

编者按 在我国,人口老龄化问题对农村社会的影响体现在各个方面,尤其对农村经济发展的影响更为突出。具体表现为农村劳动人口年龄老化使农村劳动力资源不足,不利于劳动生产率的提高;随着老年人口的增加,老年保障投入增多,农村经济发展投资减少;家庭规模缩小,赡养比重提高,农民个人负担加重,农业投入受到牵制等。这些都不利于农村经济的发展,进而给社会发展带来压力。该文通过引入宋健人口模型对未来中国老年化趋势进行合理预测,以使国家能及时准确地关注人口老年化带来的各种问题,缓解农村乃至全国因老年化矛盾带来的社会压力。

## 基于宋健人口模型的老年化预测

谢建文, 张元标\*, 王志伟, 黎艺行 (暨南大学珠海学院, 数学建模创新实践基地, 广东珠海 519070)

**摘要** 以微分方程为理论基础,综合运用机理分析、参数辨识和统计学的一般原理对中国人口老年化趋势进行合理预测。首先利用统计数据对人口相关参数进行确定,通过引入宋健人口模型对未来中国老年化趋势进行预测,预计2015年全国老年人口比重将会达到11.7%。

**关键词** 宋健人口发展模型;年龄移算法;人口预测;老年化预测

中图分类号 F302.5 文献标识码 A 文章编号 0517-6611(2008)12-05227-03

### Forecast of Aging-trend Based on Song Jian's Model of Population Development

XIE Jian-wen et al (Mathematical Modeling Innovative Practice Base, Zhuhai College of Jnan University, Zhuhai, Guangdong 519070)

**Abstract** In this thesis the aging trend of Chinese population was forecasted with the mechanism analysis, parameter identification and basic statistical principles. Firstly, we fixed the parameter with statistical data. Then, we brought those data into the Song Jian's Model of Population Development to forecast the aging-trend of Chinese population. And the predictive result was that the percent of the elders in China would be 11.7% in 2015.

**Key words** Song Jian's Model of Population Development; Age Transfer Algorithms; Population forecast; Aging-trend forecast

中国的人口老龄化不仅是中国自身的问题,而且关系到全球人口老龄化的进程,备受世界关注。人口老年化预测的关键在于是否能够准确预测出各年龄段的人口数,而人口预测的方法有很多,其功能特点、适用范围、技术特点、数理性质都不尽相同。譬如指数增长模型,其假设人口增长率为不变常数,由于其形式相对简单,故在人口短期预测时常被采用,但该模型不能描述、也不能预测较长时间的人口演变过程;阻滞增长模型(Logistic模型),在一定程度上克服了指增长模型的不足,可以被用来做相对较长时期的人口预测,但由于单纯从总增长率方面考虑,没有涉及人口的年龄结构,故预测效果不佳。

笔者基于典型的微观预测模型——宋健人口发展模型<sup>[1]</sup>对我国人口进行预测,该模型可以分年龄段计算出每个年龄段预测人口,有利于从中分析出细微的变化,其总体思想是从出生率及死亡率影响人口变化的因素出发,逐一讨论,最后再将其综合,得出较佳的预测结果。

### 1 人口预测相关参数的确定

**1.1 女性在单位时间内平均每人的生育数  $b(r, t)$**  女性单位时间内生育数  $b(r, t)$  可定义为:

$$b(r, t) = (t) h(r, t)$$

其中,  $(t)$  的直接含义是  $t$  时刻单位时间内平均每个育龄女性的生育数,如果所有育龄女性在她所及的时刻都保持这个生育数,那么  $(t)$  也表示平均每个女性一生的总和生育数,所以  $(t)$  称为总和生育率或生育胎次。

**1.1.1 总和生育率  $(t)$  的确定。** 使用中国人口预测软件CPPS<sup>[2]</sup>,得出2001~2005年的总和生育率(表1)。

**1.1.2 生育模式  $h(r, t)$  的确定。**  $h(r, t)$  是年龄为  $r$  女性的生育加权因子,称为生育模式。在稳定环境下可以近似地认为它与  $t$  无关<sup>[3]</sup>,即  $h(r, t) = h(r)$ 。 $h(r)$  表示了在哪一些年龄生育率高,哪些年龄生育率低。图1给出了  $h(r)$  的示意图。

