户可以选择不同的路径和不同的流量分配方式传输自己的流量，因此每个服务提供商的利润与其他服务提供商所设定的价格息息相关。在给定其他服务提供商单位流量价格向量 $\boldsymbol{p}_{-j}=[p_k]_{k\neq j}$ 的条件下，服务提供 j 商设定其拥有的链路的单位流量价格为 p_j 时，其所得利润为

$$\prod_j(p_j,p_{-j})=p_jx_i,j\in N_i$$

其中 x 为在价格向量 $\boldsymbol{p}=[p_j]_{j\in N_i,i\in I}$ 下用户在各条路径上的流量分配，下面将给出其具体的含义。

由于某一服务提供商的利润需依赖于其他服务提供商所给出的单位流量价格和用户的偏好。而网络流量也依赖于服务提供商所给出的单位流量价格和用户偏好，因此可以采用博弈论的框架来描述服务提供商之间的价格竞争。

类似于文献[4]，对用户的效用函数和链路的延迟函数做如下假设：

假设1

(1)对任意 $i\in I$，延迟函数 $l_i:[0,\infty)\to[0,\infty)$是严格增的、连续可微的凸函数，且满足 $l_i(0)=0$；

(2)效用函数 $u:[0,\infty)\to[0,\infty)$是非减、连续可微的凹函数，满足 $u(0)=0,u'(0)<\infty$，且存在 $d\geqslant 0$ 使得 $u(x)=u(d)=R$ 对任意的 $x\geqslant d$ 均成立；

(3)效用函数的导数 $u'_i:[0,d]\to[0,\infty)$是凹函数。

3　一些定义和引理

本文把使用并行路径网络的用户看成是无数个具有相同效用函数的微小用户的集合体，由于微小用户数目众多，因此不期望其行为会对网络性能即拥塞产生实质性影响，因此采用Wardrop原理来定义给定价格向量的流量分配，Wardrop原理在交通网络和通信网络的研究中已经得到了较为广泛的应用[2-9]。具体的，对并行路径网络，有下述Wardrop均衡的定义：

定义1　对一给定的价格向量 $\boldsymbol{p}\geqslant 0$，向量 $\boldsymbol{x}^{WE}\in R_+^I$如果满足

$$\boldsymbol{x}^{WE}\in\operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{x}\geqslant 0}\left\{u\left(\sum_{i\in I}x_i\right)-\sum_{j\in N_i}\left(l_j\left(x_i^{WE}\right)+p_j\right)x_i\right\}\tag{1}$$

则称 $\boldsymbol{x}^{WE}\in R_+^I$为一Wardrop均衡(WE)。记价格向量 $\boldsymbol{p}\geqslant 0$ 所对应的Wardrop均衡的集合为 $W(\boldsymbol{p})$。

由假设1及Wardrop均衡的定义，可得如下一向量 $\boldsymbol{x}^{WE}\in R_+^I$为Wardrop均衡的一个刻画结论，由于证明过程是显然的，本文省略其证明。

引理1　对一给定的价格向量 $\boldsymbol{p}\geqslant 0$，向量 $\boldsymbol{x}^{WE}\in R_+^I$为一Wardrop均衡当且仅当

$$\sum_{j\in N_i}\left(l_j\left(x_i^{WE}\right)+p_j\right)=u'\left(\sum_{j\in I}x_j^{WE}\right),\text{if } i\in\{i|x_i^{WE}>0\}$$

$$\sum_{j\in N_i}\left(l_j\left(x_i^{WE}\right)+p_j\right)\geqslant u'\left(\sum_{j\in I}x_j^{WE}\right),\forall i\in I$$

在假设1的条件下，下述引理不仅保证了对应于一价格向量的Wardrop均衡的存在性，并且是唯一的：

引理2　如果假设1条件满足，则对任意给定的价格向量 $\boldsymbol{p}\geqslant 0$，其所对应的Wardrop均衡点集合为单点集 $W(\boldsymbol{p})$，且 $W:R_+^I\to R_+^I$是连续的。

