

# 点集表面的共形参数化

岳军<sup>1</sup>, 陈文斌<sup>2</sup>, 沈一帆<sup>1</sup>

(1. 复旦大学计算机科学与工程系, 上海 200433; 2. 复旦大学数学系, 上海 200433)

**摘要:** 基于点的图形系统成为图形学研究中的一个热点。该文介绍了一种无组织点集表面的共形参数化方法, 在该参数化方法中, 传统算法中经常使用的欧氏距离被测地线距离所代替。相对于欧氏距离, 测地线距离能够更好地描述点集所隐含的表面, 减少由点集表面无拓扑性质带来的误差, 保持点集曲面的形状不变, 提高参数化的质量。

**关键词:** 点集表面; 共形映射; 参数化

## Conformal Parameterization for Point Set Surface

YUE Jun<sup>1</sup>, CHEN Wenbin<sup>2</sup>, SHEN Yifan<sup>1</sup>

(1. Dept. of Computer Science and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433; 2. Dept. of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433)

**【Abstract】** Recently point based graphics is becoming one of hot topics in computer graphics. This paper presents a conformal parameterization method for point set surface. In the method, traditional Euclidean distance is replaced by geodesic length. That is based on the observation that geodesic is more appropriate than Euclidean distance in describing the surface implied by the point set. So the error caused by the unorganization feature of point set surfaces is reduced and the parameterization quality is improved.

**【Key words】** Point set surface; Conformal mapping; Parameterization

### 1 概述

基于点的图形系统(Point Based Graphics, PBG)最近几年受到了研究人员的广泛关注。基于点的图形系统就是用点作为图形系统的基本元素, 使用无组织的稠密点集来表示几何曲面。而传统的图形系统通常采用多边形面片作为其基本元素, 使用网格表示几何曲面。推动基于点的图形技术发展的因素主要是三维扫描设备的出现, 该设备能够直接对物体进行扫描以产生由稠密点集表示的模型。另一个原因是在绘制高分辨率的模型时, 一个三角片在屏幕上的绘制区域可能小于一个像素, 这时三角片的作用已经等价于点, 网格已经没有意义了。

目前, 关于基于点的图形系统的工作主要集中在点集模型的渲染、表面的重建和几何处理等方面, 而对于点集表面的参数化的研究还不多。参数化在图形学中是一个非常重要的基础的研究问题, 它在图形学的许多领域, 如纹理贴图、几何处理中扮演重要的角色。

表面的参数化可以被定义为这样一个映射:  $X = f(U), X \in S, U \in U$ , 它是从参数域  $U$  到表面  $S$  的映射。通常,  $S \subset \mathbf{R}^3$ ,  $U \subset \mathbf{R}^2$  并且函数  $f$  必须是连续且一一对应的。表面的参数化总是会产生形变。按照形变度量标准的选取, 参数化方法可以分为 3 类: 保距映射, 共形映射, 保面积映射。本文提出的点集表面的参数化方法是一种共形参数化方法。

共形映射参数化方法的理论基础来源于微分几何和复变函数。如果映射  $f$  在表面任一点  $X$  上由关于参数  $U = (u, v)$  的 2 个切向量是正交的且有相等的模长, 即  $N(u, v) \times \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial v}$ , 那么该映射被称为共形映射。其中,  $N(u, v)$  是点  $X$  在三维表面上的单位法向量。

### 1.1 相关工作介绍

较早把共形映射理论应用于表面参数化的工作由Fiume等人<sup>[2]</sup>完成, 他们使用该方法解决将一块纹理映射到任意多边形的问题。2000年, Haker等人<sup>[6]</sup>使用共形映射来实现纹理映射, 他们使用共形映射将一个简单的闭合曲面(亏格为零)映射到球面上, 即球面参数化, 然后再将纹理映射到球面参数域。Gu和Yau<sup>[4,5]</sup>从微分几何的观点出发提出了一种全局的共形的表面参数化方法。该参数化方法除了在很少几个的零点(Zero Point)之外, 能够在任意的表面上构造共形参数化。另一方面, Lévy等人<sup>[7]</sup>在2002年基于复变函数中的共形映射理论, 使用最小二乘的度量方法来求与圆盘同胚表面的共形参数化, 并将这一方法实际应用于网格模型的纹理图集(Texture Atlas)的生成。