表1 2001~2005年总和生育率的统计数据

Table 1 Statistical data of total fertility rate from 2001 to 2005

年份 Year	城市 Cty	镇 Twn	乡 Village	全国 Nation
2001	1.00	1.19	1.60	1.40
2002	0.96	1.20	1.65	1.41
2003	1.00	1.30	1.70	1.46
2004	1.05	1.35	1.69	1.47
2005	0.93	1.28	1.65	1.39
统计值	0.988	1.264	1.658	1.426

Statistical value

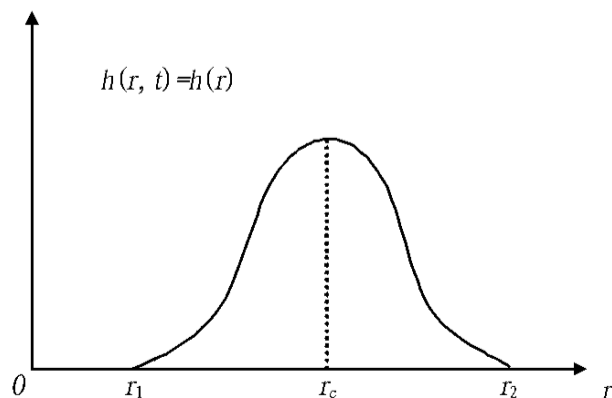


图1 生育模式示意

Fig.1 Map of fertility model

图1表明,  $r = r_c$  附近生育率最高。由人口统计资料可知当前实际的  $h(r, t)$ , 作理论分析时常采用  $h(r)$  的一种形

基金项目 暨南大学第九批教改项目。

作者简介 谢建文(1985-),男,广东台山人,本科生,专业:数学建模。\* 通讯作者,硕士,讲师。

收稿日期 2008-02-26

式,是借用概率论中的 分布,

$$h(r) = \frac{(r - r_1)^{a-1} e^{-\frac{r-r_1}{\lambda}}}{\Gamma(a)}, r \geq r_1$$

$$0, r < r_1$$

并取  $a=2, \lambda = n/2$ , 时有  $r_c = r_1 + n - 2$  式中,  $r$  为生育年龄,  $r_1$  为生育下限,  $\Gamma(\cdot)$  为伽玛函数, 得到:

$$\text{市女性生育率 } h(r) = \frac{(r-15)^5 e^{-\frac{r-15}{2}}}{7680}, r \geq 15$$

$$0, r < 15$$

$$\text{镇女性生育率 } h(r) = \frac{(r-15)^{4.5} e^{-\frac{r-15}{2}}}{4735.545}, r \geq 15$$

$$0, r < 15$$

$$\text{乡女性生育率 } h(r) = \frac{(r-15)^4 e^{-\frac{r-15}{2}}}{768}, r \geq 15$$

$$0, r < 15$$

表2 城市、镇、乡人口死亡率与活存率函数

Table 2 Function of mortality rate and fertility rate of urban population

项目 Item	城市 City 死亡率 Mortality rate	镇 Town 死亡率 Mortality rate	乡 Village 死亡率 Mortality rate
男 Male	$\mu(r) = 0.2617e^{0.0006r^2 + 0.0211r}$	$\mu(r) = 0.3814e^{0.0005r^2 + 0.0231r}$	$\mu(r) = 0.6678e^{0.0005r^2 + 0.0195r}$
女 Female	$\mu(r) = 0.1374e^{0.0008r^2 + 0.0097r}$	$\mu(r) = 0.2188e^{0.0007r^2 + 0.0115r}$	$\mu(r) = 0.04635e^{0.0008r^2 + 0.0016r}$
总 Total	$\mu(r) = 0.2244e^{0.0007r^2 + 0.0134r}$	$\mu(r) = 0.3159e^{0.0006r^2 + 0.0020r}$	$\mu(r) = 0.5828e^{0.0006r^2 + 0.0121r}$

$$\text{乡 } K(r) = 1.5332 \times 10^{-6} r^3 - 0.00017053r^2 + 0.0054705r + 0.4368$$

1.4 人口分布函数  $F(r, t)$  与密度函数  $p(r, t)$  为了研究任意时刻不同年龄的人口数量, 引入人口的分布函数和密度函数<sup>[3]</sup>, 时刻  $t$  年龄小于  $r$  的人口称为人口分布函数, 记作  $F(r, t)$ , 其中,  $t, r(0)$  均为连续变量, 设  $F$  是连续、可微的。时刻  $t$  的人口总数记作  $N(t)$ , 最高年龄记作  $r_{max}$ , 理论推导时设  $r_{max} \rightarrow \infty$ , 于是对非降函数  $F(r, t)$  有  $F(0, t) = 0, F(r_{max}, t) = N(t)$ 。有人口密度函数定义为:  $p(r, t) = \frac{dF}{dr}$ ; 其中,  $p(r, t) dr$  为时刻  $t$ , 年龄在区间  $[r, r + dr)$  内的人数。

