第20卷 第8期 高能物理与核物理 Vol.20, No.8
1996 年 8月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Aug., 1996

# 双参数形变谐振子湮没算符高次幂的本征态*

王继锁[1)] 孙长勇
(聊城师范学院物理系 山东 252059)
贺金玉
(德州师范专科学校 山东 253023)

1995-08-30 收稿

**摘 要**

构造了双参数形变谐振子湮没算符高次幂 $a_{qs}^k(k\geqslant 3)$ 的本征态，并利用 $qs$ 积分给出了其完备性的证明.

**关键词** 双参数形变谐振子，湮没算符高幂，完备性.

## 1 引 言

近年来，关于多参数形变量子群的研究[1-6]受到了人们的普遍关注. Chakrabarti 等人在文献[5]中提出了双参数 $qs$ 形变谐振子，并构造了 $qs$ 相干态，即双参数形变谐振子湮没算符 $a_{qs}$ 的本征态. 最近，周焕强等人[7]构造了双参数形变谐振子湮没算符二次幂 $a_{qs}^2$ 的本征态，即 $qs$ 奇偶相干态，并利用 $qs$ 积分证明了它们的完备性. 人们自然要问，与通常谐振子湮没算符高次幂 $a^k(k\geqslant 3)$ 的本征态[8]相类似，是否存在双参数形变谐振子湮没算符高次幂的本征态，它们是否也可构成一个完备表象. 本文就在文献[7]的基础上来研究双参数形变谐振子湮没算符高次幂 $a_{qs}^k(k\geqslant 3$，下同，文中不再注明）的本征态的数学结构及其性质.

## 2 $a_{qs}^k$ 的正交归一本征态的数学结构

现在考虑如下 $k$ 个态矢

* 山东省自然科学基金资助.

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室)客座研究人员.

703 — 706

$$|\psi_j^k\rangle_{qs}=C_j\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{kn+j}}{\sqrt{[kn+j]_{qs}!}}\,|kn+j\rangle_{qs},\tag{1}$$

式中 $\alpha$ 为复参数，$C_j$ 为相应态矢的待定归一化因子，态矢符号中的角标 $k$ 表示它是属于算符 $a_{qs}^k$ 的本征态，$j$ 的可能取值(下同)为 $j=0, 1, 2, \cdots, k-1$； 式中$[n]_{qs}$ 和$[n]_{qs}!$ 的定义见文献[7]. 利用文献[7] 中的(20)和(21)式易于证明，由(1)式所定义的这 $k$ 个态确定是算符 $a_{qs}^k$ 的本征值为 $\alpha^k$ 的本征态($k$ 重简并态)，即有

$$a_{qs}^k|\psi_j^k\rangle_{qs}=\alpha^k|\psi_j^k\rangle_{qs},\tag{2}$$

并且这 $k$ 个本征态之间彼此是正交的，即

$${}_{qs}\langle\psi_{j'}^k|\psi_j^k\rangle_{qs}=0,\ (j',\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1;\ j'\neq j).\tag{3}$$

为求(1)式中的归一化因子 $C_j$，为方便起见，设 $C_j$ 均为实数，并令 $|\alpha|^2=x$，则由归一化条件可得到归一化因子为

$$C_j(x)=[A_j(x)]^{-\frac{1}{2}}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{kn+j}}{[kn+j]_{qs}!}\right)^{-\frac{1}{2}},\tag{4}$$

这样就得到了算符 $a_{qs}^k$ 的 $k$ 个正交归一本征态，即

$$|\psi_j^k\rangle_{qs}=[A_j(x)]^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{kn+j}}{\sqrt{[kn+j]_{qs}!}}\,|kn+j\rangle_{qs}.\tag{5}$$

