

边坡稳定性分析的有限元法 与极限平衡法的结合

曾亚武, 田伟明

(武汉大学 土木建筑工程学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 将边坡稳定性分析的有限元法和极限平衡法相结合, 首先对边坡进行有限元分析, 分析边坡应力、应变和位移分布, 然后利用有限元分析计算的应力结果, 通过应力张量变换, 求出条分底部的应力, 并根据极限平衡法的概念得出边坡的稳定性安全系数。该方法既能反映边坡的稳定和变形之间的关系, 又能用工程界所熟悉的安全系数来评价边坡的稳定性, 具有较广泛的应用前景。

关键词: 岩土力学; 边坡稳定性分析; 有限元法; 极限平衡法; 稳定性安全系数

中图分类号: P 642.2

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2005)增 2 - 5355 - 05

SLOPE STABILITY ANALYSIS BY COMBINING FEM WITH LIMIT EQUILIBRIUM METHOD

ZENG Ya-wu, TIAN Wei-ming

(School of Civil Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: A method combining the elastoplastic finite element method (FEM) with the limit equilibrium method is proposed to analyze the slope stability problems. The stress, strain and displacement distributions of the slope are calculated by elastoplastic FEM. Then, the stability factor of safety of the slope is calculated with method of slices based on limit equilibrium in which the finite element computed stresses are used to compute the normal stress and the mobilized shear stress at the base center of each slice. The proposed method can not only consider the influence of the deformation of the slope on the stability, but also evaluate the stability of the slope with single stability factor of safety which is well known in geotechnical engineering. The proposed method will have broad application to the slope stability analysis.

Key words: rock and soil mechanics; slope stability analysis; finite element method(FEM); limit equilibrium method; stability factor of safety

1 引言

当前, 边坡稳定性分析方法主要有两类: 一类为建立在刚体极限平衡理论上的极限平衡法^[1, 2], 另一类为以有限元法为代表的数值计算方法^[2~5]。

极限平衡方法视边坡岩土体为刚体, 不考虑岩土体本身的变形对边坡稳定性的影响, 同时在进行刚体极限平衡分析时, 还必须进行许多简化和假定(如条分法中对条块间力的作用大小和方向的假设), 由此给分析结果带来一定的误差。但因这类方法能给出物理意义明确的边坡稳定安全系数以及可

收稿日期: 2005 - 06 - 26; **修回日期:** 2005 - 07 - 03

作者简介: 曾亚武(1964 -), 男, 博士, 1984年毕业于同济大学地下建筑工程专业, 现任副教授, 主要从事岩土力学与工程及地下建筑工程方面的教学与研究工作。E-mail: zengyw@whu.edu.cn.

能的破坏面，因此这类方法成为边坡稳定性分析中应用最广泛的方法，尤其受到工程界的欢迎。

以有限元为代表的数值计算方法，在边坡稳定性分析中也发挥着十分重要的作用。这类方法不但能考虑边坡岩土体本身的变形对边坡稳定性的影响，而且能给出边坡岩土体中应力应变分布，分析边坡破坏的发生和发展过程等。但是，这类数值方法很难给出一个明确的稳定性安全系数以及可能的破坏面，限制了其在工程中的应用。虽然许多学者致力于解决这个问题，提出了参数折减法等方法，取得了大量成果^[6~9]，但仍然存在一些问题没有解决。

本文尝试将上述两类方法进行结合用于边坡稳定性分析。采用有限元分析方法，计算边坡岩土体内的应力应变以及位移分布。将有限元计算的应力分布结果，通过应力张量变换，求出指定滑动面上的应力分布，然后通过极限平衡法的概念，求出与该滑动面对应的稳定性安全系数。与极限平衡方法一样，可以假定一系列不同的滑动面，搜索得出最小安全系数及其对应的滑动面。这种方法既能反映边坡的稳定和岩土体变形之间的关系，又能用工程界所熟悉的单一安全系数来评价边坡的稳定性，具有较广泛的应用前景。

本文应用上述方法进行了一个边坡算例分析，并将分析结果与各种极限平衡法所得结果进行了比较。

2 基本理论

(1) 弹塑性理论

对弹塑性体^[10]，应力增量与应变增量的关系如下：

$$\{d\sigma\} = [D]_{ep} \{d\varepsilon\} \quad (1)$$

式中： $[D]_{ep}$ 为弹塑性矩阵，且

$$[D]_{ep} = [D] - [D]_p \quad (2)$$

$$[D]_p = \frac{[D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - A} \quad (3)$$