为了得到  $p(r, t)$  满足的方程, 考察时刻  $t$  年龄在  $[r, r + dr)$  内的人到时刻  $t + dt$  的情况。他们中活着的那一部分人的年龄变为  $[r + dr_1, r + dr + dr_1)$ , 这里  $dr_1 = dt$ , 而在  $dt$  这段时间内死亡的人数为  $\mu(r, t) p(r, t) dr dt$ 。于是  $p(r, t) dr - p(r + dr_1, t + dt) dr = \mu(r, t) p(r, t) dr dt$ , 其中,  $\mu(r, t)$  为时刻  $t$  年龄  $r$  的人的死亡率。可得到

$$\frac{dp}{dr} + \frac{dp}{dt} = -\mu(r, t) p(r, t)$$

上述式中, 有两具定解条件: 初始密度函数记作  $p(r, 0) = p_0(r)$ ; 单位时间出生的婴儿数记作  $p(0, t) = f(t)$ , 称为婴儿出生率。  $p_0(r)$  可由人口调查资料得到(以2001年为第0年), 是已知函数; 将偏导方程及定解条件写成

$$\frac{dp}{dr} + \frac{dp}{dt} = -\mu(r, t) p(r, t); t, r > 0$$

$$p(r, 0) = p_0(r)$$

$$p(0, t) = f(t)$$

1.2 时刻  $t$  年龄段  $r$  的死亡率  $\mu(r, t)$  与活存率  $S_r$  死亡率为同一年龄区间的死亡人口与平均人口之比。2001~2005年各年龄段死亡率散点图相对一致, 呈规则形状“J”形。由此可假设各年龄死亡率与时间  $t$  无关, 即  $\mu(r, t) = \mu(r)$ 。采用指数函数对死亡率进行拟合(单位: 1‰), 如表2, 活存率可由  $S_r = 10^3 - \mu(r)$  (单位: 1‰) 求得。

1.3 女性在人口中所占比例  $K(r, t)$  上述讨论已证得死亡率  $\mu$  与时间  $t$  无关, 男女出生比例统计数据显示, 每年男女出生比例基本相同, 可认为女性在人口中所占比例与时间  $t$  关系不大, 在此只考虑年龄对女性在人口比例的影响, 即  $K(r, t) = K(r)$ 。

最小二乘法拟合女性所占人口比例函数结果为:

$$\text{城 } K(r) = 1.3073 \times 10^{-6} r^3 - 0.00015077r^2 + 0.0050321r + 0.4557$$

$$\text{镇 } K(r) = 1.6715 \times 10^{-6} r^3 - 0.00020294r^2 + 0.0072356r + 0.42518$$

这个连续型人口发展方程描述了人口的演变过程, 从这个方程确定出密度函数  $p(r, t)$ , 偏导方程的求解过程比较复杂, 这里只给出一种特殊情况下的结果, 在社会安定的局面下和不太长的时间内, 死亡率大致与时间无关, 于是可近似地假设  $\mu(r, t) = \mu(r)$ , 这时上述公式的解为

$$p(r, t) = \begin{cases} p_0(r-t) e^{-\int_0^t \mu(s) ds}, & 0 \leq t \leq r \\ f(t-r) e^{-\int_0^r \mu(s) ds}, & t > r \end{cases}$$

其中,  $\mu(s)$  为在  $s$  时刻的死亡率。

从而可知人口分布函数为  $F(r, t) = \int_0^r p(s, t) ds$

最小二乘法对  $p_0(r)$  函数进行拟合, 得出城、镇和乡的人口密度函数为:

$$\text{城 } p_0(r) = -0.0041r^3 - 0.7471r^2 + 32.7189r + 148.4209$$

$$\text{镇 } p_0(r) = -0.0022r^3 - 0.3825r^2 + 14.8397r + 141.2490$$

$$\text{乡 } p_0(r) = 0.00802r^3 - 1.3412r^2 + 44.957r + 1.022$$

## 2 人口老年化预测模型的建立与求解

模型主要包括三部分, 一是出生人数函数

$$f(t) = \int_{r_1}^{r_2} h(r) K(r, t) p(r, t) dr$$

其中,  $p(r, t)$  表示  $t$  时刻年龄为  $r$  的人口数;  $K(r, t)$  为女性性别比函数, 即  $t$  时刻年龄为  $r$  的女性所占人口比例;  $h(r)$  表示  $t$  时刻单位时间内平均每个育龄女性的生育数, 称为总和生育率或生育胎数;  $h(r)$  为生育模式函数;  $r_1, r_2$  分别表示最低和最高生育年龄。

