

研究简报

参数不确定非线性系统切换控制

石陇辉, 李晓理, 李 骥

(北京科技大学信息工程学院自动化系, 北京 100083)

关键词: 非线性系统; 滑模; 变结构; 切换

中图分类号: TP 273

文献标识码: A

文章编号: 0438-1157 (2008) 07-1843-05

Switching control of nonlinear system with uncertain parameters

SHI Longhui, LI Xiaoli, LI Ji

(Department of Automation, School of Information Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Based on the scope of change of parameters, multiple sliding mode variable structure controllers were designed for a kind of nonlinear system with uncertain parameters. A switching controller was formed with a given index switching function. Under the guarantee of Lyapunov stability, the controller of system would be switched among multiple sliding mode variable structure controllers according to the switching condition. The mechanism of switching could improve the transient response greatly. A robotic arm was studied as a nonlinear system. Multiple sliding mode variable structure controllers were set up according to the dynamic equation of the robotic arm. An index switching function based on output error was given for the design of switching controller of the robotic arm. To test the effectiveness of the switching controller, four simulation examples according to different scopes of parameter change were investigated. From the simulation, it was concluded that the switching controller could enhance the control performance greatly.

Key words: nonlinear system; sliding mode; variable structure; switching

引 言

对于含有不确定参数的被控对象, 自适应控制是一种很好的方法, 其在线性系统中已经有了很多成功应用的范例^[1]。但是, 对于非线性系统自适应控制器的设计还没有统一的方案, 这是由于非线性系统的复杂性造成的。近些年来, 针对一些特殊的

非线性系统, 例如“参数-严格-反馈”形式的非线性系统, 已经有相应的自适应控制器设计方案^[2]; 同时, 神经网络也被大量应用在线性系统的控制器设计当中, 并取得了一定的成果^[3-4]。

近些年来, 多模型自适应控制、切换控制已经作为一种新型的智能控制器逐渐引起人们的重视, 而且对于此类控制器研究逐渐从线性系统^[5-7]

2008-04-11 收到初稿, 2008-04-30 收到修改稿。

联系人: 李晓理。第一作者: 石陇辉 (1985-), 男, 硕士研究生。

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60604002); 北京市科技新星计划项目 (2006B23); 北京市教委共建重点学科项目 (xk100080537)。

Received date: 2008-04-11.

Corresponding author: LI Xiaoli. E-mail: lixiaoli@hotmail.com

Foundation item: supported by the National Natural Science Foundation of China (60604002); Beijing Nova Program (2006B23) and the Key Discipline Project of Beijing Municipal Commission of Education (xk100080537).

推广到非线性系统^[8-9]，并对控制器的收敛性^[10]和鲁棒性^[11-15]进行认真的分析。它主要是针对被控对象参数变化的不确定范围设计多个控制器，并且基于一个给定的指标切换，使得被控对象的控制器在多个预先设定的控制器之间进行切换，并且可以保证闭环系统的稳定性。

滑模变结构控制也可以认为是切换控制器的一种，尤其是对非线性系统来说，它是一种更为有效的控制方式。本文基于文献 [3]，考虑了一类具有不确定控制增益的非线性系统的控制器设计。利用滑模变结构控制理论，根据控制增益下界的变化范围，设计多个控制器。在保证闭环系统 Lyapunov 稳定的条件下，使得被控对象的控制器在多个预先设定的控制器之间相互切换。通过仿真研究可以看出，文中给出的控制器可以极大地改善被控系统的瞬态响应。

1 问题描述及控制器设计

考虑如下非线性系统^[4]

$$x^{(n)}(t) + f[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)] = b[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]u(t) \quad (1)$$

其中， $u(t)$ 、 $x(t)$ 分别为输入、输出变量， $f(\cdot)$ 和 $b(\cdot)$ 为未知非线性函数。系统 (1) 满足如下假设条件：

