

# 高能多粒子产生反常标度性研究中的 相空间变量选择\*

刘连寿 吴元芳

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430070)

1995-04-12 收稿

## 摘 要

讨论高能多粒子产生反常标度性研究中的各种相空间变量选择. 为了克服几种常用的横向相空间变量的缺点, 引入了一组新的横向变量. 这组变量在讨论高能多粒子产生中的反常标度性时有优越性. 给出了这组新变量的统计分布及数值特征, 讨论了它们之间的独立性, 给出了相应的累积变量.

**关键词** 高能多重产生, 反常标度性, 相空间变量, 数值特征, 累积变量.

自从 A. Bialas 和 R. Peschansky<sup>[1]</sup> 发表首创性文章以来, 关于高能碰撞多粒子末态中是否存在反常标度性的问题引起了广泛注意<sup>[2]</sup>.

考虑多粒子末态三维相空间中的一个区域  $\Delta\Omega$ . 将它分成许多小区域  $\delta\Omega_m (m=1, 2, \dots, M)$ , 则阶乘矩定义为<sup>[1]</sup>

$$F_q(\delta\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\langle n_m(n_m-1)\dots(n_m-q+1) \rangle}{\langle n_m \rangle^q}, \quad (1)$$

其中  $q$  是矩的阶数,  $\delta\Omega = \Delta\Omega / M$  是元胞大小,  $n_m$  是在第  $m$  个元胞中的多重数,  $M$  是在总区间  $\Delta\Omega$  中的元胞数. 如果当元胞的大小  $\delta\Omega$  减小时,  $F_q$  有如下行为

$$F_q(\delta\Omega) \propto (\delta\Omega)^{-\alpha_q} \cdot (\delta\Omega \rightarrow 0), \quad (2)$$

则称为有反常标度性.

阶乘矩  $F_q$  的反常标度性质依赖于所使用的相空间变量. 在这里, 我们将讨论选择变量的各种可能性; 并将定义一种对研究反常标度性有利的新变量.

在三维相空间中最自然的变量当然是动量矢量  $\vec{p}$  的三个分量  $(p_1, p_2, p_3)$ . 然而, 在高能碰撞中有一个特殊方向, 即入射粒子的运动方向(为了方便, 令它为第3方向), 称为“纵向”. 多粒子末态中的所有物理量都必需是纵向洛伦兹不变的, 即对沿纵向的洛伦兹变换不变(或最多改变一个相加常数).  $(p_1, p_2, p_3)$  这组变量显然不满足这一要

\* 国家自然科学基金、国家教委优秀青年教师基金和武汉市青年科技晨光计划资助.

求.

具有纵向洛伦兹不变性的纵向变量是快度  $y$ , 其定义为

$$y = \ln \frac{E + p_{\parallel}}{E - p_{\parallel}}, \quad (3)$$

而横向变量可以是  $(p_1, p_2)$  的任意函数, 只要不依赖于  $p_{\parallel} (= p_3)$ .

从物理上考虑, 横向平面中的动力学起伏很重要<sup>[3-5]</sup>, 因此, 横向变量的选择值得仔细讨论. 这正是本文的目的.

考虑到系统的柱对称, 常常采用相空间横平面中的“极坐标”  $(\ln p_{\perp}, \phi)$  来作为变量. 然而, 对于研究反常标度性, 这一选择会带来一些问题. 因为, 当横向相空间中的一个环形区域  $(a \leq \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \leq b)$ , 见图 1(a) 映射到  $(\ln p_{\perp}, \phi)$  平面上时 (图 1(a) 到 (b)), 这个环被一条任意选定的  $p_1$  轴切开 (见图 1(a) 中的粗线); 对于这个轴, 映射是 1—2 而不是 1—1, 见图 1(b). 这会影响阶乘矩  $F_q$  的一维投影的标度性质. 例如, 当阶乘矩  $F_q$  被投影到  $p_1$  (或  $p_2$ ) 轴上时, 一个子区间  $\delta p_1$  (或  $\delta p_2$ ) 中包含了两个象限的粒子; 而当投影到  $(\ln) p_{\perp}$  轴上时, 一个子区间  $\delta p_{\perp}$  却包含了四个象限的粒子, 投影到  $\phi$  轴上时, 一个子区间  $\delta \phi$  中只包含一个象限的粒子. 粒子累积的这种差别显然会影响阶乘矩的反常标度性质.