二是年龄移算法<sup>[4]</sup>的改进, 引入净迁移人数后的年龄移算法(以女性人口为例)。

$$p_0(t+1) = S_{00} f(t) + g_{00}$$

$$p_1(t+1) = p_0(t) S_1 + g_1$$

$$p_2(t+1) = p_1(t) S_2 + g_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_{r-1}(t+1) = p_{r-2}(t) S_{r-2} + g_{r-2}$$

其中,  $f(t)$  为出生人口数;  $S_{00}$  为婴儿的生还率;  $f$  为女婴儿出生比;  $g_r$  为年龄为  $r$  的人口净迁移人数;  $p_r$  为年龄为  $r$  的人口数;  $S_r$  为  $r$  年龄段人口的存活率。

三是人口老年化指标。人口老年化是指人口中老年人比重日益严重。一般认为, 如果人口中65岁及以上老年人口比重超过7%或60岁及以上老年人口比重超过10%, 那么认为人口属于老年型。

设  $Q_t$  为城、镇、乡65岁以上老年人所占总人口数量的比重:

$$Q_t = \frac{\sum_{r=65}^{90+} p_t(r)}{N_t}, t = 1, 2, \dots, n$$

其中,  $p_t(r)$  为第  $t$  年年龄段  $r$  的人数, 即人口密度函数;  $N_t$  为第  $t$  年总人口预测值。

模型的前两部分为宋健人口发展模型的核心。下面为2002~2015年老年人口比重预测结果(表3, 图2, 3):

表3 老年人口比重的预测值

Table 3 predictive value of the proportion of aged population %

年份 Year	城市 City	镇 Town	乡 Village	全国 Nation
2002	8.975	7.128	7.588	7.861
2003	9.434	7.504	7.855	8.188
2004	9.856	7.820	8.006	8.426
2005	10.298	8.158	8.209	8.704
2006	10.678	8.568	8.443	8.995
2007	11.013	8.801	8.613	9.213
2008	11.295	9.064	8.794	9.430
2009	11.604	9.365	9.012	9.680
2010	11.929	9.610	9.216	9.919
2011	12.332	9.997	9.433	10.202
2012	12.740	10.404	9.698	10.520
2013	13.149	10.773	9.952	10.826
2014	13.694	11.220	10.297	11.233
2015	14.313	11.750	10.678	11.690

3 结语

我国属于老年型人口, 老年化进程在加速, 其主要特点

(上接第5216页)

高的效果, 在冬季还可很好解决猪便秘的问题; 在鱼的混合饲料中加入30%刺槐叶混合糖化发酵, 制成颗粒料喂鱼, 能减少鱼病的发生, 提高成活率。松针叶粉含粗蛋白、脂肪、氨基酸及丰富的维生素、微量元素和矿物质, 是一种较好的天然饲料。在肉猪日粮中添加2.5%~4.5%的松针叶粉, 可增重15%以上; 在奶牛饲料中添加10%的松针粉, 产奶量可提高7.4%。在断奶仔猪日粮中添加泡桐叶粉, 每日每头添喂30g, 连续30d, 可增重24.0%。在生长猪日粮中添加5%~10%的鲜柳叶, 可节约精饲料, 降低成本, 增加养猪收入。有些树种的嫩枝也是家畜饲喂效果较好的饲料资源, 如灌木柳、紫穗槐、柠条、棘豆、沙棘等的嫩枝, 粗蛋白含量都在

为老年人口基数大、老龄化速度快、高龄趋势明显。另外, 城市的老年化程度明显比镇、乡的高, 全国老年人口比重预计到2015年会上涨到11.7%的高度。

人口老龄化将导致抚养比不断提高, 对社会保障体系和公共服务体系的压力加大, 并影响到社会代际关系的和谐。农村社会养老保障制度不健全, 青壮年人口大量流入城市, 可能使农村老龄化形势更为严峻。因此, 国家尤其要关注庞大老年人群中的贫困化和边缘化问题, 以缓解老年化矛盾带来的社会压力。