① $f[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]$ 满足

$$f[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)] < f_0[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)] \quad (2)$$

其中， $f_0[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]$ 为一确定的正值函数；

② $b[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]$ 满足 $b(\cdot) > 0$ ，且

$$b[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)] > b_1[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)] \quad (3)$$

其中， $b_1[x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]$ 为一确定的正值函数。

将系统 (1) 用如下的状态方程表示

$$\dot{X} = AX + Bu + F \quad (4)$$

其中

$$X = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = [0, \dots, b(X)]^T, F = [0, \dots, -f(X)]^T$$

并给定如下参考输出模型

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m r(t) \quad (5)$$

式中 $X_m = [x_m, \dot{x}_m, \dots, x_m^{(n-1)}]^T$ ， A_m 和 B_m 为已知矩阵， $r(t)$ 为参考模型输入。

定义输出跟踪误差 $e = x - x_m$ ，且有误差向量

$$e(t) = X - X_m = [\epsilon, \dot{\epsilon}, \dots, \epsilon^{(n-1)}]^T \quad (6)$$

其中， $\epsilon^{(k)} = x^{(k)} - x_m^{(k)}$ ($k = 0, \dots, n-1$)。由式 (4) ~ 式 (6) 可以得出误差动态方程为

$$\dot{e} = Ae + (A - A_m)X_m + F - B_m r + Bu \quad (7)$$

为了进一步的分析，定义变量 s 满足

$$s = Ce \quad (8)$$

其中，矩阵 $C = [c_1, \dots, c_n]$ 可以使多项式 Ce 的零点位于复平面的左边平面。若 $b_1(X)$ 和 $f_0(X)$ 已知，则可得如下滑模变结构控制器。

定理 1^[3]：考虑非线性系统 (1) 的动态误差式 (7)，如下滑模变结构控制器

$$u = -\frac{\text{sign}(s)}{c_n b_1(X)} [|CAe| + |C(A - A_m)X_m| + c_n f_0(X) + |CB_m r|] \quad (9)$$

可使输出跟踪误差渐近收敛到 0，并保证闭环系统是 Lyapunov 稳定的。

2 切换控制器设计及仿真

对于文中的控制器，参数 $f(x)$ 和 $b(x)$ 的不确定范围都会使最终的控制结果发生一定的变化。考虑到篇幅的限制，在这里主要讨论 $b(x)$ 以及其下界 $b_1(x)$ 的变化范围以及它们对控制品质产生的影响。

在上面的控制器设计过程中，如果 $b(x)$ 的下界 $b_1(x)$ 不确定，会产生如下问题：若 $b_1(x)$ 取值过大，甚至 $b_1(x) > b(x)$ ，可能会导致闭环系统的不稳定；若 $b_1(x) < b(x)$ ，但 $b_1(x)$ 取值仍然比较大，这样会使控制输入的幅值过小，导致系统的瞬态响应比较差。所以考虑在保证 $b(x) > b_1(x)$ 的条件下，适当减小 $b_1(x)$ 的值，可能会增大控制器的作用，使系统输出的瞬态响应变好，保证系统输出的跟踪误差在初始阶段不会有比较大的波动。

基于这种思想，利用不同 $b_i'(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，根据式 (9) 设计了多个控制器 u_i ($i = 1, 2, \dots, n$)，并考察输出误差的变化，使被控对象控制器在 u_1, u_2, \dots, u_n 之间进行切换，直到控制品质达到要求。

下面仍以文献 [3] 中刚体机械手为研究对象。

其动力学方程为

$$ml^2\ddot{q} + \dot{d}q + mgl\cos(q) = u \quad (10)$$

式中 m 为机械手的质量； l 为其长度； q 是它与初始位置间的夹角，且满足 $\dot{q}(0) = 0$ ， $q(0) = 0.1$ 。

将式 (10) 写成如下状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(ml^2)^{-1}\dot{d}q - gl^{-1}\cos(q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (ml^2)^{-1} \end{bmatrix} u \quad (11)$$