Floater提出了一种无网格参数化方法。该方法被应用于无组织点集隐含表面的B-样条逼近<sup>[12]</sup>和表面重构<sup>[3]</sup>。这一方法将点集表面分为边界点和内部点, 并由用户指定边界点的参数值, 然后使用均值坐标方法计算内部点的参数值。2002年, Zwicker等<sup>[9]</sup>在Pointshop 3D(一个基于点的图形系统)中提出了一种点集表面的参数化方法, 不过该方法同样需要指定某些点的参数值。

### 1.2 概述

上述方法都需要指定一些约束条件, 从而影响了参数化的质量。本文提出的点集表面的参数化方法不需要这些约束条件。此外, 在该方法中使用测地线距离(点集所隐含的光滑表面上两点之间的最短距离)来度量两点之间的距离, 而不是

**基金项目:** 上海市科委科技攻关基金资助项目(045115013)

**作者简介:** 岳军(1981-), 男, 硕士生, 主研方向: 图形学; 陈文斌, 副教授; 沈一帆, 教授

**收稿日期:** 2006-06-30 **E-mail:** yuejun@fudan.edu.cn

通常所采用的欧氏距离。测地线距离具有以下优点：(1)能够更准确地描述点集所隐含的流形外。(2)具有稳定性。即两点之间的测地线距离，在点集密度不同的时候变化较小(如图1(a)、图1(b)所示)。(3)有助于减少错误。如图1(c)所示， $P_i$ 是 $P_0$ 的一个邻居点，而这对于点集表面来说是错误的。当使用欧氏距离参数化时，会产生明显的形变(图1(d))。无组织的点集表面来说难以避免这类错误，但如果使用测地线距离，即使发生这样的错误，形变也能得到最大限度的纠正。图1中曲线为点集所隐含的表面，两点间的曲线长度为其测地线距离，折线为表示欧氏距离。

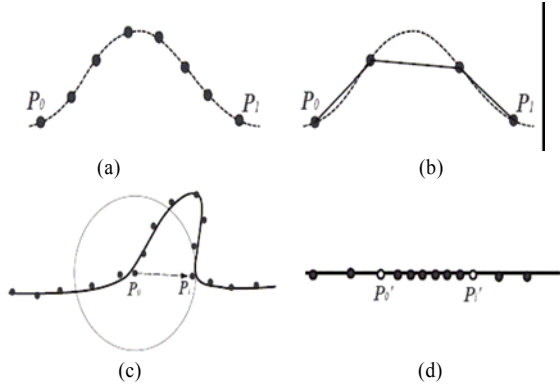


图1 测地线距离与欧氏距离在描述点集所隐含的光滑表面的比较

## 2 点集表面的共形参数化

设输入的点集表面为 $X=\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ 。每个点的邻居点集合为 $K_i=\{X_{i0}, X_{i2}, \dots, X_{ik-1}\}$ 。输出的参数化结果是二维平面上 $X$ 的参数值集合 $U=\{U_0, U_1, \dots, U_{n-1}\}$ ，其中 $X_i=f(U_i)$ ， $i=0, 2, \dots, n-1$ ，映射 $f$ 是连续且共形的。

