

二维二通道小波的构造与图像融合应用

刘斌¹, 彭嘉雄²

(1. 湖北大学数学与计算机科学学院, 武汉 430062; 2. 华中科技大学图像识别与人工智能研究所, 武汉 430074)

摘要: 提出了一类新的二维二通道小波的一种构造方法, 并把此类小波应用于图像融合中, 提出了利用小波分解后的低频子图像的梯度图对高频子图像进行融合的图像融合算法, 并采用熵、均方根误差等指标对融合结果图像进行了评价。实验结果表明, 该方法有较好的视觉效果。其融合性能好于采用相同融合算法的基于张量积四通道小波的融合方法, 并能节约 50% 的运算量。

关键词: 图像融合; 二维二通道小波; 梯度图

Construction of Two-dimensional Two-channel Wavelets and Its Application in Image Fusion

LIU Bin¹, PENG Jiaxiong²

(1. School of Mathematics and Computer Science, Hubei University, Wuhan 430062;

2. Institute of Image Recognition & Artificial Intelligence, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

【Abstract】 A construction method of two-dimensional two-channel wavelets is presented. An image fusion method based on this wavelet is proposed. This fusion method uses the gradient map of low-frequency sub-image to merge high-frequency sub-images. The performance of the method is evaluated using the Entropy, error of mean square root. The experiment results show that the method is effective. The performance is better than the fusion method based on separable four-channel wavelets and the amount of computation is reduced to a half of the latter. This method can be used to merge many kinds of image.

【Key words】 Image fusion; Two-dimensional two-channel wavelets; Gradient map

由于张量积小波在信号的时-频处理方面的优越性能, 使得它在诸如图像融合等的图像处理和计算机视觉中得到了广泛的应用^[1]。但由于张量积小波是由一维小波通过张量积的形式生成的二维小波, 它是二维小波中很特殊的一种形式, 而且目前所知的一维小波仅有十几种, 因而张量积小波的种类是非常有限的, 且大部分张量积小波不具有对称性。而非张量积二维小波由于不受张量积的限制, 因而具有更普遍的意义, 其小波的个数是无限的。事实上从目前的二维非张量积小波的设计理论看, 只要设计出一组满足一定条件的滤波器组, 就能获得相应的小波^[2]。我们研究了二维四通道抽样矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的具有紧支撑正交性以及对称性的非张量积小波的构造及其在图像融合中的应用^[2], 但其滤波和抽样方式决定了它在图像融合中存在一些不足: (1) 该方法在对图像进行滤波后, 由于同时对行列进行下 2 抽样, 使得在融合结果图像中有明显的抽样痕迹, 特别是在图像的边缘处抽样痕迹最明显。研究发现, 只有对多聚焦图像的融合, 这种抽样的结果才能被接受, 在对其它类图像的融合时, 只有采用不抽样的小波帧分解才能有较好的融合结果。(2) 相对于二通道小波分解与重构而言, 基于四通道小波分解的图像融合多出近一倍的运算量。基于此, 本文提出了一种二维二通道小波滤波器组的构造方法, 并把它应用于图像融合中。

1 具有紧支撑、正交性的二维二通道非张量积小波

1.1 二维小波变换

设 $x = (x_1, x_2)^T \in \square^2, \psi(x) \in L^2(\square^2)$ 为二维母小波函数, D 为 2×2 抽样矩阵。设 $b = (b_1, b_2)^T \in \square^2$ 为平移向量, 令

$$\psi_{A,b}(x) = \frac{1}{\det(D)} \psi[A^{-1}(x-b)]$$

若 $f(x_1, x_2) \in L^2(\square^2)$, 则其二维小波变换定义为

$$WT_f(A,b) = \langle f(x), \psi_{A,b}(x) \rangle = \frac{1}{a} \iint_{\square^2} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx$$

其中, $a = \det(D)$ 。在离散小波变换时, D 表示小波变换后的抽样(downsampling)方式, 因此 D 也称为抽样矩阵, 如当

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

时, 表示对离散栅格的行和列同时做下 2 抽样, 这是图像处理常采用的方式, 而当

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

时, 表示对离散栅格的梅花型抽样^[3], 此时矩阵 D 的行列式的绝对值为 2, 故有 2 个通道^[4], 1 个低通通道和 1 个高通通道, 相应地有一个尺度函数和 3 个小波函数, 从而有 1 个低通滤波器和 1 个高通滤波器, 此时的尺度函数和小波函数都不能分解为一维的尺度函数和一维的小波函数的张量积, 被称为非张量积小波或不可分的(non-separable)小波。

1.2 二维二通道小波的构造与滤波器组

小波的构造可由多尺度分析(MRA)来实现。一个 $L^2(\square^2)$ 空间的闭子空间序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 生成 $L^2(\square^2)$ 的一个多尺度分析,

