第十二章　模糊模式识别方法（简介）

§12.1　引言

L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Intormation & Control, v.8, pp.338-353 1965

确定集合（脆集合）：元素或者属于或者不属于集合

模糊集合：　元素以一定的程序属于某集合，

适于表在自然语言变量和常识性知识

几种叫法：模糊集、模糊逻辑、模糊数学、模糊系统、模糊技术、模糊方法

与其它技术相结合：模糊神经网络、模糊控制、模糊模式识别

§12.2　模糊集的基本知识

隶属度函数 $\mu_A(x)$： x 属于集合 A 的程度

自变量：所有可能属于 A 的对象，空间 $X=\{x\}$。

值域：[0，1]， $0 \le \mu_A(x) \le 1$

$$\mu_A(x)=1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$$

$$\mu_A(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A$$

模糊集合：一个定义在 $X=\{x\}$ 上的隶属度函数就定义了一个模糊集合 A，

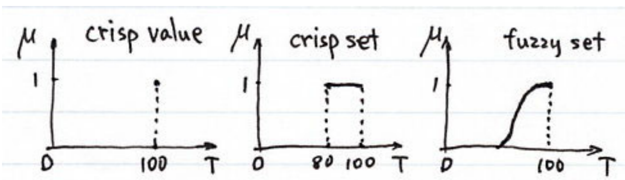
或称定义在空间 $X=\{x\}$ 上的模糊子集，表示为：

$$A=\{(\mu_A(x_i),x_i)\}$$

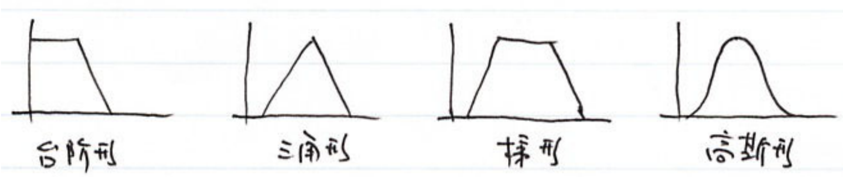
或 $$A=\bigcup_i \mu_i/x_i$$

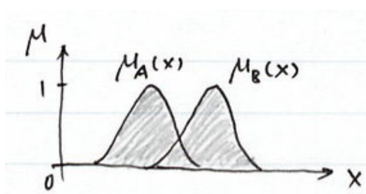
模糊集 A 的支持集 $$S(A)=\{x,x\in X,\mu_A(x)>0\}$$

例：“开水”概念的表达



常见单变量隶属度函数形式：

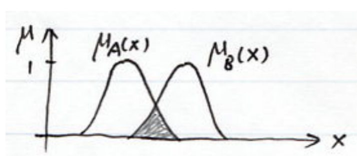




模糊集的运算：

并：$C=A\bigcup B$

$$\mu_c(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$

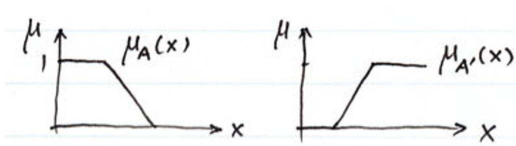


交：$C=A\bigcap B$

$$\mu_c(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$

补：$C=A'$

$$\mu_c(x)=1-\mu_A(x)$$



多变量隶属度函数：可定义为多个单变量隶属度函数的张量积。

$$X=\left[x_1,x_2,\cdots,x_d\right]^T, \qquad A_i \text{ 为对应 } x_i \text{ 的模糊集}$$

$$\mu_A(x)=\mu_{A_1}(x_1)\cdot\mu_{A_2}(x_2)\cdots\mu_{A_d}(x_d)$$

模糊推理：基于模糊集运算和模糊规则的推理。

§12.3　模糊特征和模糊分类

12.3.1　模糊化特征

基本思想：根据一定的模糊化规则

把原来的一个（或几个）特征变量分成多个模糊变量，

使每个模糊特征表达某一局部特性，

利用这些新特征来进行模式识别。

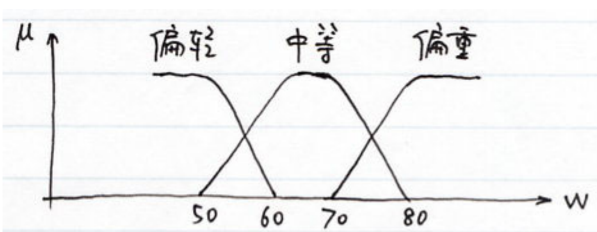
例：

原特征：体重

新特征：“偏轻”、

“中等”、

“偏重”