式中： $[D]$ 为弹性矩阵， F 和 Q 分别为塑性屈服函数和塑性势函数。对于关联流动， $F = Q$ ；对于理想塑性材料， $A = 0$ 。

(2) 屈服准则

采用 Mohr-Coulomb 屈服准则，其屈服函数为

$$F = \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin \varphi - \frac{I_1}{3} \sin \varphi - c \cos \varphi \quad (4)$$

式中： $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ，为第一应力不变量； $J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2$ ，为第二应力偏量不变量； $\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right)$ ，为 Lode 角； $J_3 = S_x S_y S_z - S_z S_{xy}^2$ ，为第三应力偏量不变量； c 为材料的粘聚力； φ 为材料的内摩擦角。

在有限元计算中需要计算 $\frac{\partial F}{\partial J_2}$ 和 $\frac{\partial F}{\partial J_3}$ 的值，而

当 $\theta = 0^\circ$ 及 $\theta = 60^\circ$ 时，屈服面出现角点，此时 $\frac{\partial F}{\partial J_2}$ 和 $\frac{\partial F}{\partial J_3}$ 均为无限大，因此需要作如下处理：

当 $\theta = 0^\circ$ 及 $\theta = 60^\circ$ 时，代入式(4)得

$$F = I_1 \sin \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{J_2} (\sin \varphi + 3) - 3c \cos \varphi \quad (\theta = 0^\circ) \quad (5)$$

$$F = I_1 \sin \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{J_2} (\sin \varphi - 3) - 3c \cos \varphi \quad (\theta = 60^\circ) \quad (6)$$

由式(5)，(6)得

$$\frac{\partial F}{\partial J_2} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{J_2}} (3 + \sin \varphi), \quad \frac{\partial F}{\partial J_3} = 0 \quad (\theta = 0^\circ) \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial J_3} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{J_2}} (3 - \sin \varphi), \quad \frac{\partial F}{\partial J_2} = 0 \quad (\theta = 60^\circ) \quad (8)$$

当 $\theta \neq 0^\circ$ 及 $\theta \neq 60^\circ$ 时，由式(4)计算 $\frac{\partial F}{\partial J_2}$ ， $\frac{\partial F}{\partial J_3}$ 。

(3) 稳定性安全系数的定义

因为在有限元分析中可以直接给出网格中单元高斯点或节点上的应力，将任一可能滑面分成若干微段，根据微段底面中心坐标值，通过应力张量变换，可得微段的正应力和剪应力，然后积分或求和求得滑面总下滑力与总阻力。定义边坡稳定性安全系数为总阻力/总下滑力：

$$K = \frac{\sum (c_i + \sigma_i \tan \varphi_i) l_i}{\sum \tau_i l_i} \quad (9)$$

式中： l_i 为微段长度。

(4) 微段底部应力分量 σ_i, τ_i 的求解

第一步: 搜索微段底部中心所在单元。微段底部中心的整体坐标 x, y 与 X, Y 的关系为

$$x = [N]\{X\} \quad (10)$$

$$y = [N]\{Y\} \quad (11)$$

式中: $[N]$ 为插值函数, $\{X\}$ 为微段底部中心所在单元节点的总体 x 坐标, $\{Y\}$ 为微段底部中心所在单元节点的总体 y 坐标。

解式(10), (11)可得 $[N]$ 。 $[N]$ 是在局部坐标系 (r, s) 中定义的, 若满足下列关系, 则微段底部中心在该单元内:

对三角形单元: $0 \leq r \leq 1$ 且 $0 \leq s \leq 1$

对四边形单元: $-1 \leq r \leq 1$ 且 $-1 \leq s \leq 1$

第二步: 求单元节点应力。一般有限元计算中存储的是高斯点的应力, 节点应力为

$$[\sigma_f] = [N][\sigma_F] \quad (12)$$

式中: $[\sigma_f]$ 为单元节点应力, $[\sigma_F]$ 为高斯点应力。

第三步: 求微段底部中心应力。微段底部中心局部坐标在第一步求得, 则

$$\{\sigma\} = [N][\sigma_f] \quad (13)$$

式中: $\{\sigma\}$ 为微段底部中心应力。

第四步: 求微段底部中心正应力和剪应力:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\beta + \tau_{xy} \sin 2\beta \quad (14)$$

$$\tau_i = \tau_{xy} \cos 2\beta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\beta \quad (15)$$

