

边坡稳定的大变形有限元可靠度分析

谭晓慧¹, 王建国², 张洪涛¹

(1. 合肥工业大学 资源与环境工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 合肥工业大学 土木建筑工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘要: 在用有限元法对边坡稳定的可靠度进行分析时, 通常只考虑土体的弹塑性变形(即材料非线性问题)。而对于土坡而言, 其滑动面附近土体会产生应变局部化, 研究表明: 当平均应变为 10%时, 剪切带内的应变高达 40%。因此, 为了真实模拟边坡的破坏情况及过程, 应进行边坡的大变形有限元可靠度分析(即几何非线性问题)。基于非线性连续介质力学的基本原理, 采用以物质坐标为变量的更新的拉格朗日法(UL 法)建立了弹塑性大变形有限元分析模型, 同时考虑了边坡工程中的材料非线性及几何非线性问题。在此基础上, 采用有限元强度折减法计算边坡的安全系数, 建立了边坡破坏的极限状态方程, 进行了边坡的有限元可靠度分析。计算比较了弹塑性小变形及弹塑性大变形时均质土坡的安全系数及可靠指标, 进行了参数的敏感性分析。得出了当考虑边坡的大变形时, 安全系数有所增加而可靠指标有所减小的结论, 指出只进行小变形有限元可靠度分析偏于危险。

关键词: 边坡工程; 弹塑性; 大变形; 可靠度分析; 可靠指标; 更新的拉格朗日法(UL 法)

中图分类号: P 642.2

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2005)增 2 - 5308 - 05

LARGE DEFORMATION FINITE ELEMENT RELIABILITY ANALYSIS OF SLOPE STABILITY

TAN Xiao-hui¹, WANG Jian-guo², ZHANG Hong-tao¹

(1. School of Resources and Environment, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;

2. School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: In the reliability analysis of a slope, by using finite element method(FEM), which only considers the property of elasto plasticity or material nonlinearity. However, it exists the locally large strain in most soil slopes. It has been proven by experiments that the local strain can reach the value of 40% while the average strain is only 10%. Therefore, it's necessary to carry out large deformation finite element analysis of a slope in order to simulating its real failure property. In this paper, the constitutive relationship of the soil is considered as realistic elasto plasticity one and the Mohr-Coulomb yield criteria is adopted. Based on the basic principal of nonlinear continuum mechanics, a kind of elasto plastical large deformation finite element analysis model is built by using updated Lagrangian method, which can consider both the nonlinearity of material and geometry. Then, the method of strength reduction is adopted to calculate the factor of safety (F_s) of a slope. Among the several methods of reliability analysis such as mean first order second moment method (MFORM), advanced first order second moment method (AFORM) and Monte Carlo simulation method (MCSM), the AFORM is used in this paper since it is the most popular method. Through the comparative calculations of factor of safety and reliability index(β) by FEM of small and large deformation and the sensitivity analysis of parameters, the conclusion is that when the large deformation property is considered, the value of F_s will arise while the value of β will drop. The reason is

收稿日期: 2005 - 06 - 26; **修回日期:** 2005 - 08 - 15

基金项目: 安徽省教育厅青年基金项目(2005jq1021); 合肥工业大学科学研究发展基金资助项目(030703F), 安徽省水利厅科研项目

作者简介: 谭晓慧(1971 -), 女, 硕士, 1995 年于重庆大学资源与环境工程学院获硕士学位, 现任副教授, 主要从事岩土力学可靠度方面的教学与研究工作。E-mail: tantan9666@sina.com。

that the value of F_s is more sensitive to the value of cohesive c in this situation. Therefore, the limit state function Z has larger variation and smaller reliability index. From this point, it's unsafe if the large deformation property in the finite element reliability analysis of a slope is not considered.