“1-of-N”编码，常用于 FNN 中

目的：

- 更好地反映问题的本质。
- 原来的非线性问题可能变成线性问题。
- 有效利用了人的知识。

12.3.2 结果的模糊化

使分类器输出不是硬分类，而是给出属于各类的程度。

优点：1. 更好表达分类结果中的不确定性因素，利于根据结果进行决策。

2. 利于后期进一步处理和分析。

结果模糊化的方法：结合知识和所用分类器确定。

如：依据样本离类别中心的距离，离分类面的距离，

与已知样本或类别中心之间相似性度量，

神经网络输出值的大小

等等。

§12.4　特征的模糊评价

12.4.1　模糊程度的度量

模糊度、熵、π 度，用于考查一个模糊集的模糊程度

12.4.2　特征的模糊评价

基本思想：

根据各类已知样本对各个特征定义某种隶属度函数，构造相应的模糊集，用它们的模糊程度定义某种评价指标，用来考查特征的分类性能。

§12.5　模糊聚类方法

12.5.1　模糊 C 均值方法（FCM）

C 均值方法：

把 n 个样本划分到 C 个类中，使各样本与其所在类的均值的误差平方和

$$J_e = \sum_{i=1}^{c} \sum_{y \in \Gamma_i} \left\| y - m_i \right\|^2$$

最小。

把硬分类变成模糊分类，即得模糊 C 均值方法。

符号约定： 样本集 $\{\boldsymbol{x}_i, i=1,2,\cdots,n\}$

聚类中心 $\boldsymbol{m}_j$， $j=1,2,\cdots,c$

$\mu_j(x_i)$：第 i 个样本对于第 j 类的隶各度函数。

聚类损失函数

$$J_f=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_j(\boldsymbol{x}_i)\right]^b\left\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{m}_j\right\|^2$$

其中，$b>1$ 可控制聚类结果的模糊程度。

模糊聚类： $\min J_f$

对不同的隶属度定义，就得到不同的模糊聚类方法。

模糊 C 均值，要求 $\sum_{j=1}^{c}\mu_j(\boldsymbol{x}_i)=1$， $i=1,\cdots,n$

求解：令 $\partial J_f/\partial\boldsymbol{m}_j=0$ 和 $\partial J_f/\partial\mu_j(\boldsymbol{x}_i)=0$，可得

$$\boldsymbol{m}_j=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_j(\boldsymbol{x}_i)\right]^b\boldsymbol{x}_i}{\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_j(\boldsymbol{x}_i)\right]^b}, \quad j=1,\cdots,c$$

$$\mu_j(\boldsymbol{x}_i)=\frac{\left(1/\left\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{m}_j\right\|^2\right)^{1/(b-1)}}{\sum_{k=1}^{c}\left(1/\left\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{m}_k\right\|^2\right)^{1/(b-1)}}, \quad j=1,\cdots,c, \quad i=1,\cdots,n$$

模糊 C 均值算法：

（0）设定聚类数目 c 和常数 b

（1）初始化各聚类中心 $\boldsymbol{m}_j$， $j=1,\cdots,c$（可参考第十章方法）

（2）重复下面的运算，直到各 $\mu_j(\boldsymbol{x}_i)$ 稳定：

2.1　用当前的 $\boldsymbol{m}_j$ 计算 $\mu_j(\boldsymbol{x}_i)$

2.2　用当前的 $\mu_j(\boldsymbol{x}_i)$ 计算 $\boldsymbol{m}_j$

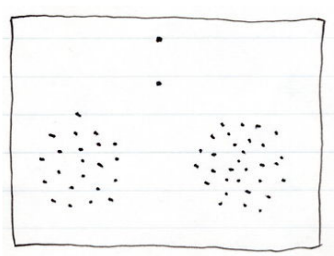
（3）如需要，可对所有模糊聚类去模糊化

12.5.2　改进的模糊 C 均值算法（AFC）

模糊 C 均值算法的一个缺点：

由于 $\sum_{j=1}^{c} \mu_j(x_i)=1$，故对某些野值（本应属于各类的程度都很小），

隶属度可能较大，如：



改进：放松归一化条件为：

$$\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n} \mu_j(\boldsymbol{x}_i)=n$$