跟踪的参考模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \ddot{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ \dot{q}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (12)$$

且有 $[q_r(0) \quad \dot{q}_r(0)]^T = [0 \quad 0]^T$ ， $r(t) = 100$ 。

对照式 (1) ~ 式 (6) 可以得出

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b(q) \end{bmatrix}, A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix},$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, X_m = \begin{bmatrix} q_r \\ \dot{q}_r \end{bmatrix},$$

$$b(q) = (ml^2)^{-1}, f(q) = (ml^2)^{-1}\dot{d}q + gl^{-1}\cos(q)$$

假设 $d=1$ ， $gl^{-1}=1$ ，则

$$f(q) = b(q)\dot{q} + \cos(q) \quad (13)$$

设 $b(q)$ 最大值为 b_{\max} ，则有 $f_0(q) = b_{\max}|\dot{q}| + 1$ ，这样就能按照式 (9) 来设计控制器。

通过多次离线仿真可以看出，系统输出在正方向上的跟踪误差主要是由于 q 和 q_r 的初始值不同而造成的，因而在不同情况下，正向的误差曲线变化并不大。而针对不同的 $b_1(q)$ ，误差在负向上有比较显著的不同。所以在保证 Lyapunov 函数的导数小于零的条件下，在负向上对误差进行限制 [保证 $e(t) > -0.02$]，并以此作为切换准则函数，不断变化 $b_1(q)$ 的值，使控制器不断切换，直至控制品质达到要求。

考虑如式 (10) 描述的被控对象，其中 $b(q) \in [100 \quad 200]$ ，在下面的仿真研究中，取 $b(q)=200$ ， $b_{\max}=200$ ，且分别取下界 $b_1(q)$ 为 200、150、100，研究控制品质，仿真结果见图 1~图 4。

图 1~图 3 分别是 $b_1(q)$ 等于 200、150、100 时跟踪误差的变化曲线，图 4 则是以 $e(t) > -0.02$ 作为条件， $b_1(q)$ 从 200 切换到 150 再切换到 100 时误差的变化。

由图 1~图 4 可以看出，当 $b_1(q)$ 的值为 200 和 150 时，尽管最终误差可以趋近于 0，但误差曲线在负方向上的振荡比较大，瞬态响应非常不好。而 $b_1(q) = 100$ 时，误差曲线在负方向有了明显的