## 3　$a_{qs}^k$ 的正交归一本征态的性质

首先可以证明，在由 $a_{qs}^k$ 的上述 $k$ 个正交归一本征态所组成的空间里，通过 $a_{qs}^k$ 的连续作用可实现这 $k$ 个态间的相互转换. 比如将 $a_{qs}$ 连续作用于态 $|\psi_0^k\rangle_{qs}$ 上，可以求得

$$a_{qs}^i|\psi_0^k\rangle_{qs}=\alpha^i A_0^{-\frac{1}{2}}A_{k-i}^{\frac{1}{2}}|\psi_{k-i}^k\rangle_{qs},\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k),\tag{6}$$

即 $a_{qs}$ 连续作用于一个态 $|\psi_0^k\rangle_{qs}$ 上，可使该态按照 $|\psi_0^k\rangle_{qs}\to|\psi_{k-1}^k\rangle_{qs}\to|\psi_{k-2}^k\rangle_{qs}\to\cdots\to|\psi_1^k\rangle_{qs}\to|\psi_0^k\rangle_{qs}$ 的顺序，历经其它$(k-1)$个态后又回到原态 $|\psi_0^k\rangle_{qs}$，亦即 $a_{qs}$ 在这 $k$ 个态间起了一个"转动算符"的作用.

另外，由于 $a_{qs}^k$ 的上述这 $k$ 个本征态表示以复参数 $\alpha$ 定义的量子态矢，所以当 $\alpha$ 取不同值时各态矢相应的内积为

$$\begin{aligned}{}_{qs}\langle\psi_j^k(\alpha)\psi_j^k(\alpha')\rangle_{qs}&=[A_j(|\alpha|^2)A_j(|\alpha'|^2)]^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*\alpha')^{kn+j}}{[kn+j]_{qs}!}\\&=[A_j(|\alpha|^2)A_j(|\alpha'|^2)]^{-\frac{1}{2}}A_j(\alpha^*\alpha')\neq0,\end{aligned}\tag{7}$$

这表明，在"$\alpha$ 平面"上 $a_{qs}^k$ 的这 $k$ 个本征态与 Glauber 相干态以及 $q$ 相干态一样，本身并不正交.

余下的也是最为关心的问题是，证明 $a_{qs}^k$ 的上述 $k$ 个本征态可构成一个完备的 Hilbert 空间，亦即它们可作为一个独立的表象使用，这等价于如下的单位分解:

$$1=\int \mathrm{d}\mu(\alpha)\left\{\sum_{j=0}^{k-1} A_j(|\alpha|^2)|\psi_j^k\rangle_{qs}\cdot{}_{qs}\langle\psi_j^k|\right\}. \tag{8}$$

式中 $\mathrm{d}\mu(\alpha)=\frac{1}{2\pi s^2}e_{qs^{-1}}(-s^{-2}|\alpha|^2)\mathrm{d}_{qs^{-1}}|\alpha|^2\mathrm{d}\theta$，这里关于 $\theta$ 的积分为通常的积分，关于 $|\alpha|^2$ 的 $qs$ 积分；有关 $qs$ 积分的若干结果和函数 $e_{qs}(x)$ 的定义见文献[7]. (8) 式的证明过程如下：