由共形映射理论可知，如果映射 $f$ 在每个点 $X_i$ 的领域内是共形的，那么 $f$ 是共形映射。因此，把问题转化为求映射 $f$ ，使其在每个点 $X_i$ 的局部切平面内满足共形要求。首先，利用 $X_i$ 对应的法向量 $N_i$ ，可以唯一确定 $X_i$ 的切平面 $T_i$ 。然后，把 $X_i$ 和它的邻居点集 $K_i$ 沿 $X_i$ 的法向量投影到 $T_i$ 上。其中，把 $X_i$ 投影到切平面的原点。直接使用正交投影的结果会产生较大的误差，为了更好地描述点集所隐含的光滑表面，需要对投影做适当的缩放，使得 $X_{ii}$ 投影到原点的距离等于 $X_{ii}$ 到 $X_i$ 的测地线距离。这些邻居点的投影记为 $K'_i=\{X'_{i0}, X'_{i2}, \dots, X'_{ik-1}\}$ 。那么，现在要使映射 $f$ 在 $K'_i$ 和其对应的参数点集 $U_i=\{U_{i0}, U_{i2}, \dots, U_{ik-1}\}$ 之间满足共形。

设 $X_{ii}'=(x_i, y_i)$ ， $U_{ii}=(u_i, v_i)$ ，根据复变函数理论，映射 $f$ 应满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

所以 $f$ 在 $U_i$ 处的偏导满足方程

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2 = 0$$

记为 $h(U_i)=0$ 。

此时，要求在每个点的参数附近尽量满足上式，即可得到一个无约束的优化问题：找 $U$ ，使得

$$\min g(\mathbf{U}) = \sum_{U_i \in U} h(U_i) \quad (1)$$

该目标函数的最优解，即是要求的参数化结果。

## 3 偏导的计算

根据微分原理，偏导满足

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} & \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} & \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} du_i \\ dv_i \end{bmatrix}$$

使用差分近似表示可得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} & \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} & \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ii} - x_i \\ y_{ii} - y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ii} - u_i \\ v_{ii} - v_i \end{bmatrix}$$

其中， $(x_i, y_i)=(0,0)$ 是 $X_i$ 在局部切平面 $T_i$ 上的投影。把 $X_i$ 的所有邻居点在 $T_i$ 上的坐标代入上式，可得最小二乘问题

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} & \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} & \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} & \frac{\partial u_i}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i0} & y_{i0} \\ x_{i1} & y_{i1} \\ \dots & \dots \\ x_{ik-1} & y_{ik-1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta u_{i0} & \Delta v_{i0} \\ \Delta u_{i1} & \Delta v_{i1} \\ \dots & \dots \\ \Delta u_{ik-1} & \Delta v_{ik-1} \end{bmatrix}^T$$

求解上式可得偏导 $\frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial u_i}{\partial y}, \frac{\partial v_i}{\partial x}, \frac{\partial v_i}{\partial y}$ 。需要注意的是，上式右边各项是各点的参数值是未知量，因而偏导是由这些未知量表示的式子。

求得所有点上的偏导后，代入式(1)中，可得

$$\min g(\mathbf{U}) = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \quad (2)$$

其中， $A$ 是一个 $2n \times 2n$ 的稀疏的实对称矩阵， $\mathbf{U}=[u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}]^T$ 。式(2)是无约束的二次型优化问题，第5节将介绍通过添加约束求解该问题的方法。

## 4 测地线距离的计算

在第1节中，介绍了使用测地线距离相对于欧氏距离的优点。计算无拓扑结构的点集上的测地线，可以有多种方法<sup>[8,10]</sup>。但是这些方法都存在计算量过大的问题，并不适用于本文的参数化方法中。因为在本文提出的共形映射参数化方法中，只要求一点与它的邻居点之间的测地线距离，两点之间的距离不太远，两点之间的曲面变化也不太复杂，所以本文采用一种近似的算法。即使用贝塞尔曲线来近似描述两点间的曲面，其长度来近似测地线距离。如图2所示，假设 $p_0$ 和 $p_1$ 互为邻居点，它们的坐标和法向量分别为 $X_0, X_1$ 和 $N_0, N_1$ 。显然，贝塞尔曲线的2个端点应分别为 $p_0, p_1$ 。那么，现在要构造贝塞尔曲线的两个控制点 $p'_0$ 和 $p'_1$ 。以求 $p'_0$ 为例，设 $V=X_1-X_0$ ，并把 $V$ 投影到 $p_0$ 所在的切平面，即 $V'=V-(V \cdot N_0)N_0$ ，然后对 $V'$ 进行缩放，使它的模长等于 $p_0$ 到 $p_1$ 的一半，如图2中的 $T_0$ 。最后， $p'_0$ 的坐标为 $X_0+T_0$ 。类似地，可以求得 $p'_1$ 的坐标。