于是

$$\boldsymbol{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[\mu_j(\boldsymbol{x}_i)\right]^b \boldsymbol{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \left[\mu_j(\boldsymbol{x}_i)\right]^b}, \quad j = 1, \cdots, c \qquad \text{（不变）}$$

$$\mu_j(\boldsymbol{x}_i) = \frac{n\left(1/\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m}_j\|^2\right)^{1/(b-1)}}{\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n}\left(1/\|\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{m}_k\|^2\right)^{1/(b-1)}}, \quad j = 1, \cdots, c, \quad i = 1, \cdots, n$$

算法步骤与模糊 C 均值相同。

注意：

AFC 所得的 $\mu_j(x_i)$ 可能大于 1，不是严格意义下的隶属度函数。

必要时可做归一化。

特点：

- AFC 有更好的鲁棒，且对给定的聚类数目不十分敏感。
- 但有时可能会出现一个类中只包含一个样本的情况，可通过在距离计算中引入非线性，使之不会小于革值来改进。
- AFC、FCM 与 C 均值一样，依赖于初值。

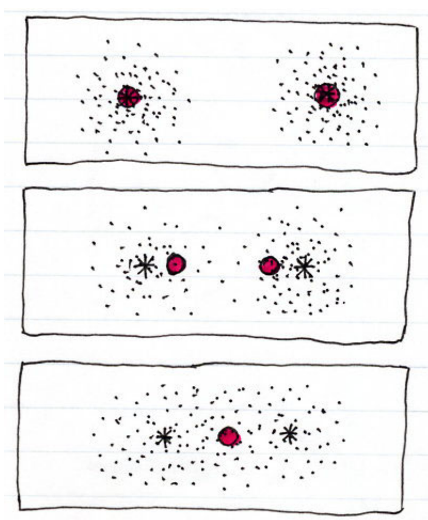
实验效果举例

例一：类别重迭及类别不明显情况

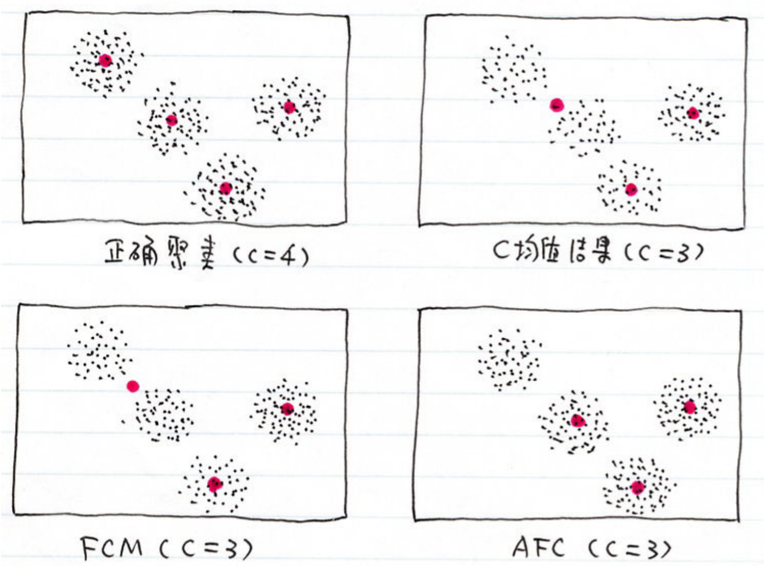
+：C 均值

×：FCM

O：AFC



例二：给定类别数与实际类别数不一致的情况



§12.6 模糊 k 近邻分类器

k 近邻的一个问题：

当样本较稀疏时，只考虑样本近邻顺序而不考虑距离远近是不适当的。

模糊 k 近邻：

在得到 $\boldsymbol{x}$ 的 k 个近邻 $\{\boldsymbol{x}_i, i=1,\cdots,k\}$ 后，用隶属度函数计算 x 属于各类的程度：

$$\mu_j(\boldsymbol{x}_i)=\frac{\sum_{i=1}^{k}\mu_j(\boldsymbol{x}_i)\left[1/\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|^{2/(b-1)}\right]}{\sum_{l=1}^{n}\left[1/\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|^{2/(b-1)}\right]},\quad j=1,\cdots,c$$

其中，$\mu_j(x_i)$ 是 x_i 属于第 j 类的隶属度值。如已知样本确定性分类的，则取 0 或 1。b 的作用于模糊 C 均值中类似。