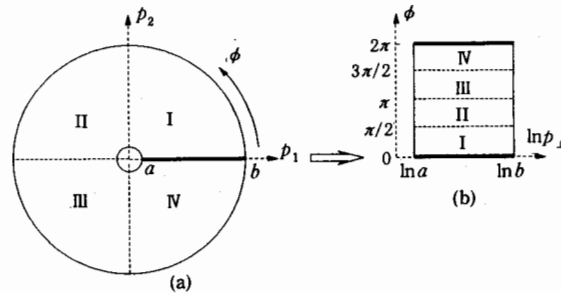


图 1 从横向相空间到  $(\ln p_{\perp}, \phi)$  平面的映射

横向平面中的环形区域被粗线段分割开, 而这一粗线段映射成为两个线段.

另一方面, 如果直接用横向动量的分量  $(p_1, p_2)$  来作变量会产生另一问题, 即: 由于在实际实验中总是有横动量截断  $p_{\perp} \geq a$ ,  $(p_1, p_2)$  平面中的区域

$$a \leq |p_i| \leq b, \quad i=1, 2 \quad (4)$$

被分割成了四个不相连的部分, 如图 2(a). 这对反常标度性的研究是一个障碍.

考虑到以上情况, 我们试图定义一组新变量. 用横动量的低限  $a$  作为量度  $p_i (i=1, 2)$  的标度, 定义

$$\begin{aligned} w_i &= \text{sgn}(p_i) \ln \left( \frac{|p_i|}{a} \right) \\ &= \text{sgn}(p_i) (\ln |p_i| - \ln a), \quad i=1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\text{sgn}(p_i) = p_i / |p_i|$  是  $p_i$  的符号. 式 (4) 中的不联通区域映射到  $(w_1, w_2)$  平面上成为单

联通区域

$$-\ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq w_i \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad i=1, 2, \quad (6)$$

如图2(b).

从式(5)可以反解出  $p_i$  作为  $w_i$  的函数

$$p_i = a \operatorname{sgn}(w_i) e^{|w_i|}, \quad i=1, 2. \quad (7)$$

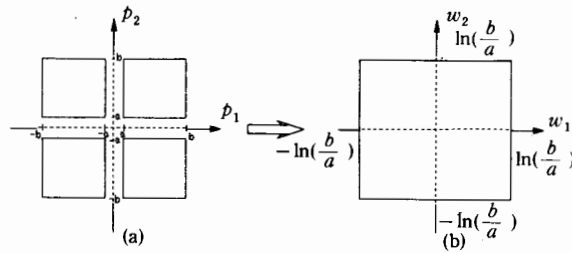


图2  $(p_1, p_2)$  平面上的不联通区域映射到  $(w_1, w_2)$  平面上的象是单通区域

为了便于在实际中应用变量  $w_i$ ，让我们来讨论它们的统计性质，即它们的几率分布、方差和协方差以及它们之间相互独立的程度。

从实验上已知  $p_{\perp}$  和  $\phi$  的几率分布，它们可以近似地写为

$$P(p_{\perp}) = 3e^{-3p_{\perp}}; \quad P(\phi) = 1/2\pi. \quad (8)$$

而且，可以近似地认为  $p_{\perp}$  和  $\phi$  相互独立。我们以此为出发点来研究变量  $w_i$  的统计性质。 $w_1, w_2$  的联合分布是

$$\begin{aligned} P(w_1, w_2) &= P(p_{\perp})P(\phi) \frac{D(\phi, p_{\perp})}{D(p_1, p_2)} \frac{D(p_1, p_2)}{D(w_1, w_2)} \\ &= Ae^{-3a\sqrt{e^{2|w_1|+e^{2|w_2|}}} \frac{e^{|w_1|+|w_2|}}{\sqrt{e^{2|w_1|+e^{2|w_2|}}}}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $A$  是归一化常数，它将  $P(w_1, w_2)$  在式(6)的区域中归一化。