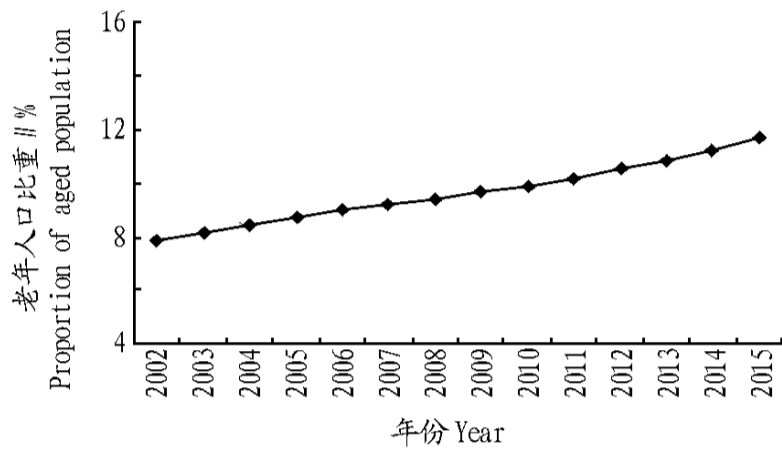


图2 中国人口老年化趋势

Fig. 2 Tend of the aging of population in China

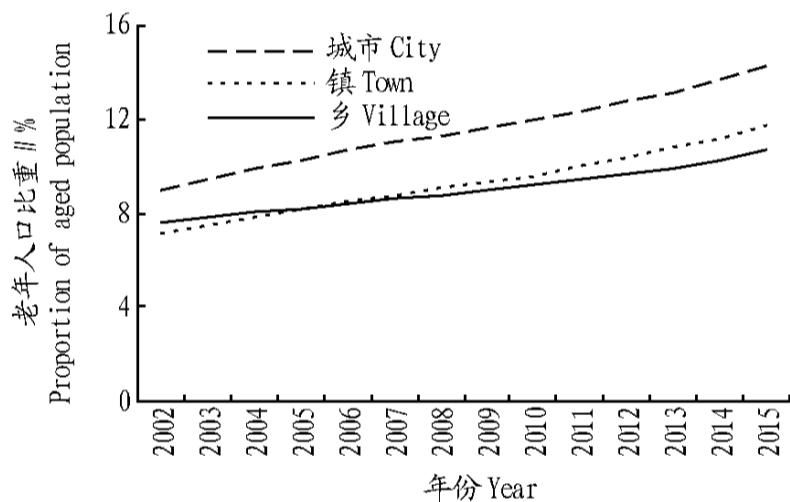


图3 老年化趋势比较

Fig. 3 Comparison of the aging trend of population

参考文献

[1] 宋健, 田雪原, 于景元. 人口预测和人口控制[M]. 北京: 人民出版社, 1982.  
 [2] 王广州. 中国人口预测软件培训手册[Z]. 2002.  
 [3] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2003:162-166.  
 [4] 李永胜. 人口预测中的模型选择与参数认定[J]. 财经科学, 2004(2):68-72.

6.8%以上, 马、鹿、驴、牛、羊、骆驼等均喜食。研究发现, 部分树种的果实, 如木豆、沙棘果渣、野生橡实、角豆等都是较好的饲料资源。另外, 木材加工副产品, 如锯木板条、木芯、刨花、木屑、木粉、树皮、树根等也是一大宗饲料资源。可见, 开发木本饲料用林生产, 对于节约粮食, 缓解人畜争粮矛盾, 发展节粮畜牧业和建设社会主义新农村都有重要意义。

参考文献

[1] 《河南森林》编辑委员会. 河南森林[M]. 北京: 中国林业出版社, 2000:423-445.  
 [2] 江泽慧. 中国林业发展与新农村建设[J]. 林业经济, 2006(5):3-5.  
 [3] 张建辉. 山杜英人工造林和袋料栽培香菇效果分析[J]. 河北林果研究, 1998, 13(S):137-138.  
 [4] 杨小弟, 文小鹏, 罗惟希, 等. 速生树种木屑栽培香菇初探[J]. 食用菌, 2005(3):24-25.