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10477007); 湖北省教育厅基金资助重点项目(D200510004); 湖北省自然科学基金资助项目

作者简介: 刘斌(1963-), 男, 教授、博士生, 主研方向: 小波理论与应用, 图像融合, 模式识别; 彭嘉雄, 教授、博导

收稿日期: 2006-06-26 **E-mail:** liub@hubeu.edu.cn

如果下列条件成立：

- (1) $V_j \subset V_{j+1}, \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_{j+1} = \mathbb{L}^2(\square^2)$;
- (2) 如果 $f \in V_j$, 那么 $f(Dx) \in V_{j+1}$;
- (3) $\exists \phi \in V_0, \phi \in \mathbb{L}^2(\square^2), \{\phi(x-k), k \in \square^2\}$ 为 V_0 空间的正交基。

上述条件(3)中的函数称为尺度函数，由定义知：

$\phi \in V_0 \subset V_1$, 因此 ϕ 满足如下的双尺度方程：

$$\phi(x) = \sum_{k \in \square^2} h_0(k) \phi(Dx - k) \quad (1)$$

记 $W_0 = V_1 / V_0$, 即 W_0 为 V_0 在 V_1 中的补空间, 设 W_0 由 $\psi(x)$

通过平移生成, 则有如下的小波双尺度方程

$$\psi(x) = \sum_{k \in \square^2} h_1(k) \phi(Dx - k) \quad (2)$$

记小波低通滤波器为

$$H_0 = \{h_0(k)\}_{k \in \square^2}$$

高通滤波器为

$$H_1 = \{h_1(k)\}_{k \in \square^2}$$

则相应于抽样矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的情形下的Mallat算法, 有如图 1 的图像二通道小波分解和图 2 的重构过程, 其中 A_{j+1}, A_j, A_{j-1} 分别为尺度指标为 $j+1, j, j-1$ 时的图像的近似分量, 即图像的低频成份, D_j, D_{j-1} 分别为尺度指标为 $j, j-1$ 时的图像的细节分量, 即图像的高频成份, D 为抽样矩阵, H_0, H_1 分别为二通道小波分解的低通和高通滤波器, H_0^*, H_1^* 分别与 H_0, H_1 相对应的二通道小波重构低通滤波器和高通滤波器。图 1 中只给出了两层分解, 实际上还可以进行多层小波分解与重构。

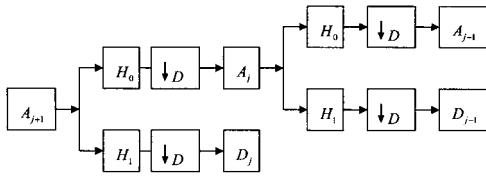


图 1 图像的二通道小波分解

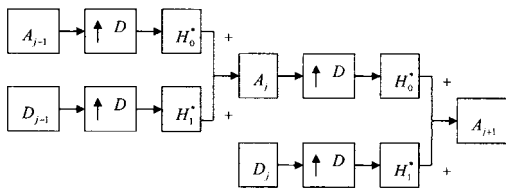


图 2 图像的二通道小波重构

从以上二通道小波多尺度分解的理论可以看出, 小波分解的实质是近似分量图像分别在低通滤波器和高通滤波器的作用下, 分解出低频成份和高频成份; 小波重构的实质是下一层的低频成份和高频成份分别在重构低通滤波器 and 重构高通滤波器的作用下, 把所得的滤波结果相加得到上一层的近似分量。其对小波分解和重构的过程不涉及到尺度函数和小波的具体形式, 因此在诸如图像融合等实际应用的问题中, 主要关心的是如何构造小波低通滤波器和高通滤波器。

若记小波低通滤波器 H_0, H_1 的 Fourier 变换分别为 $m_0(\omega)$

和 $m_1(\omega)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)^T$, 即

$$m_0(x, y) = \sum_{0 \leq j, k \leq L-1} h_0(j, k) x^j y^k, \quad m_1(x, y) = \sum_{0 \leq j, k \leq L-1} h_1(j, k) x^j y^k \quad (3)$$

其中, $x = e^{-i\omega_1}, y = e^{-i\omega_2}, i = \sqrt{-1}$ 。

为了构造二维二通道滤波器组, $m_0(\omega)$ 必须满足两个基本条件^[5]:

- (1) 归一化条件: $m_0(1, 1) = 1$ 。
- (2) 正交性条件: $|m_0(x, y)|^2 + |m_0(-x, y)|^2 = 1$ 。

Qiuhui Chen 等人提出了高维具有正交性、紧支撑的非张量积小波滤波器组的构造方法^[4], 其构造的高维低通滤波器 $m_0(\xi)$ 具有如下频域形式:

$$m_0(\xi) = \frac{1}{S} X(\xi) \prod_{j \in \square_N} (U_j DG(A^T \xi)) \left(\prod_{j \in \square_N} U_{N-1-j}^T \right) V_0, \quad \xi \in \square^d \quad (4)$$