Key words: slope engineering; elasto plasticity; large deformation; reliability analysis; reliability index; updated Lagrangian method(UL method)

1 引言

由于边坡岩土体物理力学性质、几何参数及外界荷载等因素的不确定性,基于概率理论的边坡工程可靠度分析已日益受到重视。边坡的可靠度分析与定值法分析的最大区别是考虑了变量的随机性,并用严格的概率来度量结构的安全度。

边坡的可靠度分析是建立在定值法分析基础上的。在边坡稳定的各种定值法中,有限元法由于能全面满足静力许可、应变相容及应力-应变之间的本构关系,并且不受边坡几何形状的限制和材料不均匀的限制,因而是边坡稳定性分析中一种较为理想的方法^[1]。但是,经典有限元法常假定边坡在荷载作用下发生的应变是微小的,而实际上,边坡的破坏往往伴随着大变形条件。研究结果表明:当平均应变为10%时,剪切带内的应变可高达40%^[2]。因此,应进行边坡的大变形有限元可靠度分析。

近年来,大变形有限元分析方法已在土体的固结分析、深基坑工程及边坡稳定性分析中得到了一定的应用^[3~8]。例如,文[7]采用大变形有限元方法分析了边坡体中各单元的应力及变形情况;文[8]则采用有限元强度折减法求解了考虑边坡大变形情况时的边坡总体安全系数。但是,上述有限元大变形分析均未涉及到可靠度分析情况。本文拟在边坡的大变形有限元可靠度分析方面进行研究。

2 大变形有限元可靠度分析模型

2.1 有限变形的虚功方程

通常,大变形增量平衡方程因变量的参照状态不同而分为 TL 表述和 UL 表述这 2 种方法,前者以 $t=0$ 的初始状态为参考构形,在以后所有时步内的计算都以此构形来定义;后者在时段 $[t, t+\Delta t]$ 的增量求解期间的所有变量均以这个时步的开始时刻 t 的状态作为参考构形来定义。这 2 种方法各有优缺点,本文采用 UL 描述方法进行求解。

当采用 UL 描述时,有限变形的虚功方程可写

为

$$\int_V \delta(\Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}})^T \bar{\boldsymbol{\tau}} dV = \int_V (\delta \bar{\boldsymbol{u}})^T \bar{\boldsymbol{p}} dV + \int_A (\delta \bar{\boldsymbol{u}})^T \bar{\boldsymbol{q}} dA \quad (1)$$

式中: $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\bar{\boldsymbol{u}}$, $\bar{\boldsymbol{p}}$, $\bar{\boldsymbol{q}}$ 都是对应于时刻 $t + \Delta t$ 的状态量,分别表示 Cauchy 应力、Euler-Almansi 应变、位移、体力和面力向量。

注意到 $t + \Delta t$ 时刻的以下关系式

$$\delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \delta(\Delta \boldsymbol{\epsilon}) \quad (2)$$

$$\delta \bar{\boldsymbol{u}} = \delta(\Delta \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{N} \delta(\Delta \boldsymbol{\delta}^\circ) \quad (3)$$

式中: \boldsymbol{N} 为形函数矩阵, $\Delta \boldsymbol{\delta}^\circ$ 为单元节点位移增量。

如将应力表示为 t 时刻的应力与增量应力之和,即

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} + \Delta \boldsymbol{\tau} \quad (4)$$

则虚功方程可改写为

$$\int_V \delta(\Delta \boldsymbol{\epsilon})^T (\boldsymbol{\tau} + \Delta \boldsymbol{\tau}) dV = \delta(\Delta \boldsymbol{\delta}^\circ)^T \left(\int_V \boldsymbol{N}^T \bar{\boldsymbol{p}} dV + \int_A \boldsymbol{N}^T \bar{\boldsymbol{q}} dA \right) \quad (5)$$

此即以增量形式表示的虚功方程,说明从时刻 t 到时刻 $t + \Delta t$ 的变化过程中,外力虚功的增加量等于应变能的增加量。

2.2 有限元方程的建立

将线性方程(式(5))经过有限元离散,并在几何及物理两方面进行线性化,即令

$$\left. \begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\epsilon} &= (\boldsymbol{B}_{L0} + \frac{1}{2} \boldsymbol{B}_{NL}) \Delta \boldsymbol{\delta}^\circ \\ \delta(\Delta \boldsymbol{\epsilon}) &= (\boldsymbol{B}_{L0} + \boldsymbol{B}_{NL}) \delta(\Delta \boldsymbol{\delta}^\circ) \\ \Delta \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{D} \Delta \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

可得

$$\boldsymbol{K}_T \Delta \boldsymbol{\delta}^\circ = \bar{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{R} \quad (7)$$