3 算 例

为便于进行分析比较, 本文给出一简化边坡稳定性分析算例。

(1) 工程概况

某粘土质边坡, 坡高 20 m, 坡面水平投影长 40 m, 坡角 26.6°。边坡土层物理力学学参数见表 1。

表 1 边坡土层物理力学参数表

Table 1 Physico-mechanical parameters of soil slope

土层	容重/($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)	粘聚力/kPa	内摩擦角/(°)	弹性模量/kPa	泊松比
粘土	20.0	8.0	30.0	1.0×10^5	0.4

(2) 有限元计算模型

将边坡简化为二维平面应变问题, 计算范围取

坡顶水平延伸 30 m, 坡脚水平延伸 50 m, 垂直向下 20 m。坡体大部分采用八节点四边形等参单元, 坡面部分采用三角形常应变单元。整个计算模型划分为 144 个单元, 453 个节点, 其网格示意图如图 1 所示。

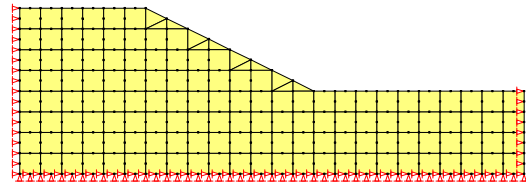


图 1 边坡有限元计算模型示意图

Fig.1 Schematic diagram for the finite element model of the slope

模型左右两边受水平约束, 底边受水平和竖向两方向约束, 为固定端, 如图 1 所示。

(3) 有限元计算结果

有限元计算所得边坡最大正应力等值线图 and 最大剪应力等值线图分别如图 2, 3 所示, 位移矢量图如图 4 所示。

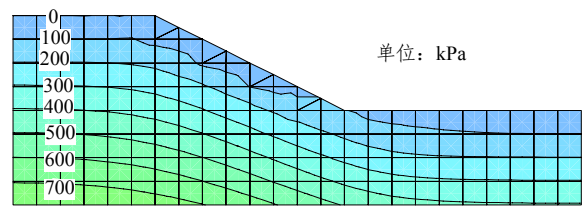


图 2 有限元计算所得边坡最大正应力等值线图

Fig.2 Contours of maximum normal stress calculated by FEM

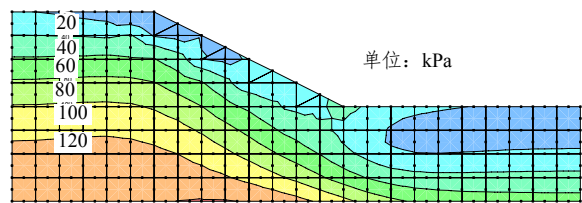


图 3 有限元计算所得边坡最大剪应力等值线图

Fig.3 Contours of maximum shear stress calculated by FEM

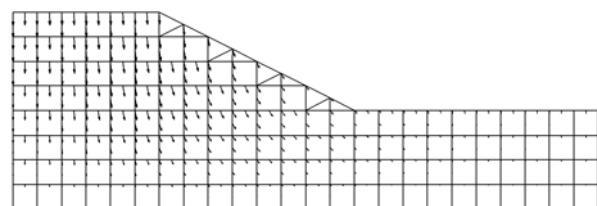


图 4 有限元计算所得边坡位移矢量图

Fig.4 Displacement vectors calculated by FEM

(4) 边坡稳定性安全系数

利用有限元的应力计算结果，根据本文第 2 节所述方法，计算边坡稳定性安全系数。

在引入地下水的作用时，给定的地下水位为：坡面以上边界地下水位位于地面以下 10 m，坡脚地下水位与坡脚地面平齐，计算所得边坡地下水位分布如图 5 所示。

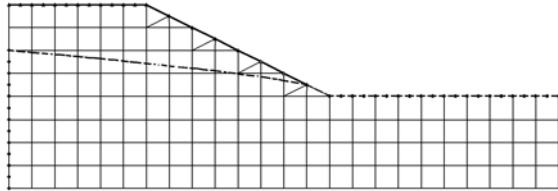


图 5 边坡地下水位分布

Fig.5 Underground water table of the slope

为便于分析比较，在进行边坡稳定性安全系数计算时，采用圆弧搜索法，搜索时指定 1 个圆心、5 种半径，搜索对应的最小安全系数和相应的滑面。搜索结果如图 6 所示，最小安全系数为 1.412。