其相应的 $S-1$ 个 CQF 滤波器的形式为

$$m_j(\xi) = \frac{1}{S} X(\xi) \prod_{i \in \square_N} (U_i DG(A^T \xi)) \left(\prod_{i \in \square_N} U_{N-1-i}^T \right) V_j, \quad \xi \in \square^d \quad (5)$$

$(j=1, 2, \dots, S-1)$

在此基础上构造二维二通道滤波器组。设小波变换时的伸缩矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

为构造二维二通道滤波器组, 取 $S=2$, 构造

$$X(x, y) = (1, xy)$$

$$DG(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$$

则二维二通道具有紧支撑、正交性的 $2P \times 2P$ 的滤波器组的形式可构造如下:

$$(m_0(x, y), m_1(x, y)) = \frac{1}{2} (1, xy) \prod_{j=1}^K (U_j DG(x, y) U_j^T) V \quad (6)$$

其中, $x = e^{-i\omega_1}, y = e^{-i\omega_2}, U_j (j=1, 2, \dots, K)$ 为正交阵, $V/2 = (V_0, V_1)/2$ 为正交阵, V_1 为 2×1 向量, $V_0 = (1, 1)^T$ 。

为构造二通道 4×4 的小波滤波器组, 取 $K=2$, 构造:

$$U_j = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_j) & -\sin(\alpha_j) \\ \sin(\alpha_j) & \cos(\alpha_j) \end{pmatrix} (j=1, 2) \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

显然 U_j 为正交矩阵 (α_j 为参数), $V/2$ 为正交阵, 则可构造无穷多个滤波器组, α 取不同的值得到不同的滤波器组, 我们设计了多组具有紧支撑、正交性的小波滤波器组。这里给出如下一组滤波器的时域形式:

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0.4843 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1844 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4898 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1585 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} -0.1585 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3173 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4843 \end{pmatrix} \quad (8)$$

此滤波器组是不可分的, 不能分解为两个一维小波滤波器的张量积, 它是二维二通道非张量积小波滤波器组。

2 融合算法

第 1 步 对参加融合的图像 A 和 B 按图 1 的方式进行二通道小波逐级分解。用第 1 节构造的 2 个 4×4 的滤波器分别对参加融合的两幅图像进行滤波(卷积), 然后对滤波结果图像按矩阵 D 的抽样方式进行梅花型抽样, 得到相应的低频子图 A_j 和高频子图 D_j 。对子图像进行抽样而融合时, 容易产生抽样效应, 在融合结果图像中会留下人工抽样痕迹和块效应, 为了避免这种现象的产生, 我们在对子图像进行融合时采用不抽样的小波帧变换, 即直接对子图像利用融合规则进行融合。

第 2 步 对分解子图像进行融合。记参加融合的图像分别为 A 和 B , 图像 A 在 j 尺度指标下的分解低频子图和高频子图分别记为 AA_j 和 AD_j , 图像 B 在 j 尺度指标下的分解低频子图和高

频子图分别记为 BA_j 和 BD_j ，记 AA_j 与 BA_j 融合生成的结果图像为 FA_j ，记 AD_j 与 BD_j 融合生成的结果图像为 FD_j ，为了更好地获得参加融合图像的高频成份，提出如下的利用低频子图像的梯度图对高频子图像进行融合的方法：

分别用Prewitt算子(或Sobel算子)获得分解低频子图像 AA_j 和 BA_j 的梯度图 AGM 和 BGM ，其过程如下：

高频子图像的融合规则为

$$FD_j(m,n) = \begin{cases} AD_j(m,n) & \text{if } AGM(m,n) \geq BGM(m,n) \\ BD_j(m,n) & \text{if } AGM(m,n) < BGM(m,n) \end{cases} \quad (9)$$

对低频子图像采用取平均值或取最大值的融合方法，即

$$FA_j(m,n) = (AA_j + BA_j) / 2 \quad (10)$$

或

$$FA_j(m,n) = \max\{AA_j, BA_j\} \quad (11)$$

当 (m,n) 遍历所有的点时，就得到融合结果低频子图 FA_j 和高频子图 FD_j 。

第3步 作二通道小波逆变换，重构融合后的图像。由尺度为 j 的层的二个融合结果子图像重构尺度为 $j+1$ 的层的结果低频子图像，重构过程如图2，其中， H_0^* 、 H_1^* 分别为与 H_0 、 H_1 对应的二通道小波重构滤波器。