证明：对给定的价格向量 $\boldsymbol{p}\geqslant 0$，考察下列优化问题

$$\max_{\boldsymbol{x}\geqslant 0}\left\{u\left(\sum_{i\in I}x_i\right)-x_i\sum_{j\in N_i}p_j-\int_0^{x_i}\sum_{j\in N_i}l_j(z)\mathrm{d}z\right\}$$

有引理假设条件知上述优化问题的目标函数为凹函数，且可行集为凸集，因此上述优化问题的一阶最优性条件也是其最优性的充分条件。而其最优性条件与引理1给出的向量 $\boldsymbol{x}^{WE}\in R_+^I$为一Wardrop均衡的充分必要条件是一致的。因此 $\boldsymbol{x}^{WE}\in R_+^I$为一Wardrop均衡当且仅当其为上述优化问题的最优解。

上述优化问题的目标函数是连续函数，且可行集是紧集，因此优化问题存在最优解。此外由假设1对所有的 $i\in I,j\in N_i$，$l_j(\cdot)$为严格增函数，因此优化问题的目标函数为严格凸函数，因此其有唯一最优解。$W:R_+^I\to R_+^I$的连续连续性可由文献[11]中的最大值定理直接得出。证毕

有了Wardrop均衡的定义，就可以定义网络服务提供商在给定价格条件下其所得的利润。具体的有：在给定其他服务提供商单位流量价格向量 $\boldsymbol{p}_{-j}=[p_k]_{k\neq j}$，服务提供商 j 在设定其拥有的链路的单位流量价格为 p_j 时的利润为

$$\prod_j(p_j,p_{-j})=p_jx_i,j\in N_i$$

其中 $\boldsymbol{x}\in W(p_j,p_{-j})$为给定价格向量下的Wardrop均衡流量。

为了刻画网络服务提供商之间的非合作价格竞争行为，给出寡占均衡的定义：

定义2　向量$(\boldsymbol{p}^{OE},\boldsymbol{x}^{OE})\geqslant 0$ 如果满足 $\boldsymbol{x}^{OE}\in W(p_i^{OE},\boldsymbol{p}_{-i}^{OE})$，$\prod_i(p_i^{OE},\boldsymbol{p}_{-i}^{OE},\boldsymbol{x}^{OE})\geqslant\prod_i(p_i,\boldsymbol{p}_{-i}^{OE},\boldsymbol{x})$，$\forall p_i\geqslant 0,\boldsymbol{x}\in W(p_i,\boldsymbol{p}_{-i}^{OE})$，则称$(\boldsymbol{p}^{OE},\boldsymbol{x}^{OE})\geqslant 0$ 为一纯策略寡占均衡，$\boldsymbol{p}^{OE}$为寡占价格。

下面引理表明，在纯策略寡占均衡的条件下，如果一个网络服务提供商所得利润为正，则所有网络服务提供商也将取得正的利润。

引理3　设假设1条件满足，且$(\boldsymbol{p}^{OE},\boldsymbol{x}^{OE})\geqslant 0$ 为一纯策略寡占均衡，且存在 $i\in I,j\in N_i$ 使得 $p_j^{OE}x_i^{OE}>0$。则对任意 $i\in I,j\in N_i$ 均有 $p_j^{OE}x_i^{OE}>0$。

证明　假设存在 $\bar{i}\in I,\bar{j}\in N_{\bar{i}}$ 使得 $p_{\bar{j}}^{OE}x_{\bar{i}}^{OE}=0$，下面分两种情况考虑：

