岩石时-温等效原理的理论与实验研究*——

第一部分：岩石时-温等效原理的热力学基础

刘泉声 王崇革
(中国科学院武汉岩土力学研究所 武汉 430071) (山东科技大学基础部力学教研室 泰安 271019)

摘要 第一部分基于不可逆过程热力学内变量理论，对岩石类材料进行了系统的非线性热力学分析，建立了非线性应力-应变-温度方程，得到了岩石时-温等效原理的一般理论表述，由此表明了岩石时-温等效原理的客观存在。

关键词 岩石，时-温等效原理，不可逆过程热力学，主曲线，移位因子
分类号 TU 452 **文献标识码** A **文章编号** 1000-6915(2002)02-0193-06

1 引 言

在高放核废料地下贮存、深部石油开采、地热资源开发和深部采矿等领域，一个很重要的问题就是在一定温度条件下工程围岩的力学性质和力学行为的长期演变规律。尤其是在核废料地下贮存领域，由于核废料的半衰期长达几千年，甚至上万年，其放射性将对周围环境产生深远影响，因此，核废料贮存库的长期安全性更是人们十分关心的问题。核贮库的围岩是吸收放射性核素并阻碍其迁移的最关键部分，其在高温作用下的长期力学性质及力学行为的演变规律对贮存库的选址、设计及长期安全性预测具有决定性的影响，是需要研究的主要问题之一。

研究围岩在一定温度条件下的力学性质及力学行为的长期演变规律，需解决的关键问题是如何将短时间内得到的试验数据和建立的数学模型与计算方法推广应用到预测围岩长时间的力学响应中去，实践证明，借助于时-温等效原理是合理解决这一问题的有效方法之一。

所谓岩石的时-温等效是指岩石在较高温度、较短时间内的力学性质和力学行为与其在较低温度、较长时间内的力学性质和力学行为等效，即通过对岩石的时间尺度与温度尺度的相关变化，达到其力学性质和力学行为的等效性，因而可以方便地在短时间内通过高温试验和理论分析科学地预测岩石长期的力学性质演变规律。

对材料时-温等效原理的研究最早可以追溯到 20 世纪 60 年代。随着研究的深入，人们相继发现了高分子材料的三大力学基本原理，它们是构成线性粘弹性理论的基础，而时-温等效原理正是这三大原理之一。70 年代中期，Williams，Landel 和 Ferry 联合研究发现了高分子材料蠕变柔量和松弛模量曲线在玻璃态转化温度附近的移位因子方程式(即 WLF 方程)，使这一领域的研究达到了成熟和完善的阶段。这在文[1，2]中都已经作了系统的总结；文[3，4]则进一步总结了国际上关于高分子材料考虑温度随时间变化及非均匀温度场的线性热粘弹性问题的时-温等效研究成果。

就岩石类材料而言，虽然国内外在温度效应和时间效应两方面都作了大量的研究，但把这两种效应结合起来研究却做得很少。而将温度效应与时间效应结合在一起考虑，除了文[5，6]提出过以温度代换时间的概念外，截至目前为止尚未见到具体研究成果的报道。

关于岩石的温度效应，文[7]对国际上主要的研究成果进行了总结，主要内容可以概括为三个方面，即岩石变形和岩石强度对温度的依赖性及岩石本构关系对温度的依赖性。关于岩石的时间效应，

2001 年 2 月 7 日收到初稿，2001 年 9 月 27 日收到修改稿。
* 国家自然科学基金资助项目(49772163)。

作者 刘泉声 简介：男，39 岁，博士，1983 年毕业于山东科技大学矿山建设系矿井建设专业，现任研究员，主要从事岩石地下工程稳定性及与核废料地下贮存有关的岩石力学问题研究。

文[8，9]都作了系统的总结，主要研究内容也可概括为三个方面：变形特性和强度特性的时间效应以及考虑时间因素的本构关系。如果把岩石的这两种效应结合起来进行研究，就会发现一个很有趣的现象：升高温度对岩石变形特性和强度特性的影响与延长时间(或降低应变率)对岩石变形特性和强度特性的影响在趋势上完全一致。因此从定性上讲，岩石力学性质的时-温等效原理在一定温度范围内有可能成立。但由于岩石力学性质上的非均匀性、各向异性及非线性，其时-温等效原理的定量描述要比高分子材料困难得多。本文暂不考虑岩石的非均质性和各向异性，假定岩石为连续、均质和各向同性，在非线性条件下，同时考虑温度随时间变化，基于Biot 的不可逆过程热力学内变量理论[10]，对岩石的时-温等效问题进行了较为系统的理论与实验研究。

