

对“准脆性材料破裂过程失稳的尖点突变模型”的讨论

DISCUSSION ON “A CUSP CATASTROPHE MODEL OF UNSTABLE FAILURE PROCESS OF QUASI-BRITTLE MATERIALS”

潘岳(PAN Yue), 吴敏应(WU Minying), 王志强(WANG Zhiqiang)

(青岛理工大学 土木工程学院, 山东 青岛 266520)

(College of Civil Engineering, Qingdao Technological University, Qingdao, Shandong 266520, China)

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2008)03 - 643 - 03

贵刊 2006 年第 6 期刊登了张明和李仲奎先生的题为“准脆性材料破裂过程失稳的尖点突变模型”的文章^[1](以下简称原文), 述及岩石等准脆性材料在普通试验机(刚度相材于试验材料不是足够大)上加载时, 由于材料的峰后软化特性, 会导致试验机内弹性能于瞬间释放促成岩样以脆性形式破裂。这种非刚性加载导致岩样失稳破裂的机制, 对于岩爆、冲击地压和地震等岩体系统的突发性动力失稳的研究有重要意义。对原文以上论述笔者表示赞同。

根据原文可知, 在对岩样加载的同时, 试验机机身也在发生变形, 机身处于弹性状态, 其作用相当于一个刚度为 K_m 的弹簧, 试验机压头和岩样间的作用力 $f(u)$ 与反作用力 N 是系统内力, 且有 $N = f(u)$, 试验机油缸活塞端面上的油压力 P 则是系统外力, 如此可得普通试验机 - 岩样系统的分析模型, 如图 1 所示。其中 u 为岩样变形, a 为使岩样产生变形 u 时力 P 作用端的位移, 由此可得机身或弹簧 K_m 的变形:

$$u_m = a - u \quad (1)$$

弹簧轴向力 N 与其变形 u_m 的关系为

$$N = K_m u_m \quad (2)$$

在岩样发生准静态形变时, 图 1 中的弹簧轴向力 N 、变形 u_m , 岩样的承载力 $f(u)$ 及系统外力 P 之间关系为

$$P = N = K_m u_m = f(u) \quad (3)$$

由式(2)可绘出试验机机身的荷载 - 变形关系, 见图 2 中从原点出发、斜率为 $\tan \alpha = K_m$ 的半直线 om , 并绘出岩样的荷载 - 变形关系 $f(u)$, 如图中峰后具有拐点 1 的软化段的曲线所示。

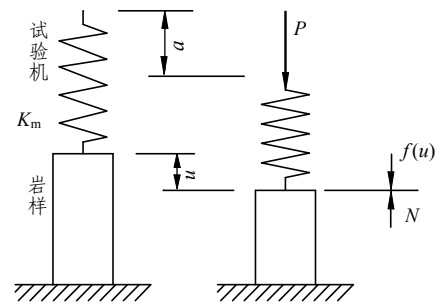


图 1 试验机 - 岩样系统的分析模型
Fig.1 Analytical model of testing machine-rock sample system

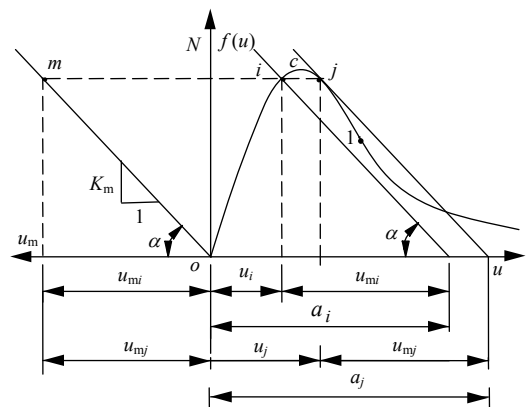


图 2 试验机与岩样的荷载 - 变形关系^[2~4]
Fig.2 Load-deformation relations of testing machine and rock sample^[2~4]