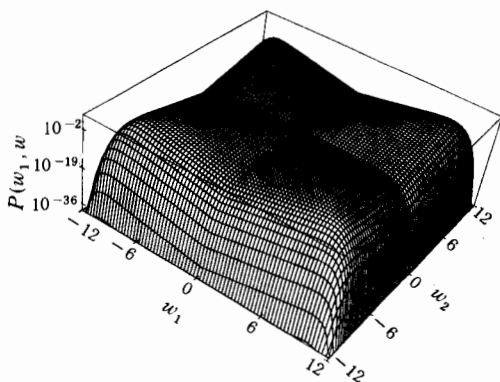


图3  $(w_1, w_2)$  的联合分布

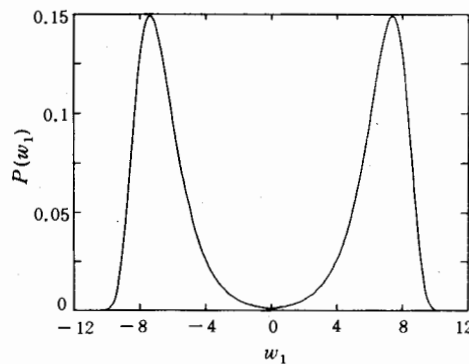


图4  $w_1$  的边缘分布

取  $a=e^{-9}$ ,  $b=e^3$ , 式(9)所示的分布画在图3上. 它在四个象限中有四个峰, 中心有谷, 在四周下降很陡.

变量  $w_i$  的边缘分布

$$P_i(w_j) = \int_{-\ln(b/a)}^{\ln(b/a)} P(w_1, w_2) dw_j, \quad i, j=1, 2 \quad (i \neq j) \quad (10)$$

画在图4上. 它在大约  $w_i = \pm 7.5$  处有两个很强的峰.

我们知道, 对于任意两个随机变量  $x_1, x_2$ , 方差  $\sigma$ 、协方差  $\text{cov}$  和关联系数  $\rho$  的一般定义是

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2(x_i) &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)^2 \rangle; \\ \text{cov}(x_1, x_2) &= \langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) \rangle; \\ \rho(x_1, x_2) &= \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma(x_1)\sigma(x_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

后者有如下性质

$$\rho(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } P(x_1, x_2) = P_1(x_1)P_2(x_2); \\ 1, & \text{如果 } P(x_1, x_2) = P_1(x_1)\delta(ax_1 + b - x_2). \end{cases} \quad (12)$$

然而, 在我们现在的情况下, 由于  $P(w_1, w_2)$  的对称性,  $\text{cov}(w_1, w_2) \equiv 0$ , 因而不能用来标志  $w_1$  和  $w_2$  之间的关联强度<sup>[6]</sup>. 为了给出这种情况下关联强度的一个定量特征, 我们引入“二次协方差”, 其定义为

$$\text{cov}_2(x_1, x_2) = \langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)^2 (x_2 - \langle x_2 \rangle)^2 \rangle - \sigma_1^2 \sigma_2^2, \quad (13)$$

以及相应的“二次关联系数”

$$\rho_2(x_1, x_2) = \frac{\text{cov}_2(x_1, x_2)}{\sigma^2(x_1)\sigma^2(x_2)}, \quad (14)$$

它在  $x_1$  和  $x_2$  无关时为零:

$$\text{cov}_2(x_1, x_2) = \rho_2(x_1, x_2) = 0, \quad \text{当 } P(x_1, x_2) = P_1(x_1)P_2(x_2). \quad (15)$$

在我们的情况下, 由分布式(9),  $w_1$  和  $w_2$  的方差、二次协方差和二次关联强度分别是

$$\sigma(w_1) = \sigma(w_2) = 6.825; \quad \text{cov}_2(w_1, w_2) = 166; \quad \rho_2(w_1, w_2) = 7.66 \times 10^{-2}. \quad (16)$$

$\rho_2 \ll 1$  表明  $w_1$  和  $w_2$  之间的关联很弱, 因而可以近似地忽略它们之间的关联, 将它们分别当成独立变量来使用.

在研究多重产生中的反常标度性时, 常常引入“累积变量”<sup>[7]</sup>来消去分布不平的影响. 如果忽略  $w_1$  和  $w_2$  之间的关联, 累积变量的定义是

$$X_i(w_i) = \int_{a_i}^{w_i} P(w_j) dw_j, \quad i=1, 2. \quad (17)$$

考虑二者的关联, 则相应的定义是

$$X_1(w_1) = \int_{a_1}^{w_1} P_1(w_1) dw_1,$$

$$X_2(w_2 | w_1) = \frac{1}{P_1(w_1)} \int_{a_2}^{w_2} P(w_1, w_2) dw_2. \quad (18)$$

注意, 在考虑关联的情况下,  $X_2$  是对  $w_1$  取某一固定值时  $w_2$  的函数, 因而是  $w_2$  和  $w_1$  二者的函数.