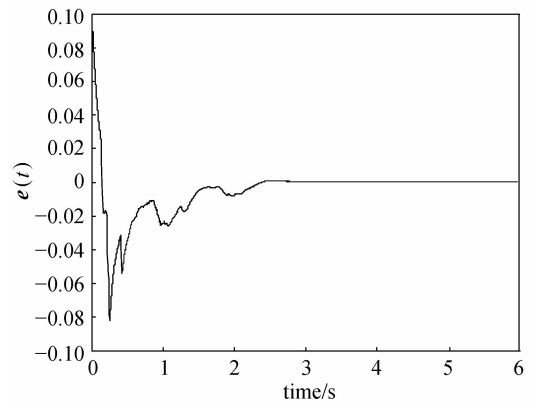


图 1 $b_1(q) = 200$ 时的误差曲线

Fig. 1 Output error with $b_1(q) = 200$

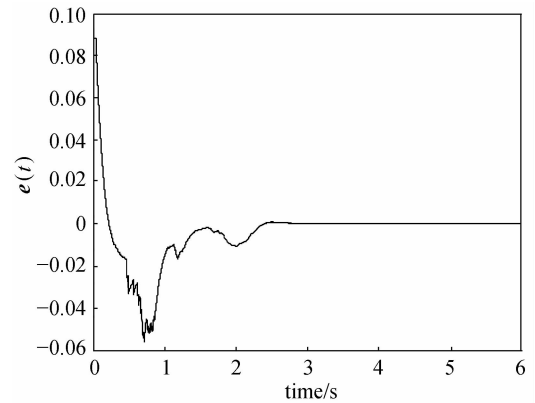


图 2 $b_1(q) = 150$ 时的误差曲线

Fig. 2 Output error with $b_1(q) = 150$

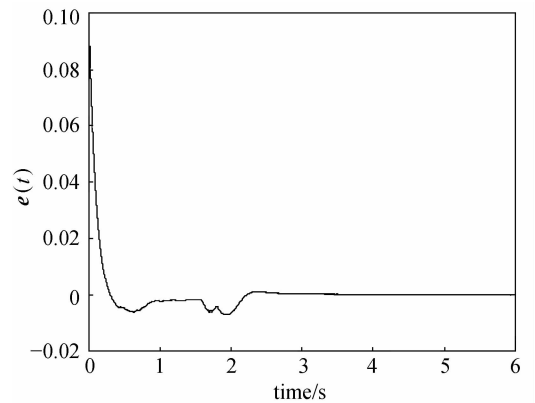


图 3 $b_1(q) = 100$ 时的误差曲线

Fig. 3 Output error with $b_1(q) = 100$

变化。因此，可以引入切换函数，以 $e(t) > -0.02$ 作为条件，对 $b_1(q)$ 值不断调整，使其从 200 切换到 150 再切换到 100。这样可以明显看出，引入切换机制后，系统在负方向上误差曲线较不进行切换的情况有比较大的改变，瞬态响应得到改善。

另外，在仿真中发现， $b_1(q)$ 的值并不是取得

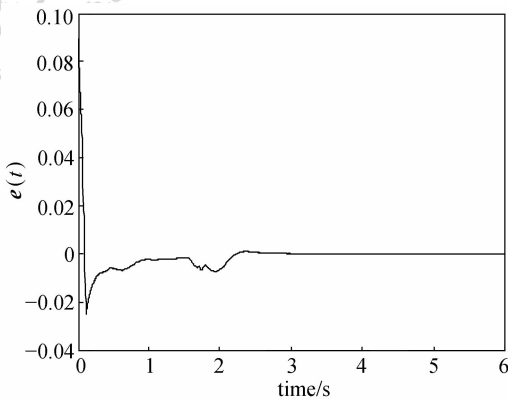


图 4 $b_1(q)$ 从 200 切换到 150 再到 100 时的误差曲线

Fig. 4 Output error with $b_1(q)$ switching among 200, 150 and 100

越小越好。当 $b_1(q)$ 的值取得过小时，导致控制量 u 的幅值激增，不仅会使计算速度非常缓慢，而且会引起误差曲线的振荡，对输出曲线控制效果的影响也不是非常显著。根据多次仿真的结果可以发现， $b_1(q) = 100$ 是一种比较理想的选择。

针对参数不确定系统，设计多个元素模型控制器，通过引入切换函数构成多模型控制器可以解决复杂系统的控制问题。一般可以采用如下几种切换准则。

(1) 根据 Lyapunov 函数导数的符号来进行判断。当 Lyapunov 函数的导数大于 0 时，闭环系统的状态变量是发散的。这时，可以不断切换到下一个元素模型控制器，直到 Lyapunov 函数的导数小于 0，从而使得闭环系统趋于稳定。

(2) 根据输出误差的变化情况进行判断，以此设定切换函数，根据这个切换函数的大小对控制器进行切换。这种切换方法见文献 [5, 7]，这种方法多出现于线性系统，但对于非线性系统仍可以借鉴^[8-9]，关键是稳定性必须保证。