收稿日期: 2008 - 01 - 22

作者简介: 潘岳(1947 -), 男, 1982 年毕业于东北大学力学专业, 现任教授, 主要从事岩体力学方面的教学与研究。E-mail: panyue@qtech.edu.cn

原文根据式(1)中弹簧(机身)的变形 $u_m = a - u$ ，将试验机 - 岩样系统的总势能函数写成：

$$\Pi = \int_0^u f(u) du + \frac{1}{2} K_m (a - u)^2 - Pa \quad (4)$$

进行 $d\Pi/du = 0$ 的运算，在求导时将式(1)中的 P, a 都看成了与 u 无关的量，从而简单地得到

$$\frac{d\Pi}{du} = f(u) - K_m (a - u) = 0 \quad (5)$$

并将式(5)作为试验机 - 岩样系统发生准静态变形时的“平衡方程”，来系统进行稳定性分析。

笔者现就式(4)，(5)等与原文作者商榷。

(1) 变形 u_m 、位移 a 均为岩样变形 u 的函数

岩样变形量 u 除了能表征岩样是处在弹性、硬化或软化状态外，它的突变还表示岩样失稳破裂，在涉及试验机 - 岩样系统动力失稳问题的研究中均用岩样变形 u 作为状态变量。

对于图 2 中 $f(u)$ 曲线峰值前的任一 u_i ，图 2 与式(3)表明有唯一的：

$$u_{mi} = N_i / K_m = f(u_i) / K_m \quad (6)$$

与之对应；将图 2 中半直线 om 平移到 $f(u)$ 曲线上 i 点处，易知又有唯一的：

$$a_i = u_i + u_{mi} = u_i + f(u_i) / K_m \quad (7)$$

与 u_i 对应。

同理，对于图 2 中 $f(u)$ 曲线峰后的任一 $u = u_j$ ，也有唯一的 u_{mj} 和 a_j 与之对应。

由高等数学的函数定义知，在普通试验机上加加载，弹簧变形 u_m 和力 P 作用端位移 a 都是岩样变形 u 的函数，而可以写成 $u_m(u)$ ， $a(u)$ 。

将式(1)代入原文的式(5)，可得

$$f(u) - K_m u_m = 0 \quad (8a)$$

或

$$P = N = f(u) \quad (8b)$$

由于机身刚度 K_m 为常数，由式(8a)得

$$u_m = f(u) / K_m \quad (9)$$

由式(1)得

$$a = u + u_m = u + f(u) / K_m \quad (10)$$

式(9)，(10)表明，即便是按照原文， u_m ， a 仍还是岩样变形 u 的函数。因此，原文中式(4)，(5)将 a 作为常数对待的求导运算有误。

从式(5)，(8)可以看到，原文得到的 $f(u) - K_m(a - u) = f(u) - K_m u_m = 0$ 或 $P = N = f(u)$ ，只是岩样的荷载 - 变形关系，没有提供新的信息量。用荷载 - 变形关系作为“平衡方程”来对试验机 - 岩样系统进行突变理论分析，会造成若干悖谬。

(2) 尖点突变模型与岩样失稳破裂原型的特性比较

原文将试验机 - 岩样系统失稳原型归结为尖点突变模型，如图 3，4 所示。既然如此，该模型展示的任一状态，原型上应有其对应状态，而模型的主要特征在原型上应有所表现。图 3，4 中的系统参数为

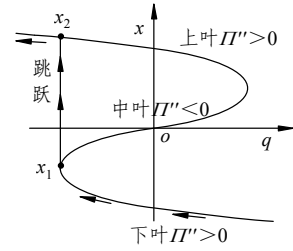


图 3 尖点突变平衡曲面上的一个截面
Fig.3 A section on equilibrium surface of cusp catastrophe model

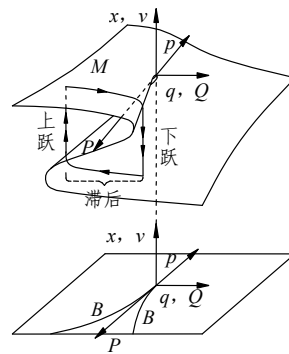


图 4 尖点突变平衡曲面和分岔集
Fig.4 Equilibrium surface and branch collection of cusp catastrophe model