其中,

$$\boldsymbol{K}_T = \boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{K}_\sigma \quad (8a)$$

$$\boldsymbol{K}_0 = \int_V \boldsymbol{B}_{L0}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_{L0} dV \quad (8b)$$

$$\boldsymbol{K}_\sigma = \int_V \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{G} dV \quad (8c)$$

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \int_V \boldsymbol{N}^T \bar{\boldsymbol{p}} dV + \int_A \boldsymbol{N}^T \bar{\boldsymbol{q}} dA \quad (8d)$$

$$\boldsymbol{R} = \int_V \boldsymbol{B}_{L0}^T \boldsymbol{\tau} dV \quad (8e)$$

式中： \mathbf{K}_T 为切线刚度矩阵； \mathbf{K}_0 为小位移刚度矩阵； \mathbf{K}_σ 为初应力刚度矩阵(几何刚度矩阵)； $\bar{\mathbf{R}}$ 为 $t + \Delta t$ 时刻荷载的等效节点力矢量； \mathbf{R} 为 t 时刻内力所产生的等效节点力矢量； \mathbf{B}_{L0} ， \mathbf{B}_{NL} ， \mathbf{D} 分别为线性应变 - 位移转换矩阵、非线性应变 - 位移转换矩阵及切线刚度矩阵； \mathbf{G} 为位移增量梯度矢量与单元节点位移增量矢量之间的转换矩阵； \mathbf{M} 为应力矩阵。上述公式的详细推导见文[9，10]。

2.3 极限状态方程的建立

在边坡稳定的可靠度分析中，首先遇到的是极限状态方程的建立。本文取极限状态方程式为

$$Z = g(X) = F_s(X_1, X_2, \dots, X_n) - 1 \quad (9)$$

式中： F_s 为边坡的安全系数，是土工参数 c ， φ ， γ 等(记为 X_1, X_2, \dots, X_n)的隐函数。本文设土体为理想弹塑性体，采用莫尔 - 库仑屈服准则，由强度折减法求解边坡的整体安全系数。有关强度折减法的详细介绍见文[11]。

2.4 边坡稳定的可靠度分析

在岩土工程的可靠性分析中，常用的方法有均值一次二阶矩法(MFORM)、改进的一次二阶矩法(验算点法AFORM)、蒙特卡罗模拟法(MSCM)。其中，验算点法应用最广。本文即采用验算点法进行边坡的可靠度分析。

设基本变量 X_i 是互为独立的正态变量，由式(9)可知， Z 代表以基本变量 X_i 为坐标的 n 维欧氏空间上的一个曲面。将功能函数在验算点 P^* 展开成泰勒级数，并仅保留其一次项，则可导出可靠指标 β 是标准正态空间坐标系中原点 to 极限状态曲面的最短距离，可用以下方程组迭代求解，得到可靠指标 β 及验算点坐标值 x_1^* ， x_2^* ， \dots ， x_n^* [12]：

$$x_i^* = \mu_{X_i} + \sigma_{X_i} \beta \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10a)$$

$$\alpha_i = - \frac{\left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{P^*} \sigma_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{P^*} \sigma_{X_i} \right)^2}} \quad (10b)$$

$$g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad (10c)$$

式中： $(\cdot)_*$ 为计算偏导数时变量在 P^* 点取值。

当基本变量为非正态基本变量时，需先进行当量正态化处理。当有相关的正态变量时，可先采用正交变换，转换为相互独立的随机变量，再用上述方法进行求解。

3 计算实例及成果分析

为了便于对比，本文选用文[13]之例1作为算例。该均质边坡高 $H = 5\text{ m}$ ，坡比 $V:H = 1:2$ ，粘聚力 $c = 10\text{ kPa}$ ，内摩擦角 $\varphi = 10^\circ$ ，容重 $\gamma = 17.64\text{ kN/m}^3$ 。计算时取 c ， φ ， γ 为互相独立的正态变量。计算结果如图1，2所示。

