

随机场理论在抗剪强度指标统计中的应用

朱红霞, 闫澍旺

(天津大学 建筑工程学院, 天津 300072)

摘要: 根据土力学关于地基承载力等课题的基本假定, 土的抗剪强度指标是描述均匀土体平均强度趋势的参数, 统计时应计算其一定空间范围的均值及其均值方差, 因而有必要将随机场理论引入抗剪强度指标的统计方法, 并考虑土性指标的自相关性及互相关性。以抗剪强度指标的传统统计方法为基础, 结合随机场理论, 提出抗剪强度指标的随机场统计方法, 在抗剪强度指标统计时既考虑单个指标的自相关性, 又考虑指标之间的互相关性; 并且不必分别研究 c , $\tan\varphi$ 的自相关函数及互相关函数, 而是通过回归直接得到其均值方差, 使计算大为简化。最后, 通过天津新港的工程算例, 进一步说明用此统计方法得到的可靠度指标与工程的实际安全程度相对应, 且较传统的统计方法更为合理。

关键词: 土力学; 抗剪强度指标; 随机场; 可靠度; 相关性

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2008)增 1 - 3040 - 07

APPLICATION OF RANDOM FIELD THEORY TO STATISTICS FOR SHEAR STRENGTH INDEXES

ZHU Hongxia, YAN Shuwang

(College of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: In the reliability analysis of foundations, one of the most important problems is how to choose the reasonable statistical method for shear strength indexes of soils. According to the basic assumption of some topics in the soil mechanics, the indexes of shear strength are the parameters describing the trend of average strength of homogenous soils. The mean values and variance of local spatial averaging of soil properties should be used in the reliability analysis. So it is necessary to introduce the random field theory into the statistics for shear strength indexes and to consider the auto-correlation and cross-correlation of the shear strength indexes of soils. The stochastic statistical methods for shear strength indexes are presented based on the traditional statistical methods. Both the auto-correlation of the individual index and the cross-correlation between the indexes can be considered when using the methods. In addition, there is no need to study the auto-correlation function and cross-correlation function of c and $\tan\varphi$ respectively. The variance of spatial averaging of c and $\tan\varphi$ can be obtained directly through regression. The process of calculation will be simplified by this means. Finally, by calculating an example of engineering in Tianjin Port, it is proven that the reliability indexes calculated by the stochastic statistical methods agree well with the reliability of practical engineering.

Key words: soil mechanics; shear strength indexes; random field; reliability; correlation

收稿日期: 2006 - 12 - 08; **修回日期:** 2007 - 04 - 08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50379034); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助课题(20020056012)

作者简介: 朱红霞(1979 -), 女, 2002年毕业于天津大学海洋工程专业, 现为博士研究生, 主要从事软土工程性质及地基可靠度理论方面的研究工作。E-mail: kellyrain@you.com

1 引言

随着概率统计理论在岩土工程中的应用, 如何选择合理的土性指标统计方法成为地基可靠度分析面临的主要问题之一。与人工材料不同, 土的性质既有天然的变异性又有一定的相关性, 因此岩土工程中的可靠度分析必须要考虑土性指标的相关性。这种相关性包括两方面, 即同一土性指标的自相关性与不同土性指标间的互相关性。

在关于土的自相关性研究中, Vanmarcke(1976)将随机场理论引入岩土工程的可靠度分析之中, 建立了土性剖面的随机场模型, 即将土性剖面看作在空间上分布的随机场。这是符合土的性状的, 这样处理可使问题大为简化。

对于土的抗剪强度指标的相关性问题, 不同的学者有不同的考虑方法。包承纲等^[1, 2]建议在指标统计时考虑自相关性; 而对互相关性, 则在计算过程中加以考虑。抗剪强度指标统计时可采用传统法或高大钊提出的综合回归方法^[3]。传统法即分组求出黏聚力 c 和内摩擦角的正切 $\tan \varphi$ 后计算均值和方差, 然后根据随机场理论求得均值方差; 综合回归方法是在各试验样本独立条件下, 将所有试验数据作为一个样本, 一次求得 2 个指标的均值与均值方差。无论是采用传统法还是综合回归方法, 在实际应用中都有一定的困难。因为传统法在由子样方差求均值方差时, 必然要研究 c , $\tan \varphi$ 的自相关及互相关函数, 这无疑增加了许多工作量; 若采用综合回归方法, 只有各抗剪强度试验子样相互独立时, 回归得到的才是黏聚力和内摩擦角的正切的均值方差; 且研究表明此法适用于求 τ , p 的回归系数的估计值 $\tan \varphi$, c 的方差情况, 不能得到反映土的 $\tan \varphi$, c 的变异性的方差^[4]。

1989 年黄传志、孙万禾根据 $\tan \varphi$, c 相关的概念, 考虑相关因素, 提出了简化相关法。此法与现今港口工程地基规范^[5]采用的 τ 平均法是一致的。这种方法在假定 $\tan \varphi$, c 独立的情况下, 将 2 个土性指标的互相关性的影响通过回归自动反映在子样方差中。因此, 在进行土工可靠度计算时, 就不用考虑指标间的互相关性。但是, 这种方法没有考虑抗剪强度指标的自相关性。