2 岩石非线性热粘弹热力学分析

2.1 非线性演变方程的建立

现在考虑一个封闭的热力系统，并设该系统的热力状态可由 n 个广义状态变量 q_i (即广义坐标)、绝对温度 θ 和内能 E 来描述。其中广义坐标 $q_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是一组各自独立的运动学参量，亦称“广义流”，它包括外部的可观察状态变量和内部不可观察的状态变量(内变量)。q_i 可以代表应变、晶体的热流及岩石内部结构上发生的不可逆变化等等。前 6 个广义坐标 $q_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ 代表岩石的应变张量 $\varepsilon_{mn}(m=1,\ 2,\ 3,\ n=1,\ 2,\ 3)$，剩余的$(n-6)$个广义坐标 $q_j(j=7,\ 8,\ \cdots,\ n)$ 为不能观察到的岩石的内部状态变量，它也表征着系统内部的自由度。与广义坐标对应的作者将其称之为“广义力” $Q_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。前 6 个广义力 Q_i (i =1，2，…，6)代表岩石的应力张量 $\sigma_{mn}(m=1,\ 2,\ 3,\ n=1,\ 2,\ 3)$ 与内变量相对应的 $(n-6)$ 个广义力 $Q_i(i=7,\ 8,\ \cdots,\ n)$ 则为零。

Biot 利用 Osager 和 Prigogine 在经典不可逆过程热力学研究中建立起来的“力”和“流”的表象关系，引入内变量，建立了线性材料在广义力 Q_i 和温度 θ 作用下 n 个广义坐标 q_i 的运动方程如下：

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_i}+b'_{ij}\ \dot{q}_j=Q_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1}$$

现在讨论岩石基于不可逆过程热力学的非线性热粘弹问题。为了将问题从线性热粘弹性向非线性热粘弹性推广，从运动方程(1)开始讨论，同时引进对系统自由能函数和系数矩阵 b'_{ij} 的限制，并设系统的温度 θ 随时间 t 变化。对它们加以限制是为了从方程(1)中消去内变量，导出明确的应力-应变-温度方程。为了得到这些限制，不失一般性，注意到内变量可以在任何平衡态消去。即当温度为参考温度，也即变温 $\Theta=\theta-\theta_{\rm R}=0$ 时，系统处于平衡状态，此时可消去内变量。

因此，可以将 Helmholtz 自由能函数 ψ 在平衡态附近进行泰勒级数展开，并略去二阶以上的项后可得

$$\psi=\psi_{\rm e}-\eta_{\rm e}\Theta+\frac{1}{2}a'_{rs}\ q_r q_s-d'_r\Theta{\rm d}q_r-\frac{1}{2}\left(\frac{C_{\rm R}}{\theta_{\rm R}}\right)\Theta^2 \tag{2}$$

下标“e”代表平衡态，Θ 为变温 $\theta-\theta_{\rm R}$。设系统有 n 个状态变量，其中 m 个可观察变量，$(n-m)$个相互独立的内变量，取

$$i,\ j=1,\ 2\cdots,\ n$$
$$k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$
$$r,\ s=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n$$

则式(2)的系数分别为

$$a'_{rs}=a'_{rs}(q_k)=a'_{sr}=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial q_r\partial q_s}\right)_{\rm e}$$

$$d'_r=d'_r(q_k)=-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial q_r\partial\theta}\right)_{\rm e}$$

$\psi_{\rm e}=\psi_{\rm e}(q_k)$ 为平衡态的自由能，$\eta_{\rm e}=\eta_{\rm e}(q_k)$ 为平衡态的熵，根据热力学理论有

$$\eta_{\rm e}=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_{\rm e}$$

$$C_{\rm R}=C_{\rm R}(q_k)=-\theta_{\rm R}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right)_{\rm e} \tag{3}$$

式中：a'_{rs}，d'_r 均为非线性项。

将自由能式(2)展开代入运动方程(1)就可得到对应于可观察变量的演变方程为

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\psi_{\rm e}}{\partial q_k}+b'_{kj}\dfrac{{\rm d}q_j}{{\rm d}t}=Q_k+d'_k\,\Theta\\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{array}\right\} \tag{4a}$$