3 实验结果的评价与分析

3.1 实验结果

图3为可见光图像与红外图像的融合实验。可见光图像有较好的对比度，而红外线对某些物体的反射特点与可见光成像不相同，在红外图像中的某些地方的亮度比可见光图像的亮度效果好，基于这个特点，为了更好地吸收两类图像的亮度特点，对图像分解的低频子图像采用取最大值的融合方法。图3(c)为融合结果图像，其对比度和细节都较清晰，图像视觉效果好。



图3 可见光图像和红外图像的融合

3.2 融合结果客观性能分析

图像的熵值能较好地表示图像中所含信息量的程度，而图像中的高频细节成份越丰富，其所含的信息量就越大，图像越清晰，对比度越高，从而视觉效果好。为了比较融合前后图像所包含的信息量的多少及融合结果图像的视觉效果，采用熵值作为衡量融合效果的一个统计指标^[2]。在多聚焦图像融合中，为了比较融合结果图像与原标准图像的差异，我们选用融合图像与标准图像的均方根误差作为融合效果的另一指标^[2]。图像的熵(Entropy)定义为

$$H = - \sum_{i=0}^{K-1} p(i) \log p(i)$$

其中， K 为图像的灰度级数， $P(i)$ 表示灰度级为 i 的像素数 D_i 与总像素数 D 之比，即 $p(i) = D_i / D$ ， H 越大，表示融合后的图像所含的信息量越大。融合图像 F 和标准图像 S 间的均方根误差定义如式(12)所示。

$$Ermse = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N R(i,j) - F(i,j)^2}{M \times N}} \quad (12)$$

其中， M 、 N 分别为图像的行数和列数。Ermse 越小，表示融合效果越好。

为了看出本文提出的二维二通道非张量积小波的融合效果，把它与四通道的张量积小波的融合方法作对比，为了使滤波器的大小与本文所构造的滤波器大小相同，选用Daubechies所构造的db2小波的一维滤波器构造二维张量积滤波器组，其融合算法与本文融合算法相同，即采用低频分解子图像的梯度图对同层的其它3个高频子图像进行融合，对图像进行小波分解时，也采用不抽样的小波帧方法。其实验结果的值列在表1中。

表1 可见光图像和红外图像融合的熵值

融合方法	融合结果图像	可见光图像	红外图像
二通道小波方法	5.006 2	4.996 2	4.925 5
四通道小波方法	4.990 6	4.996 2	4.925 5

从表1的第2行可以看出，对于二通道小波方法，融合后的图像的熵值比融合前的图像的熵值都高，说明融合后的图像包含更多的信息。从表1的第2列可以看出，本文所提方法的融合方法的熵值比采用相同融合算法的张量积小波的得结果图像的熵值大。说明本文所提方法的融合结果图像含有更多的信息量和较好的视觉效果。

对TM图像、Landset图像与Spot图像的融合、医学图像的融合、航空图像和卫星图像、多聚焦图像的融合实验可得到与上相同的结论。

另外，如图1和图2所示，本文提出的二通道小波分解和重构融合方法只进行两通道的滤波，相对于基于四通道的的小波融合方法而言，它可以节约一半的运算量。再者，小波分解具有分频特性，基于小波分解的图像融合实质上是不同频段子图像的融合，在这点上，基于张量积小波的图像融合与基于非张量积小波的图像融合具有相同的特性。基于二通道小波分解的图像融合与基于四通道小波分解的图像融合有相同的适用范围。本文所提出的融合方法不仅适用于本文实验所示的图像的融合，还适合于其它类图像的融合。

4 结论

本文提出了一种二维二通道小波的构造方法，并把它应用于图像融合中。提出了利用低频子图像的梯度图融合同层的高频子图像的融合算法。融合结果图像有好的视觉效果，从客观性能指标看，本方法可获得更多的信息，其融合效果比采用同样融合算法的四通道张量积小波的融合方法的效果好。本方法有如下特点：(1)视觉效果更自然，无抽样痕迹；(2)能提取参加融合图像的特征；(3)能节约运算量；(4)适用范围广。

参考文献

- Li Hui, Manjunath B S, Mitra S K. Multi-Sensor Image Fusion Using the Wavelet Transform[J]. CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 1995, 57 (3): 235-245.
- Liu Bin, Peng Jiaxiang. Image Fusion Method Based on Non-separable Wavelet[J]. Machine Vision and Application, 2005, 16(3): 189-196.
- Kovačević J, Vetterli M. Non-separable Multidimensional Perfect Reconstruction Filter Bank and Wavelet Bases for \square^n [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 1992, 38(2): 533-555.
- Chen Qihui, Micchelli C A, Peng Silong, et al. Multivariate Filter Banks Having Matrix Factorizations[J]. Siam J. Matrix Anal. Appl., 2003, 25(2): 517-531.
- Daubechies I. Ten Lecture on Wavelets[M]. Vermont: Capital City Press, 1992.