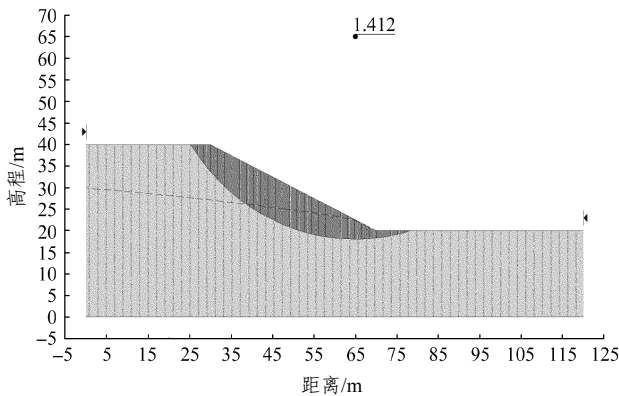


图 6 利用有限元计算结果搜索所得安全系数及滑面

Fig.6 Factor of safety and the slip surface calculated by using FEM calculation results

(5) 与极限平衡法计算结果的比较

采用与前述有限元法相同的计算模型和参数，以及安全系数的搜索方法和范围，利用多种极限平衡法进行边坡稳定性分析，所得最小安全系数对应滑面与有限元法完全相同。各种分析方法搜索的最小安全系数如表 2 所示，其中普通条分法所得安全系数及对应的滑面如图 7 所示。

由图 6, 7 及表 2 可知，根据有限元方法计算结果搜索出的最危险滑面位置与极限平衡法完全相同，但最小稳定性安全系数比各种极限平衡法所得最小安全系数都要大，最大相差 11%(普通条分法)。分析表明：

表 2 各种计算法所得边坡最小安全系数表

Table 2 Safety factors by different methods

计算方法	最小安全系数
普通条分法	1.274
Bishop	1.374
Janbu	1.285
Morgenstern-Price	1.376
Spencer	1.376
GLE	1.376
Corps of Engineer #1	1.379
Corps of Engineer #2	1.406
Lowe-Karafiath	1.384
FEM	1.412

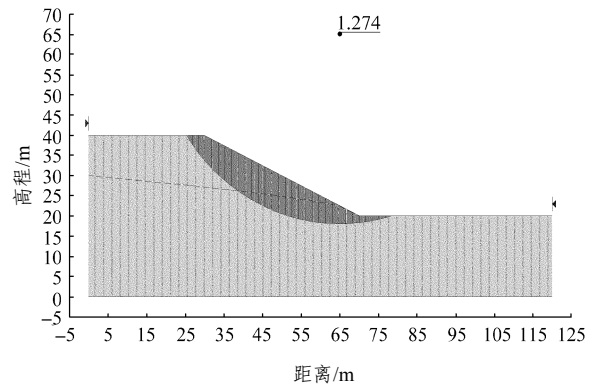


图 7 普通条分法所得安全系数及对应的滑面

Fig.7 Factor of safety and the slip surface calculated by ordinary method of slices

① 极限平衡法在分析计算时均采用条分法，各种方法之间区别就在于条块间相互作用力的大小和方向的假定各不相同，各种假定与工程实际必然存在一定的差距，因此在计算安全系数时不可避免地产生误差。其中普通条分法假定条块间作用力为 0，因此，其计算误差最大。

② 利用有限元法计算所得的应力结果与极限平衡法相结合来计算边坡稳定性安全系数，虽然同样采用条分法，但条块间的相互作用力是根据实际计算得来的，相应地减小了由于假定带来的误差(实际上在安全系数计算时直接利用了条块底部的应力分量)，因此，这样的计算结果应更加符合实际。

③ 利用有限元法应力结果计算所得边坡稳定性安全系数与极限平衡法所得边坡安全系数十分接近，搜索所得危险滑面完全相同，安全系数值稍大，说明本文所采用的将有限元法与极限平衡法相结合