而对应于内变量的演变方程为

$$\left.\begin{array}{l}a'_{rs}\ q_s+b'_{rj}\dfrac{{\rm d}q_j}{{\rm d}t}=d'_r\,\Theta\\ r,\ s=m+1,\ m+2,\ \cdots,n\end{array}\right\} \tag{4b}$$

下面令

$$b'_{ij}=B_{\rm d}(q_k,\ \theta)\,b_{ij} \tag{5a}$$

$$a'_{rs}=A_{\rm f}(q_k)\,a_{rs} \tag{5b}$$

$$d'_i=D_{\rm t}(q_k)\,d_i \tag{5c}$$

式中：$B_{\rm d}$，$A_{\rm f}$，$D_{\rm t}$ 均为非线性系数；b_{ij}，a_{rs}，d_i 均为

线性方程中的系数矩阵。由于引入了式(5)所示的非线性系数，方程(4)就成为在广义力 Q_i 和温度 θ 作用下 n 个广义坐标 q_i 的非线性运动方程。

将式(5)代入式(4)就可得到在广义力 Q_i 和温度 θ 作用下 n 个广义坐标 q_i 的演化方程：

$$a_{ij}\,q_j + b_{ij}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}\gamma} = \tilde{Q}_i + d_i\tilde{\Theta} \tag{6}$$

式中：$\tilde{Q}_i$ 为广义力，

$$\tilde{Q}_i = \frac{1}{A_\mathrm{f}}\left(Q_i + A_\mathrm{f}\,a_{il}\,q_l - \frac{\partial\psi_\mathrm{e}}{\partial q_i}\right) \tag{7}$$

$$\tilde{\Theta} = \frac{D_\mathrm{t}}{A_\mathrm{f}}\Theta \tag{8}$$

且 γ 为“折算时间”，

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{a_{\varepsilon\theta}[q_k,\theta]} \\ &a_{\varepsilon\theta}[q_k,\theta] = \frac{B_\mathrm{d}}{A_\mathrm{f}} > 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中：$a_{\varepsilon\theta}$ 为热力学移位因子。

2.2　非线性演变方程的解及本构方程

现在，需要建立广义力、可观察变量及温度之间的相互关系，然后再将这些广义变量利用做功的关系转换到应力-应变的关系上去。

按照 Biot 所用的线性热粘弹性方程的解法，采用相类似的步骤，并注意到内变量所对应的广义力为零，不难得到非线性热粘弹本构方程如下(求解过程详见附录)：

当 i =1，2，3 时，有

$$\begin{aligned} Q_i = &\frac{\partial\psi_\mathrm{e}}{\partial q_i} - 2A_\mathrm{f}\int_0^t [G(\gamma-\gamma') - G_\mathrm{e}]\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau + \\ &A_\mathrm{f}\int_0^t [K(\gamma-\gamma') - K_\mathrm{e}]\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau - \\ &A_\mathrm{f}\int_0^t \beta(\gamma-\gamma')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{D_\mathrm{t}}{A_\mathrm{f}}\Theta\right)\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{10a}$$

当 i = 4，5，6 时，有

$$Q_i = \frac{\partial\psi_\mathrm{e}}{\partial q_i} + A_\mathrm{f}\int_0^t [G(\gamma-\gamma') - G_\mathrm{e}]\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{10b}$$

式中：G_e 和 K_e 为 Lamé 弹性系数，$e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$，$\gamma = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{a_{\varepsilon\theta}[\varepsilon,\theta(t)]}$，$\gamma' = \int_0^\tau \frac{\mathrm{d}\tau'}{a_{\varepsilon\theta}[\varepsilon,\theta(t)]}$。

$$G(\gamma) = G_\mathrm{e} + \sum_\alpha G^{(\alpha)}\mathrm{e}^{-\lambda_\alpha\gamma} \tag{11a}$$

$$K(\gamma) = K_\mathrm{e} + \sum_\alpha K^{(\alpha)}\mathrm{e}^{-\lambda_\alpha\gamma} \tag{11b}$$

$$\beta(\gamma) = \beta_\mathrm{e} + \sum_\alpha \beta^{(\alpha)}\mathrm{e}^{-\lambda_\alpha\gamma} \tag{11c}$$