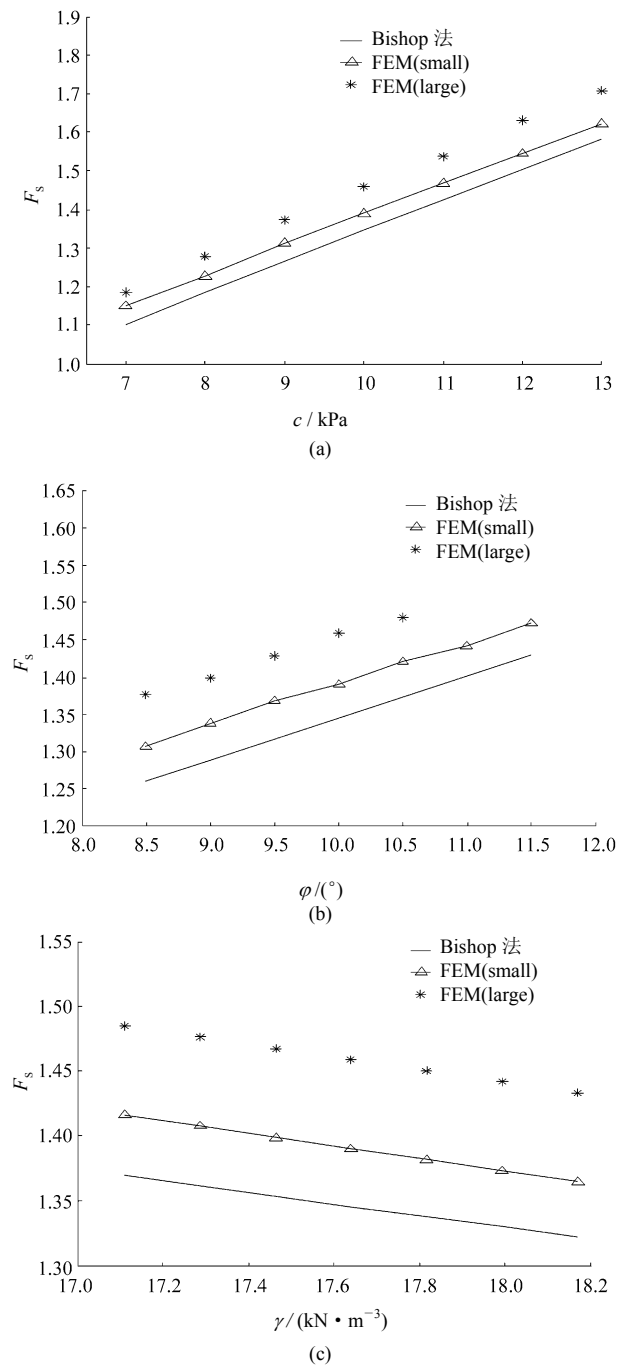


图1 安全系数与土工参数关系曲线

Fig.1 Curves of safety factors and soil parameters

3.1 大、小变形安全系数的对比分析

图1分别绘制了安全系数 F_s 与土工参数 c ， φ ，

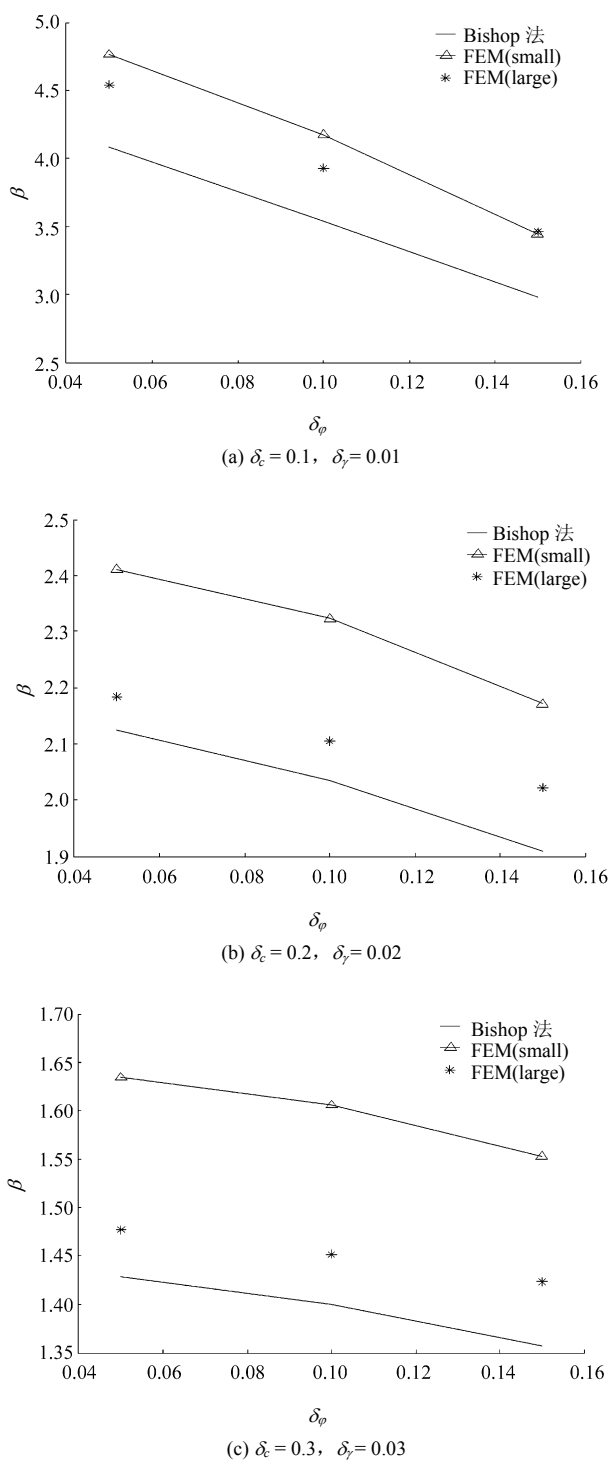


图 2 可靠指标与土工参数变异系数关系曲线

Fig.2 Curves of reliability indexes and coefficient of variations

γ 间的关系曲线。由此可知，本文大变形有限元 (FEM(large)) 和小变形有限元 (FEM(small)) 分析结果与原文中简化 Bishop 法分析结果具有相同的规律，即无论采用何种计算方法，边坡的安全系数均随着粘聚力或内摩擦角的增加而增加，随着容重的增加而减小；但上图中有限元大变形分析所得 F_s - c 曲线

的斜率比其他 2 条曲线的斜率有所增加，也即在这 3 种求解安全系数的方法中，大变形有限元方法计算所得的 F_s 对 c 的敏感性相对最大；对于相同的土工参数，这 3 种方法对应的安全系数大小关系是 F_s [FEM(large)] > F_s [FEM(small)] > F_s [Bishop 法]。可见，在边坡稳定的有限元分析中，若考虑岩土体的大变形性质，计算所得的安全系数将会有所提高。

3.2 大、小变形可靠指标的对比分析