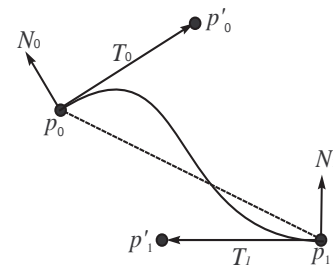


图2 测地线的贝塞尔曲线逼近

根据贝塞尔曲线的性质可知：按照上面方法求出来的贝塞尔曲线通过 $p_0, p_1$ ，且在这2点处垂直于其法向量 $N_0, N_1$ ；曲线在 $p_0, p_1$ 的切向量分别为 $3T_0, -3T_1$ ，且它们分别与

$N_0, \overline{p_1 - p_0}$  和  $N_1, \overline{p_0 - p_1}$  在同一平面内。基于上述性质，再加上  $p_0, p_1$  是隐含表面上相距较近的 2 个点的假设，则认为该贝塞尔曲线可以较好地逼近测地线，同时显著地减少了计算量。最后，近似的测地线距离只须用积分方法对上述贝塞尔曲线求长度即可得到。

## 5 优化问题求解

如前文所述，参数化问题最后归结为求解一个无约束的二次型优化问题式(2)。易知，该优化问题的无法求解。为了使该问题可解，需要设定一些约束条件。可设定的约束有以下 2 种选择：

(1)指定点集表面上若干点的参数值

不失一般性，设  $X_0, X_1, \dots, X_{r-1}$  为设定点，使用拉格朗日乘法，即可得

$$\min g(\mathbf{U}) = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} + \sum_{i=0}^{r-1} (\lambda_i (u_i - a_i) + \lambda'_i (v_i - b_i))$$

其中， $(a_i, b_i)$  为设定点  $X_i$  的参数值， $(u_i, v_i)$  为其对应的参数变量。上式可转化为

$$\min g(\bar{\mathbf{U}}) = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{A}' \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{B}' \bar{\mathbf{U}}$$

这里， $\bar{\mathbf{U}} = [u_0, v_0, \dots, u_{2n-1}, v_{2n-1}, \lambda_0, \lambda'_0, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda'_{r-1}]$ 。

利用  $g'(\bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{0}$ ，即可得到最优解

$$\bar{\mathbf{U}} = (\mathbf{A}' + \mathbf{A}'^T)^{-1} (-\mathbf{B}')$$

该约束条件适用于交互式的参数化，可用于点集表面的纹理贴图等领域，如Pointshop 3D中的参数化应用<sup>[9]</sup>。

(2)设置约束  $\|\mathbf{U}\| = 1$

因为矩阵  $\mathbf{A}$  为实对称阵，所以它有  $2n$  个实特征值，记为  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}$ ，其对应的特征向量为  $V_0, V_1, \dots, V_{2n-1}$ 。 $2n$  维空间中任一可能解  $V$  可表示为

$$V = \sum_{i=0}^{2n-1} a_i V_i$$

如果  $\|V\| = 1$ ，则

$$\|V\|^2 = \sum_{i=0}^{2n-1} a_i^2 = 1 \quad (3)$$

把  $V$  代入式(2)可得

$$g(V) = \sum_{i=0}^{2n-1} a_i^2 \lambda_i$$

易知，在式(3)的约束下，当  $V$  取最小特征值所对应的特征向量时，上式  $g$  可以取得最小值。

然而，矩阵  $\mathbf{A}$  最小的 2 个特征值为 0，它们对应的特征向量把点集  $X$  中的所有点映射参数域的同一点上，所以需要取第 3 小的特征值所对应的特征向量作为最优解。最后需要对该特征向量进行一定的缩放，使其在长度、面积等方面与原点集表面相同。