2.3　单轴荷载作用下的非线性应力-应变-温度方程

现考虑在单轴荷载作用下的应力-应变-温度方程。设 σ 为作用于试件轴向的压应力，ε 为线应变，在这种情况下，仅有一个可观察状态变量 q 即 ε，与其对应的广义力 Q 即 σ。

由非线性热粘弹本构方程(10)可知，在单轴情况下，非线性热粘弹本构方程为

$$\begin{aligned} Q = &\frac{\mathrm{d}\psi_\mathrm{e}}{\mathrm{d}q} + A_\mathrm{f}\int_{0^-}^t [E(\gamma-\gamma') - E_\mathrm{e}]\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau - \\ &A_\mathrm{f}\int_{0^-}^t \beta(\gamma-\gamma')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{D_\mathrm{t}}{A_\mathrm{f}}\Theta\right)\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{12}$$

又因为外力元功为

$$\delta W = \sigma\delta\varepsilon = Q\delta q = Q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\varepsilon}\delta\varepsilon \tag{13}$$

因此

$$\sigma = Q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\varepsilon} \tag{14}$$

将式(12)代入式(14)得

$$\begin{aligned} \sigma = &\frac{\mathrm{d}\psi_\mathrm{e}}{\mathrm{d}\varepsilon} + A_\mathrm{f}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_{0^-}^t [E(\gamma-\gamma') - E_\mathrm{e}]\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau - \\ &A_\mathrm{f}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_{0^-}^t \beta(\gamma-\gamma')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{D_\mathrm{t}}{A_\mathrm{f}}\Theta\right)\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{15}$$

假设热膨胀系数为 α_e，则

$$\beta(\gamma) = \alpha_\mathrm{e}E(\gamma)$$

式(15)有以下形式

$$\begin{aligned} \sigma = &\frac{\mathrm{d}\psi_\mathrm{e}}{\mathrm{d}\varepsilon} + \frac{A_\mathrm{f}}{2}E_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}\varepsilon} + A_\mathrm{f}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_{0^-}^t E(\gamma-\gamma')\cdot \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(q - \frac{D_\mathrm{t}}{A_\mathrm{f}}\alpha_\mathrm{e}\Theta\right)\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{16}$$

2.4　单轴荷载作用下松弛模量、蠕变柔量的时-温等效

现在来讨论在单轴荷载作用下松弛模量和蠕变柔量的时-温等效问题。在单轴荷载作用下的应力为 σ，应变为 ε，从式(16)的非线性本构方程出发，令

$$\Delta E(\gamma-\gamma') = E(\gamma-\gamma') - E_\mathrm{e} \tag{17}$$

则式(16)变为

$$\begin{aligned} \sigma = &\frac{\mathrm{d}\psi_\mathrm{e}}{\mathrm{d}\varepsilon} + A_\mathrm{f}\int_{0^-}^t \Delta E(\gamma-\gamma') - \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau - \\ &A_\mathrm{f}\int_{0^-}^t \beta(\gamma-\gamma')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{D_\mathrm{t}}{A_\mathrm{f}}\Theta\right)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

式中：$\gamma = \gamma(t)$，$\gamma' = \gamma'(\tau)$ 为折算时间；$\beta(\gamma)$ 为热松弛函数；ψ_e 为平衡态时的 Helmholtz 自由能，是应变 ε 的函数。不妨设

$$\frac{\mathrm{d}\psi_\mathrm{e}}{\mathrm{d}\varepsilon} = A_\mathrm{e}E_\mathrm{e}\varepsilon \tag{18}$$

因此

$$\sigma = A_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{e}}\varepsilon + A_{\mathrm{f}}\int_{0^-}^{t}\Delta E(\gamma-\gamma')\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau - A_{\mathrm{f}}\int_{0^-}^{t}\beta(\gamma-\gamma')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{D_{\mathrm{t}}}{A_{\mathrm{f}}}\Theta\right)\mathrm{d}\tau \tag{19}$$