边坡稳定可靠度分析的结果见图 2，图中 δ_c ， δ_ϕ ， δ_γ 分别表示 c ， ϕ ， γ 的变异系数。可见：大小变形有限元可靠度计算结果亦与原文基于简化的 Bishop 法的计算结果一致，而且有限元法的可靠指标均大于简化 Bishop 法的可靠指标，三者之间的大小关系是： β [FEM(small)] > β [FEM(large)] > β [Bishop 法]。其中，有限元大变形分析结果与简化 Bishop 法的结果很接近。

值得注意的是，虽然在定值法分析中，采用有限元大变形分析所得的边坡安全系数比小变形分析的相应值要高，但可靠性分析对应的可靠指标却恰恰相反。其原因是：边坡在临近破坏时，滑面附近土体的变形值很大，只有采用有限元大变形分析方法才能更合理地考虑边坡的真实变形情况。而由图 1 可知，大变形条件下，安全系数 F_s 对 c 值更敏感，也即相应的功能函数值在大变形条件下具有更大的变异性，因此相应的可靠指标有所减小。

因此，当考虑到边坡岩土体的大变形性质时，虽然其安全系数增加，但可靠指标却有所降低，故采用常规的小变形有限元法进行可靠度分析或只进行大变形有限元定值法分析都偏于不安全。

4 结 论

本文基于非线性连续介质力学的基本原理，采用更新的拉格朗日法 (UL 法) 建立了弹塑性大变形有限元分析模型，同时考虑了边坡工程中的材料非线性及几何非线性问题。在此基础上，采用有限元强度折减法计算边坡的安全系数，进行了边坡的有限元可靠度分析。均值土坡稳定性算例分析表明：对边坡进行大变形有限元可靠度分析是可行的，其计算结果与简化的 Bishop 法及常规小变形有限元分析结果类似。但是，大小变形对应的各种情况下的 F_s 及 β 的相对关系却截然相反： F_s [FEM(large)] > F_s [FEM(small)]， β [FEM(large)] < β [FEM(small)]。因此，对边坡采用常规的小变形有限元可靠度方法