该约束条件能够使优化问题的求解更自动化，从实验的结果来看，参数化结果在面积上的变化也更小。

## 6 结论

图 3 给出了一些参数化结果。这些结果是从点集模型中截取一部分点集表面，使用第 2 种约束条件参数化后的结果。从中可以看出，本文提出的方法能够生成很好的共形参数化结果，其  $u, v$  参数曲线，在模型表面基本保持正交，保证了参数化过程中曲面形状的稳定。该方法能够广泛用于纹理贴图和几何处理的领域。

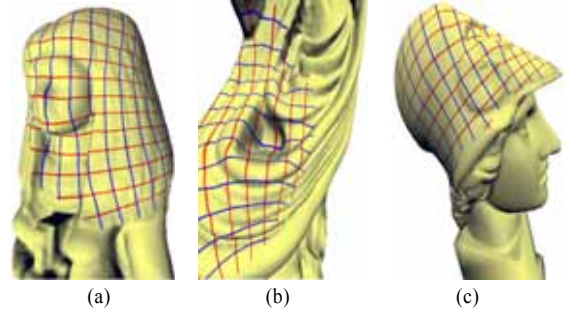


图 3 点集表面参数化结果

在本文提出的共形参数化方法中，测地线的使用能够更准确地描述点模型的流形，以提高参数化的质量。此外，测地线不仅能用于点模型，它在多边形网格的参数化方面也应该有很好的应用。本文使用的贝塞尔曲线逼近方法虽然是基于直觉的，但经过实验，该方法能产生良好的结果。

## 参考文献

- 1 Alexa M, Behr J, Cohen-Or D. Point Set Surfaces[C]//Proceedings of the Conference on Visualization. 2001: 21-28.
- 2 Fiume E, Fournier A, Canale V. Conformal Texture Mapping[C]//Proceedings of Eurographics. 1987: 53-64.
- 3 Floater M S, Reimers M. Meshless Parameterization and Surface Reconstruction[J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(2): 77-92.
- 4 Gu X, Yau S T. Computing Conformal Structures of Surfaces[J]. Communications in Information and Systems, 2002, 2(2): 121-146.
- 5 Gu X, Yau S T. Global Conformal Surface Parameterization[C]//Proceedings of the 1<sup>st</sup> Symposium on Geometry Processing. 2003: 127-137.
- 6 Haker S, Angenent S, Tannenbaum A. Conformal Surface Parameterization for Texture Mapping[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2000, 6(2): 181-189.
- 7 Levy B, Petitjean S, Ray N. Least Squares Conformal Maps for Automatic Texture Atlas Generation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2002, 21(3): 362-371.
- 8 Tenenbaum J B, Silva V D, Langford J C. A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction[J]. Science, 2000, 290(22): 2319-2323.
- 9 Zwicker M, Pauly M, Knoll O. Pointshop 3D: An Interactive System for Point-based Surface Editing[C]//Proceedings of SIGGRAPH'02. 2002: 322-329.
- 10 Memoli F, Sapiro G. Distance Functions and Geodesics on Points Clouds[R]. USA: University of Minnesota, TR1902, 2002.
- 11 Barhak J, Fischer A. Parameterization and Reconstruction from 3D Scattered Points Based on Neural Network and PDE Techniques[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2001, 7(1): 1-16.
- 12 Floater M S. Meshless Parameterization and B-spline Surface Approximation[C]//Proceedings of the 9<sup>th</sup> Conference on the Mathematics of Surfaces. 2000: 1-18.