的边坡稳定性分析方法是可行的。

④ 通过比较本文算例结果,发现极限平衡法与有限元法所得边坡安全系数差别不大,尤其是美国陆军工程师团第 2 种方法(Corps of Engineer #2)及 Lowe-Karafiath 法与有限元计算结果更加接近,说明各种极限平衡法在分析本文算例这样的简单边坡时是适用的,且均偏于安全。而对于复杂岩土体边坡,二者之间的结果比较尚需进一步的研究。

4 结 语

本文介绍了一种将边坡有限元应力分析结果与极限平衡法相结合进行边坡稳定性安全系数分析的方法,并通过一个简单边坡算例进行了分析。将分析计算结果与各种极限平衡方法计算结果进行了比较,结果表明:

(1) 本文所介绍的方法用于边坡稳定性分析,主要是通过应力张量变换,求得滑动面上的应力分布,然后通过积分或求和的方法来求解对应滑面稳定性安全系数,这一过程的后半部分与极限平衡法是相同的,但不需假定条块间的相互作用力,计算结果应更加符合实际。

(2) 利用有限元法应力结果计算的边坡稳定性安全系数比各种极限平衡法所计算的边坡安全系数都要大,但针对本文所给的简单边坡算例,差别并不大。这一结果一方面说明,本文采用的有限元法结合极限平衡法来分析边坡稳定性是可行的,既考虑了边坡岩土体变形对稳定性的影响,又能用工程界所熟知的单一安全系数来评价边坡的稳定性;另一方面说明极限平衡法在分析简单边坡时是适用的,且结果均偏于安全。

(3) 值得指出的是,本文为了便于分析比较,所给算例非常简单,安全系数的搜索过程也尽量进行了简化。因此,对于复杂岩土体边坡问题,以及复杂的安全系数搜索过程,本文所给方法的适用性以及计算结果与极限平衡法计算结果的比较尚需进一步研究。

参考文献(References):

[1] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析: 原理·方法·程序[M]. 北京: 中国

水利水电出版社, 2003. 533 - 560.(Chen Zuyu. Soil Slope Stability Analysis: Theory, Methods and Programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003. 533 - 560.(in Chinese))

[2] Duncan J M. State of the art: limit equilibrium and finite element analysis of slope[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1996, 122(7): 577 - 596.

[3] 张季如. 边坡开挖的有限元模拟和稳定性评价[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 843 - 847.(Zhang Jiru. Finite element simulation and stability analysis of slope excavation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(6): 843 - 847.(in Chinese))

[4] 郑宏, 李春光, 李焯芬, 等. 求解安全系数的有限元[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 626 - 628.(Zheng Hong, Li Chunguang, Lee C F, et al. Finite element method for solving the factor of safety[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(5): 626 - 628.(in Chinese))

[5] Griffiths D V, Lane P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. Geotechnique, 1999, 49(3): 387 - 403.

[6] 赵尚毅, 郑颖人, 邓卫东. 用有限元强度折减法进行节理岩质边坡稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(2): 254 - 260.(Zhao Shangyi, Zheng Yingren, Deng Weidong. Stability analysis of jointed rock slope by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(2): 254 - 260.(in Chinese))

[7] 郑颖人, 赵尚毅. 有限元强度折减法在土坡与岩坡中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(19): 3 381 - 3 388.(Zheng Yingren, Zhao Shangyi. Application of strength reduction FEM to soil and rock slope[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(19): 3 381 - 3 388.(in Chinese))

[8] 杨静, 何江达, 胡德金. 土质边坡稳定分析中条分法与有限元法的比较[J]. 四川水力发电, 2003, 22(1): 27 - 29.(Yang Jing, He Jiangda, Hu Dejin. Contrast of slice method with finite element method for earth slope stability analysis[J]. Sichuan Water Power, 2003, 22(1): 27 - 29.(in Chinese))

[9] 李育超, 凌道盛, 陈云敏, 等. 蒙特卡洛法与有限元相结合分析边坡稳定性[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(11): 1 934 - 1 941.(Li Yuchao, Ling Daosheng, Chen Yunmin, et al. Slope stability analysis using Monte Carlo technique with FEM[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(11): 1 934 - 1 941.(in Chinese))

[10] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1998.(Zhu Bofang. Principle and Application of FEM[M]. Beijing: China Water Power press, 1998.(in Chinese))