进行分析偏于危险,边坡稳定可靠度分析中应考虑相应岩土体的大变形性质。

参考文献(References):

- [1] 陈祖煜. 土质边坡稳定性分析: 原理、方法、程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003. 239 - 248.(Chen Zuyu. Soil Slope Stability Analysis: Theory Method and Programs[M]. Beijing: China WaterPower Press, 2003. 239 - 248.(in Chinese))
- [2] 沈珠江. 应变软化材料的广义孔隙压力模型[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(3): 14 - 21.(Shen Zhujiang. Generalized pore water pressure model of strain softening material[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(3): 14 - 21.(in Chinese))
- [3] 谢永利, 潘秋元, 曾国熙. 物质描述的大变形固结理论及有限元法[J]. 浙江大学学报, 1995, 29(4): 476 - 485.(Xie Yongli, Pan Qiuyuan, Zeng Guoxi. Large-strain consolidation theory and finite element analysis based on the material description method[J]. Journal of Zhejiang University, 1995, 29(4): 476 - 485.(in Chinese))
- [4] 何开胜, 沈珠江. 两种 Lagrangian 大变形比奥固结有限元法及其与小变形法的比较[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(1): 30 - 34.(He Kaisheng, Sheng Zhujiang. The comparison of large strain method using total and updated Lagrangian finite element formulation and small strain method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, 22(1): 30 - 34.(in Chinese))
- [5] 王广国, 杜明芳, 侯学渊. 深基坑的大变形分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(4): 509 - 512.(Wang Guangguo, Du Mingfang, Hou Xueyuan. Large deformation analysis for braced excavation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2000, 19(4): 509 - 512.(in Chinese))
- [6] 李术才, 朱维申, 陈卫忠, 等. 弹塑性大变形有限元方法在软岩隧道变形预估系统研究中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(4): 466 - 470.(Li Shucai, Zhu Weisheng, Chen Weizhong. Application of elasto plastic large displacement finite element method to the study of deformation prediction of soft rock tunnel[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(4): 466 - 470.(in Chinese))
- [7] 施斌, 吴智深, 李琦, 等. 边坡大变形弹塑性有限元分析[J]. 水文地质工程地质, 1999, 26(2): 24 - 26.(Shi Bin, Wu Zhishen, Li Qi. The analysis of large elasto plastic deformation of a slope[J]. Hydrogeology and Engineering Geology, 1999, 26(2): 24 - 26.(in Chinese))
- [8] 周翠英, 刘祚秋, 董立国, 等. 边坡变形破坏过程的大变形有限元分析[J]. 岩石力学, 2003, 24(4): 644 - 647, 652.(Zhou Cuiying, Liu Zuoqiu, Dong Ligu, et al. Large deformation fem analysis of slopes failure[J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, 24(4): 644 - 647, 652.(in Chinese))
- [9] 王焕定, 吴德伦, 林家骥. 有限单元法及程序设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997. 391 - 420.(Wang Huanding, Wu Delun, Lin Jiayi. Finite Element Method and Program Design[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1997. 391 - 420.(in Chinese))
- [10] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988. 482 - 507.(Wang Xucheng, Shao Min. Basic Principle of Finite Element Method and Numerical Method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1988. 482 - 507.(in Chinese))
- [11] 赵尚毅, 郑颖人, 邓卫东. 用有限元强度折减法进行节理岩质边坡稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(2): 254 - 260.(Zhao Shangyi, Zheng Yingren, Deng Weidong. Stability analysis of jointed rock slope by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(2): 254 - 260.(in Chinese))
- [12] 谭晓慧. 多滑面边坡的可靠性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(6): 822 - 825.(Tan Xiaohui. The reliability analysis of a slope with several slide planes[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001, 20(6): 822 - 825.(in Chinese))
- [13] Malkawi A I H, Hassan W F, Abdulla F A. Uncertainty and reliability analysis applied to slope stability[J]. Structural Safety, 2000, 22: 161 - 187.