如果 $\bar{i}=i$，因为 $p_{\bar{j}}^{OE}x_{\bar{i}}^{OE}>0$，所以 $x_{\bar{i}}^{OE}>0$。因此必然有 $p_{\bar{j}}^{OE}=0$。对充分小的正数 $\varepsilon>0$，定义 $\tilde{p}_{\bar{j}}=\varepsilon>0$，则对价格向量 $(\tilde{p}_{\bar{j}},\boldsymbol{p}_{-\bar{j}}^{OE})$ 及任意的 $\tilde{\boldsymbol{x}}\in w(\tilde{p}_{\bar{j}},\boldsymbol{p}_{-\bar{j}}^{OE})$，由引理 2 可知 $\tilde{x}_{\bar{i}}>0$。因此对提供链路 $\bar{j}$ 的服务提供商而言，其将对链路 $\bar{j}$ 定价 $\tilde{p}_{\bar{j}}=\varepsilon>0$，从而取得正的利润。这与 $(\boldsymbol{p}^{OE},\boldsymbol{x}^{OE})\geqslant 0$ 为一纯策略寡占均衡矛盾。

如果 $\bar{i}\neq i$，定义 $K_i=\sum_{j\in N_i}(p_j+l_j(x_i))$，$K_{\bar{i}}=\sum_{j\in N_{\bar{i}}}(p_j+l_j(x_{\bar{i}}))$。如果 $x_{\bar{i}}^{OE}=0$，则对充分小的正数 $\varepsilon>0$ 定义 $\tilde{p}_{\bar{j}}=\dfrac{K_i-\varepsilon}{|N_{\bar{i}}|}>0, j\in N_{\bar{i}}$，则由引理 2 可知 $\tilde{x}_{\bar{i}}>0$。因此对提供链路 $\bar{j}$ 的服务提供商而言，其将对链路 $\bar{j}$ 定价 $\dfrac{K_i-\varepsilon}{|N_{\bar{i}}|}$，从而取得正的利润。这与 $(\boldsymbol{p}^{OE},\boldsymbol{x}^{OE})\geqslant 0$ 为一纯策略寡占均衡矛盾；如果 $x_{\bar{i}}^{OE}>0$，则必然有 $p_{\bar{j}}^{OE}=0$。对充分小的正数 $\varepsilon>0$，定义 $\tilde{p}_{\bar{j}}=\varepsilon>0$，则对价格向量 $(\tilde{p}_{\bar{j}},\boldsymbol{p}_{-\bar{j}}^{OE})$ 及任意的 $\tilde{\boldsymbol{x}}\in W(\tilde{p}_{\bar{j}},\boldsymbol{p}_{-\bar{j}}^{OE})$，由引理 2 可知 $\tilde{x}_{\bar{i}}>0$。因此对提供链路 $\bar{j}$ 的服务提供商而言，其将对链路 $\bar{j}$ 定价 $\tilde{p}_{\bar{j}}=\varepsilon>0$，从而取得正的利润。这与 $(\boldsymbol{p}^{OE},\boldsymbol{x}^{OE})\geqslant 0$ 为一纯策略寡占均衡矛盾。因此对任意 $i\in I,j\in N_i$ 均有 $p_j^{OE}x_i^{OE}>0$。证毕

4　价格竞争博弈的纯策略寡占均衡存在性定理

首先给出在寡占均衡条件下，各网络服务提供商所给价格的特征刻画，其在价格竞争博弈纯策略寡占均衡的证明中起到重要作用。

定理 1　设假设条件 1 满足，且 $(\boldsymbol{p}^{OE},\boldsymbol{x}^{OE})$ 为一个寡占均衡，且存在 $i\in I,j\in N_i$ 使得 $p_j^{OE}x_i^{OE}>0$。则对任意的 $i\in I,j\in N_i$，成立

$$p_j^{OE}=\begin{cases} x_i^{OE}\sum_{k\in N_i}l_k'(x_i^{OE}),\text{如果 } u''\left(\sum_{j\in I}x_j^{OE}\right)=0 \\ x_i^{OE}\sum_{k\in N_i}l_k'(x_i^{OE})+\dfrac{x_i^{OE}}{\sum_{s\neq i}\left(\dfrac{1}{\sum_{k\in N_s}l_k'(x_s^{OE})}\right)-\dfrac{1}{u''\left(\sum_{i\in I}x_i^{OE}\right)}},\text{其它}\end{cases}$$