式中：A_{e}，A_{f}，D_{t} 均为应变 ε 的函数。

下面研究松弛行为：

此时应变 ε 保持为常量，在恒温状态下，绝对温度为 θ，参考温度为 θ_{R}，则变温 $\Theta=\theta-\theta_{\mathrm{R}}$ 亦为常数。且在 $\tau=0$ 时，即初始时刻 $\Theta=0$。因此方程(19)等号右端的第 3 项将消失，而应变为常数，所以除了在 $\tau=0$ 的情况外，$\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}=0$。而在 $\tau=0$ 时的初始时刻往后到 t 的时刻内有

$$\gamma=\int_{0^-}^{t}\frac{\mathrm{d}\tau}{a_{\varepsilon}[\varepsilon,\ \theta]}=\frac{1}{a_{\varepsilon}[\varepsilon,\ \theta]}\int_{0^-}^{t}\mathrm{d}\tau=\frac{t}{a_{\varepsilon}[\varepsilon,\ \theta]} \tag{20a}$$

$$\gamma'=\int_{0}^{t}\frac{\mathrm{d}\tau'}{a_{\varepsilon}[\varepsilon,\ \theta]}=\int_{0}^{0}\frac{\mathrm{d}\tau'}{a_{\varepsilon}[\varepsilon,\ \theta]}=0 \tag{20b}$$

$$\int_{0^-}^{t}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau=\varepsilon=\text{常数} \tag{20c}$$

因此方程(19)变成

$$\sigma=A_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{e}}\varepsilon+A_{\mathrm{f}}\Delta E\left(\frac{t}{a_{\varepsilon}[\varepsilon,\ \theta]}\right)\varepsilon \tag{21}$$

则松弛模量为

$$E_{\mathrm{r}}=\frac{\sigma}{\varepsilon}=A_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{e}}+A_{\mathrm{f}}\Delta E\left(\frac{t}{a_{\varepsilon}[\varepsilon,\ \theta]}\right) \tag{22}$$

这时，因考虑到温度 θ 的影响，而 ε 为常数，所以 $a_{\varepsilon}[\varepsilon,\theta]$ 将不再是应变 ε 的函数，即 $a_{\varepsilon}[\varepsilon,\theta]=a_{\varepsilon}[0,\theta]\equiv a_{\theta}$，此即为在单轴荷载作用下松弛模量时-温等效中的时间坐标移位因子。方程(22)成为

$$E(t,\ \theta)=A_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{e}}+A_{\mathrm{f}}\Delta E\left(\frac{t}{a_{\theta}}\right)= A_{\mathrm{e}}(\theta)E_{\mathrm{e}}+A_{\mathrm{f}}(\theta)\left[E\left(\frac{t}{a_{\theta}}\right)-E_{\mathrm{e}}\right]= \left[A_{\mathrm{e}}(\theta)-A_{\mathrm{f}}(\theta)\right]E_{\mathrm{e}}+A_{\mathrm{f}}(\theta)E\left(\frac{t}{a_{\theta}}\right)$$

令 $A_{v}(\theta)=A_{\mathrm{e}}(\theta)-A_{\mathrm{f}}(\theta)$，则

$$E(t,\theta)=A_{v}(\theta)E_{\mathrm{e}}+A_{\mathrm{f}}(\theta)E\left(\frac{t}{a_{\theta}}\right)$$

当 $A_{\mathrm{e}}=A_{\mathrm{f}}$ 时，$A_{v}(\theta)=0$，则上式成为

$$E(t,\ \theta)=A_{\mathrm{f}}(\theta)E\left(\frac{t}{a_{\theta}}\right) \tag{23}$$

式中：A_{f} 即为垂直修正因子，a_{θ} 为将时间水平移位的因子。由此式可知，在某一温度条件下的应力松弛过程，可以用不同温度下的模量-时间曲线叠合而得到，先作出不同温度下的 $\log E(t,\theta)$ - $\log t$ 曲线，经过水平移位和垂直修正后，就可得出参考温度 θ_{R} 下的一条主曲线。这样就可以用岩石短时间、高温下的力学行为去描述较长时间、较低温度情况下的力学响应。

由前面的热力学理论及熵不等式的应用，经过繁琐的数学推导，可得出类似于式(19)的单轴荷载作用下的非线性本构方程，只不过是用应力 σ 来描述应变：

$$\varepsilon=B_{\mathrm{e}}J_{\mathrm{e}}\sigma+B_{\mathrm{f}}\int_{0^-}^{t}\Delta J(\mu-\mu')\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau- B_{\mathrm{f}}\int_{0^-}^{t}\beta(\mu-\mu')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{C_{\mathrm{t}}}{B_{\mathrm{f}}}\Theta\right)\mathrm{d}\tau \tag{24}$$