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{6(1-K)f'(u_1)}{f'''(u_1)u_1^2} \\ q &= 6 \frac{f(u_1) + \zeta K f'(u_1)u_1}{f'''(u_1)u_1^3} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\zeta = (a - u_1) / u_1 \quad (12)$$

当参数 q 减小而平衡位置 $x = (u - u_1) / u_1$ 在曲面 M 的下叶上左上行，这在原文中对应着岩样失稳破裂前的系统状态；在临界点 x_1 处，平衡位置跳跃到上叶 x_2 ，对应岩样失稳破裂；在 M 的上叶 q 减小而 x 左上行，对应岩样残余破裂。

根据原文，系统平衡位置 x 只能沿图 3 中箭头指示的路径变化或取值。由于对于同一组参数， (p, q) 或 (K, a) 值尖点突变最多有 3 个状态与之对应，那么图 3 上叶 x_2 以右状态稳定 ($\Pi'' > 0$) 的曲面部分上任一点处的状态，对应图 2 原型中哪一点的状态，中叶的状态对于原型来说有何理论意义，这些都不清楚。图 4 所示曲面 M 上平衡位置 x 向下跳跃到向上跳跃时 q 的滞后特性以及参数变化时上、下叶两个稳定状态 ($\Pi'' > 0$) 可以循环往复实现是尖点突变的基本特征，这在(岩石破裂不可逆的)原型中何有表现，在原文中也没有提到。

尖点突变以上基本性态与特征在原型中都没有，何以能成为岩样失稳破裂原型的模型。突变理论中的任何一个突变模型都具有跳跃性态，包括系统稳定性描述在内的失稳原型

与突变模型之间的主要性状一一相对应, 才是失稳原本质上应当对应的突变模型。

图 5 中弹性直杆件受纵、横力作用。规定杆中点位移 v 以向左为正(挠曲线左凸), 向右为负(挠曲线右凸); Q 以向右为正, P 以向下为正。当 $P = \hat{P}$ 稍大于 Euler 临界力 $P_{cr} = EI\pi^2/L^2$ 而 $Q = 0$ 时, 杆会弯曲(左凸或右凸, 在图 4 中对应曲面 M 的上叶和下叶), 理论上也可能保持直线状态(对应曲面 M 中叶的中间位置), 但直线状态不稳定($\Pi'' < 0$), 稍有干扰杆就会突然左凸或右凸, 而左凸或右凸的状态是稳定的($\Pi'' > 0$)。杆左凸时在其中点作用向右的力 Q , 当 Q 增大到 Q_c 时, 杆会突然右凸(跃到曲面 M 的下叶); 杆右凸时在其中点作用向左的力 Q , 当 Q 向左增大 Q'_c ($Q'_c < 0$) 时, 杆会突然右凸(跃到曲面 M 的上叶)。

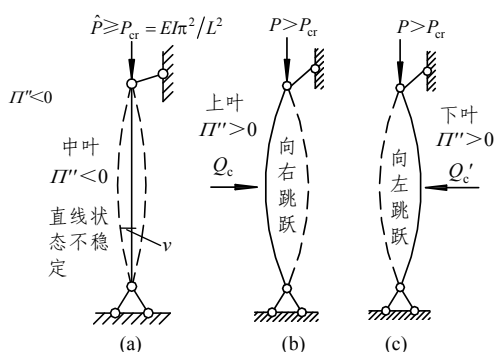


图 5 纵、横力作用下弹性直杆可能具有的几何形状
Fig.5 Possible geometrical forms of elastic straight pole subjected to longitudinal force and lateral force