其中 $u''\left(\sum_{j\in I}x_j^{OE}\right)$ 为函数 u' 在点 $\sum_{j\in I}x_j^{OE}$ 的次梯度。

证明：由假设条件存在 $i\in I,j\in N_i$ 使得 $p_j^{OE}x_i^{OE}>0$，因此由引理 3 可知，对任意 $i\in I,j\in N_i$，均有 $p_j^{OE}x_i^{OE}>0$ 成立。由 Wadrop 均衡的定义可知，对任意 $i\in I,j\in N_i$，$(p_j^{OE},\boldsymbol{x}^{OE})$ 为下列优化问题的最优解：

$$\max_{p_j,\boldsymbol{x}\geqslant 0}\ p_jx_i$$

$$\text{s.t. } p_j+\sum_{\substack{k\in N_i\\k\neq j}}p_k^{OE}+\sum_{k\in N_i}l_k(x_i)=\sum_{k\in N_s}(p_k^{OE}+l_k(x_s)),\ \forall s\neq i$$

$$p_j+\sum_{\substack{k\in N_i\\k\neq j}}p_k^{OE}+\sum_{k\in N_i}l_k(x_i)=u'\left(\sum_{i\in I}x_i\right)$$

上述优化问题的 Lagrangian 函数为

$$L(p_j,x,\lambda,\mu)=p_jx_i-\mu\left(p_j+\sum_{\substack{k\in N_i\\k\neq j}}p_k^{OE}+\sum_{k\in N_i}l_k(x_i)-u'\left(\sum_{i\in I}x_i\right)\right)-\sum_{s\neq i}\lambda_s\left(p_j+\sum_{\substack{k\in N_i\\k\neq j}}p_k^{OE}+\sum_{k\in N_i}l_k(x_i)-\sum_{k\in N_s}(p_k^{OE}+l_k(x_s))\right)$$

其中 λ_j,μ 分别为对应约束条件的 Lagrange 乘子。因此上述优化问题的一阶最优条件为 $x_i^{OE}-\sum_{k\neq i}\lambda_k-\mu=0$，$p_j^{OE}-\sum_{k\neq i}\lambda_k\left(\sum_{k\in N_i}l_k'(x_i^{OE})\right)-\mu\sum_{k\in N_i}l_k'(x_i^{OE})+\mu u''\left(\sum_{i\in I}x_i^{OE}\right)=0$，$\lambda_s\sum_{k\in N_s}l_k'(x_i^{OE})+\mu u''\left(\sum_{i\in I}x_i^{OE}\right)=0$，其中 $u''\left(\sum_{i\in I}x_i^{OE}\right)$ 为凹函数 $u'\left(\sum_{i\in I}x_i^{OE}\right)$ 在 $\sum_{i\in I}x_i^{OE}$ 的次梯度。

如果 $u''\left(\sum_{i\in I}x_i^{OE}\right)=0$，则由上述方程可得 $p_j^{OE}=x_i^{OE}\sum_{k\in N_i}l_k'(x_i^{OE})$。

如果 $u''\left(\sum_{i\in I}x_i^{OE}\right)<0$，则解上述方程可得

$$\mu=\frac{x_i^{OE}}{1-\sum_{s\neq i}\left(\dfrac{u''\left(\sum_{i\in I}x_i^{OE}\right)}{\sum_{k\in N_s}l_k'(x_s^{OE})}\right)}=\frac{\dfrac{x_i^{OE}}{u''\left(\sum_{i\in I}x_i^{OE}\right)}}{\dfrac{1}{u''\left(\sum_{i\in I}x_i^{OE}\right)}-\sum_{s\neq i}\left(\dfrac{1}{\sum_{k\in N_s}l_k'(x_s^{OE})}\right)}$$