将(5)式代入(8)式右端得

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\mu(\alpha)\left\{\sum_{j=0}^{k-1} A_j(|\alpha|^2)|\psi_j^k\rangle_{qs}\cdot{}_{qs}\langle\psi_j^k|\right\}\\
&=\int \mathrm{d}\mu(\alpha)\left\{\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n,n'=0}^{\infty}\frac{\alpha^{kn+j}\cdot(\alpha^*)^{kn'+j}}{\sqrt{[kn+j]_{qs}![kn'+j]_{qs}!}}|kn+j\rangle_{qs}\cdot{}_{qs}\langle kn'+j|\right\}\\
&=\frac{1}{2\pi s^2}\iint e_{qs^{-1}}(-s^{-2}|\alpha|^2)\mathrm{d}_{qs^{-1}}|\alpha|^2\mathrm{d}\theta\\
&\quad\times\left\{\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n,n'=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{kn+j}|\alpha|^{kn'+j}\mathrm{e}^{i(n-n')k\theta}}{\sqrt{[kn+j]_{qs}![kn'+j]_{qs}!}}|kn+j\rangle_{qs}\cdot{}_{qs}\langle kn'+j|\right\}\\
&=\frac{1}{s^2}\int e_{qs^{-1}}(-s^{-2}|\alpha|^2)\mathrm{d}_{qs^{-1}}|\alpha|^2\left\{\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\alpha|^2)^{kn+j}}{[kn+j]_{qs}!}\right.\\
&\quad\left.\times|kn+j\rangle_{qs}\cdot{}_{qs}\langle kn+j|\right\}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\int \mathrm{d}_{qs^{-1}}|\alpha|^2\frac{1}{s^2[m]_{qs}!}e_{qs^{-1}}(-s^{-2}|\alpha|^2)(|\alpha|^2)^m|m\rangle_{qs}\cdot{}_{qs}\langle m|\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}|m\rangle_{qs}\cdot{}_{qs}\langle m|=1.
\end{aligned}\tag{9}$$

其中倒数第二步利用了文献[7]中的(16)式. 故此算符 $a_{qs}^k$ 的这 $k$ 个正交归一本征态可构成一个完备的 Hilbert 空间，即它们可作为一个独立的表象来使用. 例如 $qs$ 相干态 $|\alpha\rangle_{qs}$ 在这个表象中可作如下的分解

$$|\alpha\rangle_{qs}=[e_{qs}(|\alpha|^2)]^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{k-1}A_j(|\alpha|^2)|\psi_j^k\rangle_{qs}. \tag{10}$$

## 4　结论和讨论

本文在文献[7]的基础上构造了双参数形变谐振子湮没算符高次幂 $a_{qs}^k(k\geqslant 3)$ 的 $k$ 个正交归一本征态，并给出了这些本征态完备性的证明. 由本文的讨论可见，文献[7]所研究的情形只不过是本文所得普遍性情况的一个 $k=2$ 的特例. 另外当 $q\to 1$、$s\to 1$

时，将回到文献[8]所讨论的情形．因此本文是文献[8]在双参数形变下的推广．与未形变的情形相比较，算符 $a_{qs}^k$ 的 $k$ 个正交归一本征态的量子统计性质尚待研究，这将对人们研究双参数形变电磁场的量子特性是有益的，对此我们将另文讨论．

## 参 考 文 献


[1] E. E. Demidov, Yu. I. Manin *et al.*, *Prog. Theor. Phys. Supp.*, **102**(1990)302.

[2] A. Sudbery, *J. Phys.*, **A23**(1990)L697.

[3] A. Schirramcher, J. Wess, B. Zumino, *J. Phys.*, **C49**(1991)317.

[4] C. Burdik, L. Hlavaty, *J. Phys.*, **A24**(1991)165.

[5] R. Chakrabarti, R. Jagannathan, *J. Phys.*, **A24**(1991)L711.

[6] S. Jing, *Mod. Phys. Lett.*, **A8**(1993)543.

[7] 周焕强、贺劲松、张新明，高能物理与核物理，**19**(1995)251.

[8] 王继锁，物理学报，**40**(1991)547.


# Eigenstates of the Higher Power of the Annihilation Operator of Two－Parameter Deformed Harmonic Oscillator


Wang Jisuo Sun Changyong

(*Department of Physics, Liaocheng Teachers' college, Shandong* 252059)

He Jinyu

(*Department of Physics, Dezhou Teachers' College, Shandong* 253023)


Received 30 August 1995


Abstract

The eigenstates of the higher power of the annihilation operator $a_{qs}^k$ $(k \geqslant 3)$ of the two－parameter deformed harmonic oscillator are constructed. Their completeness is demonstrated in terms of the $qs$－integration.


**Key words** two－parameter deformed harmonic oscillator, higher power of the annihilation operator, completeness.