对于五个不同  $w_1$  值, 累积变量  $X_2$  作为  $w_2$  的函数画在图 5 上. 同一图中也画出了在  $w_2$  和  $w_1$  相互独立的假定下的  $X_2(w_2)$  (曲线 0). 由图可见, 当  $w_2$  取它的最可几值 ( $\sim \pm 7.5$ , 见图 4) 时, 考虑和不考虑  $w_2, w_1$  之间的关联得到的累积变量  $X_2$  几乎重合. 这进一步证明, 忽略这二者之间的关联, 用式(17)作为它们的累积变量的定义是一个很好的近似.

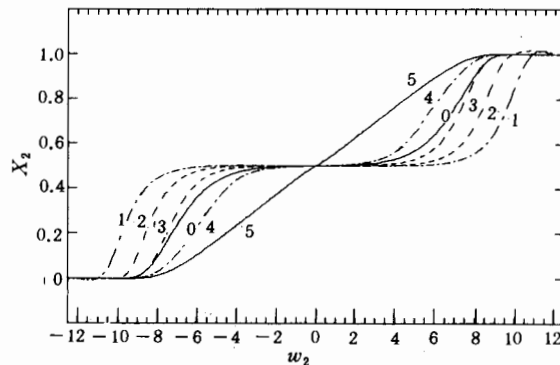


图 5 对于  $w_1$  的不同值, 累积变量  $X_2$  作为  $w_2$  的函数

0. independent, 1.  $w_1 = \pm 12$ , 2.  $w_1 = \pm 9.6$ , 3.  $w_1 = \pm 7.5$ , 4.  $w_1 = \pm 4.8$ , 5.  $w_1 = 0$ .

我们讨论了研究多粒子产生中反常标度性所用的相空间变量的不同选择. 考虑到常用变量的不足之处, 我们引入了一组新变量  $(w_1, w_2)$ . 给出了这组变量的统计特征量和相应的累积变量. 从相空间横平面到  $(w_1, w_2)$  平面的映射是 1-1 的, 而且, 原先不联通的区域映射成为单联通区域. 因而, 这一组变量很适合于反常标度性的研究.

### 参 考 文 献

- [1] A. Bialas, R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B273** (1986) 703; **B308** (1988) 851.
- [2] N. Schmitz, in Proc. 21th Intern. Symp. on Multiparticle Dynamics, Wuhan, China (1991), World Scientific, Singapore; A. Bialas, in Proc. 24th Intern. Symp. on Multiparticle Dynamics, Vietri, Italy (1994), World Scientific, Singapore; E. A. De Wolf, I. M. Dremin, W. Kittel, Nijmegen Preprint HEN-362 (1993).
- [3] EHS/NA22 Collaboration, Low  $p_T$  Intermittency, University of Nijmegen preprint 338/91 (1991); Wu Yuanfang, Liu Lianshou, *Phys. Lett.*, **B269** (1991) 28; Y. F. Wu, B. Buschbeck, P. Lipa *et al.*, *Acta Phys.*

- Slovaca*, **44**(1994) 141.
- [4] Wu Yuanfang, Liu Lianshou, *Phys. Rev. Lett.*, **21** (1993)3197.
- [5] 吴元芳, 刘连寿, 中国科学, **A24** (1994) 1299.
- [6] N. S. Matloff, *Probability Modeling and Computer Simulation* p.139, PWS-KENT Publishing Co., Boston, 1988.
- [7] A. Bialas, M. Gazdzicki, *Phys. Lett.*, **B252**(1990)483.

## On the Choices of Phase Space Variables in the Study of Anomalous Scaling in High Energy Multiparticle Production

Liu Lianshou    Wu Yuanfang

(*Institute of particle physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan 430070*)

Received 12 April 1995

### Abstract

The different choices for phase space variables in the study of anomalous scaling in high energy multiparticle production are discussed. In order to overcome the shortcomings of the transverse variables currently used, a set of new transverse variables are introduced, which has some advantage in the anomalous scaling study of high energy multiparticle production. The probability distributions as well as the numerical characteristics of these variables are given and the independency between them are discussed. The corresponding cumulate variables are given.

**Key words** high energy multiproduction, anomalous scaling, phase space variables, numerical characteristics, cumulate variables.