式中：B_{e}，B_{f}，C_{t} 均为应力 σ 的函数。

由式(24)研究岩石的蠕变行为，此时应力 σ 保持为常量，在恒温 θ 下，除了在 $\tau=0$ 的情况下，$\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}\equiv 0$，因此，类似于式(21)的推导，式(24)有以下形式：

$$\varepsilon=B_{\mathrm{e}}J_{\mathrm{e}}\sigma+B_{\mathrm{f}}\Delta J\left(\frac{t}{a_{\sigma}[\varepsilon,\ \theta]}\right)\sigma \tag{25}$$

类似于松弛模量的讨论，不难得到蠕变模量 J 的表达式为

$$J(t,\ \theta)=B_{\mathrm{f}}(\theta)J\left(\frac{t}{a_{\theta}}\right) \tag{26}$$

式中：B_{f} 仍为垂直修正因子，a_{θ} 仍为时间 t 的水平移位因子。由此看出式(26)与式(23)有非常类似之处。

至此，从理论上阐明了岩石类材料时-温等效原理的客观存在性。

附录　非线性演变方程的求解及本构方程

在本文第一部分，为了节省篇幅省略了非线性演变方程(6)的求解过程。现对其求解如下：

$$a_{ij}q_{j}+b_{ij}\frac{\mathrm{d}q_{j}}{\mathrm{d}\gamma}=\tilde{Q}_{i}+d_{i}\tilde{\Theta} \tag{F1}$$

$$\gamma=\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{a_{\varepsilon\theta}[\varepsilon,\ \theta(t)]}$$

$$\tilde{Q}_i=\frac{1}{A_{\mathrm{f}}}\left(Q_i+A_{\mathrm{f}}a_{il}q_l-\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)$$

$$\tilde{\Theta}=\frac{D_{\mathrm{t}}}{A_{\mathrm{f}}}\Theta$$

按照 Biot 线性热粘弹性方程的解法[10]，步骤相类似，只须将线性问题的折算时间换成相应的非线性问题中的折算时间γ，将线性问题的广义力Q_i换成非线性问题中的广义力$\tilde{Q}_i$，并将线性问题中的变温Θ换为非线性问题的变温$\tilde{\Theta}$，并注意到内变量所对应的广义力为零。将方程(F1)利用分块矩阵可写成

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}^{(1)}\\ \boldsymbol{q}^{(2)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\boldsymbol{q}^{(1)}\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\boldsymbol{q}^{(2)}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{Q}}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{G}}^{(1)}\\ \tilde{\boldsymbol{G}}^{(2)}\end{bmatrix}\tag{F2}$$

系数子阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{M}$均为文[10]中线性方程的系数矩阵。

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}=\begin{bmatrix}\tilde{Q}_i\\ \vdots\\ \tilde{Q}_m\end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{G}}^{(1)}=\begin{bmatrix}d_1\tilde{\Theta}\\ \vdots\\ d_m\tilde{\Theta}\end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{G}}^{(2)}=\begin{bmatrix}d_{m+1}\tilde{\Theta}\\ \vdots\\ d_n\tilde{\Theta}\end{bmatrix}$$

对于子系统$q^{(2)}$，因$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}q_{m+1},\cdots,\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}q_n$均参与产熵，有

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{q}^{(2)}+\boldsymbol{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\boldsymbol{q}^{(2)}=0\tag{F3}$$

系数矩阵$\boldsymbol{M}$仍为正定阵。相应的有特征值$\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_{n-m}$，与$(n-m)$个特征值相对应的特征向量设为$\boldsymbol{u}^{(1)},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}^{(n-m)}$，即

$$\boldsymbol{u}=[u^{(1)},\ u^{(2)},\ u^{(3)},\cdots,\ u^{(n-m)}]\tag{F4}$$

再引入正则坐标V，有

$$\boldsymbol{q}^{(2)}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{V}\tag{F5}$$

并定义$n\times n$矩阵：

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{u}\end{bmatrix}\tag{F6}$$

式中：$\boldsymbol{I}$为$(m\times m)$的单位阵，且有如下关系：

$$\boldsymbol{u}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}^{(1)}\\ \boldsymbol{V}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}^{(1)}\\ \boldsymbol{V}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}^{(1)}\\ \boldsymbol{q}^{(2)}\end{bmatrix}\tag{F7}$$