由此得

$$p_j^{OE}=\frac{x_i^{OE}}{\sum_{s\neq i}\left(\dfrac{1}{\sum_{k\in N_s}l_k'(x_s^{OE})}\right)-\dfrac{1}{u''\left(\sum_{i\in I}x_i^{OE}\right)}}+x_i^{OE}\sum_{k\in N_i}l_k'(x_i^{OE}),$$

$\forall j\in N_i$　　证毕

在假设 1 的条件下，虽然对应于任意的价格向量的 Wardrop 均衡均存在且唯一，却并不能保证本文所讨论的价格竞争博弈存在纯策略寡占均衡。下述结论表明如果延迟函数为线性函数，这价格竞争博弈一定存在纯策略寡占均衡：

定理 2　设假设 1 条件满足，且延迟函数为线性函数，即延迟函数具有形式 $l_j(x)=a_jx(a_j>0)$，则价格竞争博弈存在纯策略寡占均衡。

证明：类似于文献[6]中命题 3 的证明方法，设 $B_j(\boldsymbol{p}_{-j}^*)$ 为满足 $(p_j^*,\bar{\boldsymbol{x}})\in\arg\max_{\substack{p_j\geqslant 0\\ \boldsymbol{x}\in W(p_j,\boldsymbol{p}_{-j})}}p_jx_i$ 的 p_j^* 的集合，记 $B(\boldsymbol{p}^*)=[B_j(\boldsymbol{p}_{-j}^*)]$ 为其笛卡尔积。则 $B(\boldsymbol{p}^*)$ 的不动点为满足 $\boldsymbol{p}^*\in B(\boldsymbol{p}^*)$ 的 $\boldsymbol{p}^*$，这样对每一个服务提供商 j 有 $p_j^*\in B_j(\boldsymbol{p}_{-j}^*)$，从而其不动点就是寡占均衡。根据角谷不动点定理，以下是 $B(\boldsymbol{p}^*)$ 具有不动点的充分条件：

（1）为有限维欧式空间的非空、紧的凸子集；

（2）对任意 $\boldsymbol{p}^*\geqslant 0$，$B(\boldsymbol{p}^*)$ 非空；

(3)对任意 $\boldsymbol{p}^*\geqslant 0$,$B(\boldsymbol{p}^*)$为凸的;

(4)$B(\boldsymbol{p}^*)$是上半连续的。

下面将逐条验证角谷(Kakutani)不动点定理的条件满足:

由假设 1 可知条件 1 显然满足。

由文献[11]中的最大值定理可知 $B(\boldsymbol{p}^*)$为一上半连续映射。所以条件(4)满足。

由于延迟函数具有形式 $l_j(x)=a_jx_i(a_j>0)$,所以其为严格增函数。由引理 2 知,对任意给定的价格向量 $\boldsymbol{p}\geqslant 0$,其所对应的 Wardrop 均衡点集合 $W(\boldsymbol{p})$为单点集。因此任意 $\boldsymbol{p}^*\geqslant 0$,$B(\boldsymbol{p}^*)$为非空的。所以条件(2)满足。

下面将证明条件(3)也满足,即对任意 $\boldsymbol{p}^*\geqslant 0$,$B(\boldsymbol{p}^*)$为凸的。

设 $p_j\in B_j(\boldsymbol{p}^*_{-j})$和$\bar{p}_j\in B_j(\boldsymbol{p}^*_{-j})$,$\boldsymbol{x}\in W(p_j,\boldsymbol{p}^*_{-j})$,$\bar{\boldsymbol{x}}\in W(\bar{p}_j,\boldsymbol{p}^*_{-j})$。因此$(p_j,\boldsymbol{x})$和$(\bar{p}_j,\bar{\boldsymbol{x}})$必然满足$(p_j,\boldsymbol{x})\in\arg\max\limits_{\substack{p_j\geqslant 0\\ \boldsymbol{x}\in W(p_j,\boldsymbol{p}_{-j})}} p_jx_i$,