由上所述可知, 当 $Q = 0$ 时, 对于同一组参数 $(\hat{P}, 0)$, 图 4 所示曲面 M 的上叶、中叶和下叶上共 3 个状态与之对应, 杆左凸与右凸两个稳定的几何形状可以循环往复实现; 杆从左凸跃成右凸时的 $Q_c > 0$, 杆从右凸跃成左凸时的 $Q'_c < 0$, 即具有滞后特性。图 5 所示纵、横力作用下杆件的几何形状特性与图 4 所示平衡曲面 M 展示的性质一一相对应, 它的数学模型才是尖点突变模型。突变理论分类表中每一种突变模型是自然界中本质相同的失稳现象的数学抽象, 而不同的突变模型则是自然界中本质不同的失稳现象的数学抽象。岩石失稳破裂与弹性体系几何形状失稳是本质不同的失稳现象, 不能归结为同一个突变模型进行研究。

(3) 岩样压缩破裂问题的势函数的正确表示

原文给出的势函数有两种形式, 一是以原点 o 为起点的式(4), 二是以 $f(u)$ 曲线软化段拐点 1 为参考点的另一形式。岩样失稳破裂是图 1 中 $f(u)$ 曲线峰后软化段拐点前后的系统行为, 对岩样失稳破裂进行描述的是在拐点 1 处作 Taylor 展开再根据确定性法则截断的幂函数, 而不是以原点

o 为起点写出的全量形式的势函数。严格力学意义上以原点 o 起点的势函数, 弹性理论中是用于描述系统在小变形范围内的弹性行为, 这一点先要弄清楚。由于导函数没有起点, 权且仿照弹性理论以 o 为起点写出一个形式上的势函数, 用它的导函数来研究试验机 - 岩样系统的稳定性。

原文中势函数式(4)中的前两项是以原点 o 为起点写出的, 因此第 3 项自然也应以 o 为起点写出。由于图 1 中 $u = 0$ 时, $P = 0$, $u_m = 0$, 全位移 $a = 0$, 并且荷载 P 从 0 增大时 a 也从 0 增大, 因此 $P(a)$, $a(u)$ 都不是常数。由此看到原文中式(4)右端第 3 项荷载势变化写成 Pa 是有误的。由于 $a(u)$ 是 u 的函数, 故势函数式(4)的第 3 项必须写为积分上限为参变量 $a(u)$ 的积分形式:

$$W = \int_0^{a(u)} P(a) da \tag{11}$$

亦即原文中势函数式(4)的正确写法应当是

$$\Pi = U_f + U_c - W = \int_0^u f(u) du + \frac{1}{2} K_m u_m^2(u) - \int_0^{a(u)} P(a) da \tag{12}$$

在式(12)对 u 作求导运算时, 必须采用复合函数求导法则, 按积分上限为参变量求导法则, 慎重地用其导函数来研究试验机 - 岩样系统的稳定性。

参考文献(References):

[1] 张 明, 李仲奎. 准脆性材料破裂过程失稳的尖点突变模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(6): 1 233 - 1 239.(ZHANG Ming, LI Zhongkui. A cusp catastrophe model of unstable process of quasi-brittle materials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(6): 1 233 - 1 239.(in Chinese))

[2] 唐春安. 岩石破裂过程的试验研究[博士学位论文][D]. 沈阳: 东北大学, 1988: 14, 33, 60, 70, 104.(TANG Chun'an. The experiment study on rock failure process[Ph. D. Thesis][D]. Shenyang: Northeast University, 1988: 14, 60, 70, 104.(in Chinese))

[3] 潘 岳. 岩石破坏过程的折迭突变模型[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(3): 299 - 303.(PAN Yue. Fold catastrophe model of damaging process in rock[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, 21(3): 299 - 303.(in Chinese))

[4] 潘 岳, 王志强, 吴敏应. 岩体动力失稳终止点、能量释放量解析解与图解[J]. 岩土力学, 2006, 27(11): 1 915 - 1 921.(PAN Yue, WANG Zhiqiang, WU Mingying. Analytic solution and illustration on destabilization end and energy releasing amount of rock dynamic destabilization[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(11): 1 915 - 1 921.(in Chinese))