本文首先以抗剪强度指标的传统统计方法为基础, 引入随机场理论, 提出抗剪强度指标的随机场

统计方法, 使之不必分别研究 c , $\tan \varphi$ 的自相关函数及互相关函数, 而是通过回归直接得到均值方差, 使计算大为简化; 同时, 将随机场理论引入简化相关法和正交变换法, 在抗剪强度指标统计时既考虑单个指标的自相关性, 又考虑指标之间的互相关性, 从而使土工可靠度计算更加合理、简便。

2 抗剪强度指标的随机场统计方法

2.1 随机场理论的引入

土是自然历史的产物, 地质成因条件的影响使土的性质与位置有关。为了使模拟土的性质概率模型更符合实际, 有必要引入随机场理论, 把土性指标看成是随空间位置而变化的一族随机变量, 即在空间上分布的随机场。适用这种需要而在近年由 Vanmarcke(1976)发展的土性剖面的随机场模型, 为解决这类问题的概率模拟, 提供了一个有效的工具。

工程实践中应用的随机场可看作齐次随机场, 其均值 $E[Y(P)]$ 是一个与坐标无关的常数, $Y(P)$ 为随机函数, P 表示空间一个点, 相关函数 $R(P, P') = E[(Y(P) - \mu)(Y(P') - \mu)]$ 是一个仅依赖于向量 $\overline{PP'}$ 的函数, 而与点 P 的位置无关, 即有 $R(P, P') = R(\overline{PP'})$ 。为简单起见, 只讨论一维各向同性的齐次随机场, 这是符合土的实际情况的。此时, $Y(P)$ 可用 $Y(z)$ 来表示, 而且总是假定 $E[Y(z)] = 0$ 。

一维齐次随机场在 $[z, z+h]$ 上的随机积分为

$$Y_h(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} Y(z) dz \quad (1)$$

该随机积分的均值为

$$E[Y_h(z)] = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} E[Y(z)] dz = 0 \quad (2)$$

该随机积分的方差为

$$\text{Var}[Y_h(z)] = \sigma^2 \left[\int_0^h \left(1 - \frac{\tau}{h}\right) \rho(\tau) d\tau \right] \quad (3)$$

令

$$\Gamma^2(h) = \frac{\text{Var}[Y_h(z)]}{\sigma^2} = \frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\tau}{h}\right) \rho(\tau) d\tau \quad (4)$$

式(3)建立了局部空间平均的方差与子样的点方差 σ^2 之间的关系。 $\rho(\tau)$ 为相关函数, $\Gamma^2(h)$ 为 $[0, 1]$ 之间的一个系数, 表明空间平均方差小于点方差, 因此可称为方差折减函数。方差折减的程度取决于 h 和相关函数 $\rho(\tau)$, 当 h 足够大时, $h\Gamma^2(h) = \delta$, δ

称为相关距离，在该距离内，土性强烈相关，大于该相关距离可认为基本不相关。在实际计算中，一般采用如下简化公式^[6]：

$$\Gamma^2(h) = \begin{cases} 1 & (h \leq \delta_u) \\ \frac{\delta_u}{h} & (h \geq \delta_u) \end{cases} \quad (5)$$

2.2 抗剪强度指标按随机场统计的传统法

将随机场理论引入抗剪强度指标的传统统计方法，在指标统计时考虑自相关性的影响。

首先取 $n(i=1 \sim n)$ 组抗剪强度数据，每组数据对应 $k(j=1 \sim k)$ 级荷载。即对某些特定的压力 p_j ($j=1, 2, \dots, k$)，给出相应的若干组抗剪强度 τ 的试验值 $\tau_{ij}(i=1, 2, \dots, n)$ 。按照莫尔强度包线：

$$\tau = c + p\theta, \text{ 这里为方便起见，记 } \theta = \tan \varphi。$$

(1) 抗剪强度指标的均值统计

由式(1)可知，随机场的局部平均 $Y_h(z)$ 的均值和原来的随机场 $Y(z)$ 的均值一样。所以，抗剪强度指标的均值按传统法、综合回归方法或 τ 平均法统计均可，研究表明，这3种统计方法的均值相同^[4]。 $\tan \varphi$ ， c 的平均值 $\mu_{\tan \varphi}$ ， μ_c 的计算公式分别为

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\tan \varphi} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tan \varphi_i \\ \mu_c &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi_i &= \frac{\sum_{j=1}^k (p_j - \mu_p) \tau_{ij}}{\sum_{j=1}^k (p_j - \mu_p)^2} \\ c_i &= \mu_{\tau_i} - \mu_p \tan \varphi_i \\ \mu_p &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k p_j \\ \mu_{\tau_i} &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \tau_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