$(\bar{p}_j,\bar{\boldsymbol{x}})=\arg\max\limits_{\substack{p_j\geqslant 0\\ \bar{\boldsymbol{x}}\in W(p_j,\boldsymbol{p}_{-j})}} p_j\bar{x}_i$。

由于 $p_j\in B_j(\boldsymbol{p}^*_{-j})$和$\bar{p}_j\in B_j(\boldsymbol{p}^*_{-j})$,根据其定义,则必然有 $p_jx_i=\bar{p}_j\bar{x}_i$,下面分两种情况来讨论:

(1)如果 $p_jx_i=\bar{p}_j\bar{x}_i=0,j\in N_i$,则显然有 $\gamma p_i+(1-\gamma)\bar{p}_i\in B_i(p^*_{-i})$,$\forall\gamma\in[0,1]$。

(2)如果 $p_jx_i=\bar{p}_j\bar{x}_i>0,j\in N_i$,将用反证法证明有 $p_j=\bar{p}_j$成立。不失一般性,假设 $p_j>\bar{p}_j$,因为 $p_jx_i=\bar{p}_j\bar{x}_i>0$,则有 $x_i<\bar{x}_i$成立。

如果 $p_j+\sum\limits_{\substack{k\in N_i\\ k\neq j}}p^*_k+\sum\limits_{k\in N_i}a_kx_i<\bar{p}_j+\sum\limits_{\substack{k\in N_i\\ k\neq j}}p^*_k+\sum\limits_{k\in N_i}a_k\bar{x}_i$,则由于 $x_i>0$,$\bar{x}_i>0$,由引理 1 可得 $\sum\limits_{i\in I}x_i\geqslant\sum\limits_{i\in I}\bar{x}_i$。

另一方面,对任意的 $l\in\{l|l\neq i,x_l>0,l\in I\}$,由于

$$p_j+\sum_{\substack{k\in N_i\\ k\neq j}}p^*_k+\sum_{k\in N_i}a_kx_i<\bar{p}_j+\sum_{\substack{k\in N_i\\ k\neq j}}p^*_k+\sum_{k\in N_i}a_k\bar{x}_i$$

由引理 1 可知

$$p_m+\sum_{\substack{n\in N_l\\ n\neq m}}p^{OE}_n+\sum_{k\in N_l}a_kx_l=u'(\sum_{k\in l}x_k)<u'(\sum_{k\in l}\bar{x}_k)\leqslant\bar{p}_m+\sum_{\substack{n\in N_l\\ n\neq m}}p^{OE}_n+\sum_{k\in l}a_k\bar{x}_l$$

因此有对所有的 $l\neq i$ 有 $x_l\leqslant\bar{x}_l$,结合 $x_i\leqslant\bar{x}_i$,可知$\sum\limits_{i\in I}x_i<\sum\limits_{i\in I}\bar{x}_i$。这与$\sum\limits_{i\in I}x_i\geqslant\sum\limits_{i\in I}\bar{x}_i$矛盾。

如果 $p_j+\sum\limits_{\substack{k\in N_i\\ k\neq j}}p^*_k+\sum\limits_{k\in N_i}a_kx_i\geqslant\bar{p}_j+\sum\limits_{\substack{k\in N_i\\ k\neq j}}p^*_k+\sum\limits_{k\in N_i}a_k\bar{x}_i$。由引理 1 可知 $u'(\sum\limits_{i\in I}x_i)<u'(\sum\limits_{i\in I}\bar{x}_i)$。由于 $u':[0,\infty)\to[0,\infty)$是凹函数,所以有$\sum\limits_{i\in I}x_i\leqslant\sum\limits_{i\in I}\bar{x}_i$。另一方面,由于效用函数的导数 $u':[0,d)\to[0,\infty)$也是凹函数,所以 $u''(\sum\limits_{i\in I}x_i)\geqslant u''(\sum\limits_{i\in I}\bar{x}_i)$。