与上式相对应的拉氏变换为

$$\boldsymbol{u}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{q}}^{(1)}\\ \bar{\boldsymbol{V}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{q}}^{(1)}\\ \bar{\boldsymbol{V}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{q}}^{(1)}\\ \bar{\boldsymbol{q}}^{(2)}\end{bmatrix}\tag{F8}$$

对式(F2)进行拉氏变换，令$p'=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}=a_{\varepsilon\theta}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{q}}^{(1)}\\ \bar{\boldsymbol{q}}^{(2)}\end{bmatrix}+p'\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{q}}^{(1)}\\ \bar{\boldsymbol{q}}^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\tilde{\boldsymbol{Q}}}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\tilde{\boldsymbol{G}}}^{(1)}\\ \bar{\tilde{\boldsymbol{G}}}^{(2)}\end{bmatrix}\tag{F9}$$

将式(F9)左乘$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$，并利用文[10]中的有关式子有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+p'\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}\boldsymbol{u}+p'\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+p'\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Lambda}+p'\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{q}}^{(1)}\\ \bar{\boldsymbol{V}}\end{bmatrix}=$$

$$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{\tilde{\boldsymbol{Q}}}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{\tilde{\boldsymbol{G}}}^{(1)}\\ \bar{\tilde{\boldsymbol{G}}}^{(2)}\end{bmatrix}\tag{F10}$$

式中：$\boldsymbol{\Lambda}$为对角阵，然后展开上式，解出$\bar{\boldsymbol{V}}$，并代入式(F10)，可得

$$\begin{aligned}\bar{\tilde{\boldsymbol{Q}}}=&(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}})^{-1}\Big\{\boldsymbol{A}+p'\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{E}+p'\boldsymbol{R})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\Lambda}+p'\boldsymbol{I})^{-1}\cdot\\ &\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+p'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})\Big\}\bar{\boldsymbol{q}}^{(1)}-\bar{\tilde{\boldsymbol{G}}}^{(1)}+(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{E}+p'\boldsymbol{R})\cdot\\ &\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\Lambda}+p'\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\bar{\tilde{\boldsymbol{G}}}^{(2)}\end{aligned}\tag{F11}$$

进一步利用文[10]中的结果，则式(F11)可写成

$$\bar{\tilde{Q}}_i=\sum_{j=1}^{m}S_{ij}^{(*)}\bar{q}_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}^{\circ(*)}\bar{\tilde{\Theta}}\tag{F12a}$$

式中：

$$S_{ij}^{(*)}=C_{ij}^{(*)}+p'C_{ij}^{(*)'}+\sum_{\alpha=1}^{n-m}\frac{C_{ij}^{(*)(\alpha)}}{p'+\lambda_\alpha}\tag{F12b}$$

$$\beta_{ij}^{\circ(*)}=\beta_{ij}^{(*)}+\sum_{\alpha=1}^{n-m}\frac{\beta_{ij}^{(*)(\alpha)}}{p'\lambda_\alpha}\tag{F12c}$$

将本文第一部分式(7)的拉氏变换形式代入式(F5)可得

$$\bar{Q}_i=\frac{\partial\bar{\psi}_{\mathrm{e}}}{\partial q_i}-A_{\mathrm{f}}\,a_{il}\,\bar{q}_l+A_{\mathrm{f}}\sum_{j=1}^{m}S_{ij}^{(*)}\bar{q}_j^{(1)}+A_{\mathrm{f}}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}^{\circ(*)}\Theta\tag{F13}$$

利用文[10]，并引进类似于弹性体 Lamé 系数G，K，则对式(F13)逆变换可得到非线性热粘弹本

构方程。当 i =1，2，3 时，有

$$Q_i=\frac{\partial\psi_{\mathrm{e}}}{\partial q_i}-A_{\mathrm{f}}a_{il}q_l+2A_{\mathrm{f}}\int_0^t G(\gamma-\gamma')\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau+A_{\mathrm{f}}\int_0^t K(\gamma-\gamma')\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau-A_{\mathrm{f}}\int_0^t\beta(\gamma-\gamma')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{D_{\mathrm{t}}}{A_{\mathrm{f}}}\Theta\right)\mathrm{d}\tau \qquad \text{(F14a)}$$

当 i = 4，5，6 时，有

$$\overline{Q}_i=\frac{\partial\overline{\psi}_{\mathrm{e}}}{\partial q_i}-A_{\mathrm{f}}\,a_{il}\,q_l+A_{\mathrm{f}}\int_0^t G(\gamma-\gamma')\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \qquad \text{(F14b)}$$