3 结 论

本文针对一类具有不确定性参数的非线性系统，利用滑模变结构控制的理论，根据控制增益下界的变化范围，设计多个滑模变结构控制器。在保证闭环系统 Lyapunov 稳定的前提下，以系统的输出误差作为切换函数，设计切换控制器，极大地改善瞬态响应。仅对非线性系统切换控制器的研究做了一点尝试，并通过仿真说明控制算法的有效性。当然，非线性系统切换控制还有很多问题需进一步探讨，如稳定性分析、切换函数的选择等，这都有

待于在今后的工作中进行深入的研究。

符 号 说 明

- A ——非线性系统状态空间状态矩阵
- A_m ——参考模型状态矩阵
- B ——非线性系统状态空间控制矩阵
- B_m ——参考模型控制矩阵
- $b(\cdot)$ ——非线性系统控制增益
- $b_1(\cdot)$ —— $b(\cdot)$ 的下界
- d ——轴间的摩擦系数
- $e(t)$ ——误差向量
- $f(\cdot)$ ——非线性系统中未知非线性函数
- $f_0(\cdot)$ —— $f(\cdot)$ 的上界
- l ——机械手的长度
- m ——机械手的质量
- q ——机械手与初始位置的夹角
- q_r ——机械手需要跟踪的角度
- $r(t)$ ——参考模型输入
- $u(t)$ ——非线性系统的输入
- X ——非线性系统的输出矩阵
- X_m ——参考模型的输出矩阵
- $x(t)$ ——非线性系统的输出
- ϵ ——跟踪误差

References

- [1] Goodwin G C, Sin K. Adaptive filtering, prediction, and control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984
- [2] Po-Chiang Yeh, Petar V Kokotovic. Adaptive control of a class of nonlinear discrete-time systems. *Int. J. Control*, 1995, **62** (2): 303-324
- [3] Man Zhihong, Wu H R, Palaniswami M. An adaptive tracking controller using neural networks for a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1998, **9** (5): 947-955
- [4] Chen Lingji, Narendra K S. Intelligent control using multiple neural networks. *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, 2003, **17** (6): 417-430
- [5] Kumpati S Narendra, Cheng Xiang. Adaptive control of discrete-time systems using multiple models. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2000, **45** (9): 1669-1686
- [6] Ippoliti G, Longhi S. Multiple models for adaptive control to improve the performance of minimum variance regulators. *IEE Proc. -Control Theory Appl.*, 2004, **151** (2): 210-217
- [7] Li Xiaoli (李晓理), Zhang Weicun (张维存), Wang Wei (王伟). Multiple model adaptive control based on the divided scope of bounded disturbance. *Journal of Control Theory and Applications* (控制理论与应用), 2006, **23** (2): 283-286

- [8] Lee Choon-Young. Adaptive control of a class of nonlinear systems using multiple parameter models. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2006, **4** (4): 428-437
- [9] Brown D, Tutty O R, Rogers E. Enhancements to nonlinear multiple model adaptive control schemes. *International Journal of Control*, 2006, **79** (9): 1010-1025
- [10] Zhivoglyadov P, Meddleton R H, Fu M Y. Localization based switching adaptive control for time-varying discrete-time systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2000, **45** (4): 752-755
- [11] Fekri S, Athans M, Pascoal A. Robust multiple model adaptive control (RMMAC): a case study. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2007, **21** (1): 1-30
- [12] Fekri S, Athans M, Pascoal A. Issues, progress and new results in robust adaptive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2006, **20** (10): 519-579
- [13] Fekri S, Athans M, Pascoal A. RMMAC: a novel robust adaptive control scheme (I): Architecture//Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control. Paradise Island, Bahamas, 2004: 1134-1139
- [14] Fekri S, Athans M, Pascoal A. RMMAC: a novel robust adaptive control scheme (II): Performance evaluation//Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control, Paradise Island, Bahamas, 2004: 1140-1145
- [15] Alireza Karimi, Ioan Doré Landau. Robust adaptive control of a flexible transmission system using multiple models. *IEEE Trans.on Control Systems Technology*, 2000, **8** (2): 321-331