由定理 1,可知对线性链路延迟函数有

$$p_j=x_i\sum_{k\in N_i}a_k+\frac{x_i}{\sum\limits_{s\neq i}\left(\frac{1}{\sum\limits_{k\in N_s}a_k}\right)-\frac{1}{u''(\sum\limits_{i\in I}x_i)}}$$

$$\bar{p}_j=\bar{x}_i\sum_{k\in N_i}a_k+\frac{\bar{x}_i}{\sum\limits_{s\neq i}\left(\frac{1}{\sum\limits_{k\in N_s}a_k}\right)-\frac{1}{u''(\sum\limits_{i\in I}\bar{x}_i)}}$$

因此可得 $p_j<\bar{p}_j$,这与 $p_j>\bar{p}_j$相矛盾。

因此如果 $p_jx_i=\bar{p}_j\bar{x}_i>0,j\in N_i$,则必有 $p_j=\bar{p}_j$成立。所以条件 3 也满足,即对任意 $\boldsymbol{p}^*\geqslant 0$,$B(\boldsymbol{p}^*)$为凸的。

因此由角谷不动点定理可知 $B(\boldsymbol{p}^*)$存在不动点,即存在 $\boldsymbol{p}^*$使得 $\boldsymbol{p}^*\in B(\boldsymbol{p}^*)$。

延迟函数具有形式 $l_j(x)=a_jx_i(a_j>0)$,所以其为严格增函数。由引理 2 知,对任意给定的价格向量 $\boldsymbol{p}\geqslant 0$,其所对应的 Wardrop 均衡点集合 $W(\boldsymbol{p})$为单点集,所以$(\boldsymbol{p}^*,W(\boldsymbol{p}^*))$即为一纯策略寡占均衡。证毕。

5　结束语

本文证明在用户的效用函数 $u:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是非减、连续可微的凹函数,满足 $u(0)=0$,$u'(0)<\infty$,且存在 $d\geqslant 0$ 使得 $u(x)=u(d)=R$ 对任意的 $x\geqslant d$ 均成立,且其一阶导数 $u':[0,d]\to[0,\infty)$是凹函数,并且链路延迟函数为线性函数的条件下,对于并行路径网络,证明了其价格竞争博弈存在纯策略寡占均衡。

进一步的工作包括研究具有弹性效用函数的价格竞争博弈的效率损失分析及一般网络拓扑结构下具有保留效用或弹性效用函数的价格竞争博弈的纯策略寡占均衡的存在性及其效率分析。同时相应价格竞争博弈的混合策略寡占均衡的存在性及其效率分析也是一个重要的研究方面。

参考文献:

[1] Fudenberg D,Tirole J.Game theory[M].[S.l.]:The MIT Press,1991.

[2] Acemoglu D,Ozdaglar A.Flow control,routing,and performance from service provider viewpoint,WP-1696[R].2004-09.

[3] Acemoglu D,Ozdaglar A.Competition and efficiency in congested markets[J].Mathematics of Operations Research,2007,32(1):1-31.

[4] Ozdaglar A.Price competition with elastic traffic networks[EB/OL].[2006].http://web.mit.edu/asuman/www/documents/Elastic_revision.pdf.

[5] Acemoglu D,Ozdaglar A.Price competition in communication networks[C]//Proceedings of INFOCOM,April 23-29,2006,Barcelona,Spain.

[6] Acemoglu D,Ozdaglar A.Competition in parallel-serial networks[J].IEEE Journal on Selected Areas in Communications,2007,26(6):1180-1192.

(下转 63 页)