式中：$e=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$，$\gamma=\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{a_{\varepsilon\theta}[\varepsilon,\ \theta(t)]}$，$\gamma'=\int_0^\tau\frac{\mathrm{d}\tau'}{a_{\varepsilon\theta}[\varepsilon,\ \theta(t)]}$，式(F14)中的 a_{il} 为线弹性模量矩阵，可用 Lamé 弹性系数 G_{e} 和 K_{e} 表示，因此式(F14)又可写成，当 i =1，2，3 时，有

$$Q_i=\frac{\partial\psi_{\mathrm{e}}}{\partial q_i}-2A_{\mathrm{f}}\int_0^t\left[G(\gamma-\gamma')-G_{\mathrm{e}}\right]\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau+A_{\mathrm{f}}\int_0^t\left[K(\gamma-\gamma')-K_{\mathrm{e}}\right]\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau-A_{\mathrm{f}}\int_0^t\beta(\gamma-\gamma')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{D_{\mathrm{t}}}{A_{\mathrm{f}}}\Theta\right)\mathrm{d}\tau \qquad \text{(F15a)}$$

当 i = 4，5，6 时，有

$$Q_i=\frac{\partial\psi_{\mathrm{e}}}{\partial q_i}+A_{\mathrm{f}}\int_0^t\left[G(\gamma-\gamma')-G_{\mathrm{e}}\right]\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \qquad \text{(F15b)}$$

$G(\gamma)$，$K(\gamma)$，$\beta(\gamma)$ 有以下的形式：

$$G(\gamma)=G_{\mathrm{e}}+\sum_\alpha G^{(\alpha)}\mathrm{e}^{-\lambda_\alpha\gamma} \qquad \text{(F16a)}$$

$$K(\gamma)=K_{\mathrm{e}}+\sum_\alpha K^{(\alpha)}\mathrm{e}^{-\lambda_\alpha\gamma} \qquad \text{(F16b)}$$

$$\beta(\gamma)=\beta_{\mathrm{e}}+\sum_\alpha \beta^{(\alpha)}\mathrm{e}^{-\lambda_\alpha\gamma} \qquad \text{(F16c)}$$

参 考 文 献

1 Ferry J D. Viscoelastic Properties of Polymers[M]. 3rd ed.，New York：John Wiley，1980

2 阿克洛尼斯 J J，麦克奈特 W J. 聚合物粘弹性引论[M]. 北京：科学出版社，1986

3 Christensen R M. Theory of Viscoelasticity[M]. Berlin：Springer-Verlag，1982

4 Ziegler H. An Introduction to Thermodynamics[M]. Amsterdam：North Holland Pub. Co.，1997

5 Paterson M S. Experimental Rock Deformation-Brittle Field[M]. Berlin：Springer-Verlag，1978

6 王绳祖. 高温高压岩石力学发展中的若干问题[A]. 见：中国岩石力学与工程学会高温高压岩石力学专业委员会编. 第一届高温高压岩石力学学术讨论会论文集[C]. 北京：学术期刊出版社，1988，1～7

7 Heuze F E. High-temperature mechanical，physical and thermal properties of granitic rocks—a review[J]. Int. J. Rock Mech. Min. Sic. and Geomech. Abstr.，1983，20(1)：3～10

8 陈宗基. 地下巷道长期稳定性的力学问题[J]. 岩石力学与工程学报，1982，1(1)：1～20

9 Roger I. Engineering Rheology[M]. London：Oxford Press，1985

10 Biot M A. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena[J]. J. Appl. Phys.，1954，25(11)：1 385～1 391

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY ON TIME-TEMPERATURE EQUIVALENT PRINCIPLE FOR ROCK

Liu Quansheng[1]，Wang Chongge[2]

([1]*Institute of Rock and Soil Mechanics*，*The Chinese Academy of Sciences*，*Wuhan*　430071　*China*)

([2]*Shandong University of Science and Technology*，*Taian*　271019　*China*)

Abstract　Based on the theory of irreversible process thermodynamics，non-linear thermodynamic analysis is engaged in，and non-linear stress-strain-temperature equations are established. Thus，general expression for time-temperature equivalent principle is theoretically obtained.

Key words　rock，time-temperature equivalent principle，irreversible process thermodynamics，principal curve，displacement factor