式中： $\tan \varphi_i$ 为每组试验的 $\tan \varphi$ 的回归值， c_i 为每组试验的 c 的回归值， μ_p 为每组试验各级垂直压力 p_j ($j=1 \sim k$) 的均值， μ_{τ_i} 为每一组试验 ($i=1 \sim n$) 各级压力 ($j=1 \sim k$) 下抗剪强度 τ_{ij} 的平均值。

(2) 抗剪强度指标的方差统计

设 $\tan \varphi$ ， c 是平稳随机过程，且是联合平稳的，则在 $[z, z+h]$ 上相应的随机积分分别为

$$\left. \begin{aligned} \tau_h(z) &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \tau(z) dz \\ c_h(z) &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} c(z) dz \\ \theta_h(z) &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \theta(z) dz \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

对任一个确定的 p 值， τ 也是平稳过程，且有

$$\tau_h(z) = c_h(z) + p\theta_h(z) \quad (8)$$

取方差运算可得

$$\begin{aligned} \sigma_\tau^2 \Gamma_\tau^2(h) &= \sigma_c^2 \Gamma_c^2(h) + p[\sigma_{c\theta} \Gamma_{c\theta}^2(h) + \\ &\quad \sigma_{\theta c} \Gamma_{\theta c}^2(h)] + p^2 \sigma_\theta^2 \Gamma_\theta^2(h) \end{aligned} \quad (9a)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_\tau^2(h) &= \frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\alpha}{h}\right) \rho_\tau(\alpha) d\alpha \\ \Gamma_c^2(h) &= \frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\alpha}{h}\right) \rho_c(\alpha) d\alpha \\ \Gamma_\theta^2(h) &= \frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\alpha}{h}\right) \rho_\theta(\alpha) d\alpha \\ \Gamma_{c\theta}^2(h) &= \frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\alpha}{h}\right) \rho_{c\theta}(\alpha) d\alpha \\ \Gamma_{\theta c}^2(h) &= \frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\alpha}{h}\right) \rho_{\theta c}(\alpha) d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

式中： σ_τ^2 ， σ_c^2 ， σ_θ^2 分别为 τ ， c ， θ 的“点”方差； $\sigma_{c\theta} = \sigma_{\theta c}$ 为 c 与 θ 的“点协方差”； ρ_τ ， ρ_c ， ρ_θ 分别为 τ ， c ， θ 的相关函数； $\rho_{c\theta}$ ， $\rho_{\theta c}$ 分别为 c 和 θ ， θ 和 c 的互相关函数。

通常按照传统法，对任一个 i ，由 $(p_j, \tau_{ij})(j=1, 2, \dots, k)$ ，可确定出一个 c_i 和 θ_i 。因此从理论上说，由 c_i 和 θ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 可确定 σ_c^2 ， σ_θ^2 ， $\sigma_{c\theta}$ ， $\sigma_{\theta c}$ 及 $\rho_c(\alpha)$ ， $\rho_\theta(\alpha)$ ， $\rho_{c\theta}(\alpha)$ ， $\rho_{\theta c}(\alpha)$ ，进一步可得到方差函数 $\sigma_c^2 \Gamma_c^2(h)$ ， $\sigma_\theta^2 \Gamma_\theta^2(h)$ 及协方差函数 $\sigma_{c\theta} \Gamma_{c\theta}^2(h)$ ， $\sigma_{\theta c} \Gamma_{\theta c}^2(h)$ 。这样做到了在抗剪强度指标统计时考虑自相关性，但要想在可靠度计算中考虑互相关性，就不可避免地要去研究互相关函数。这无疑会给计算增加许多工作量。

一般来说，实际问题中的 z ， h 总是确定的， $c_h(z)$ ， $\theta_h(z)$ 就退化为随机变量。因此，从实用的角度考虑，可不必分别获得 σ_c^2 ， σ_θ^2 ， $\sigma_{c\theta}$ ， $\sigma_{\theta c}$ 及 $\rho_c(\alpha)$ ， $\rho_\theta(\alpha)$ ， $\rho_{c\theta}(\alpha)$ ， $\rho_{\theta c}(\alpha)$ ，而只需根据式(9a)，直接回归得出 $\sigma_c^2 \Gamma_c^2(h)$ ， $\sigma_\theta^2 \Gamma_\theta^2(h)$ 及 $\sigma_{c\theta} \Gamma_{c\theta}^2(h) + \sigma_{\theta c} \Gamma_{\theta c}^2(h)$ 就可用于可靠度的计算。

实际计算中，可先按照考虑自相关性的方法求出

k 个 $\sigma_{\tau_j}^2 \Gamma_{\tau_j}^2(h)$, 然后利用数据 $(p_j, \sigma_{\tau_j}^2 \Gamma_{\tau_j}^2(h)) (j=1, 2, \dots, k)$, 按式(9a)进行二项式的回归计算, 这用计算机程序很容易实现。

值得注意的是, 在统计 $\sigma_{\tau_j}^2$ 时, 所用到的 τ_{ij} 应该是修正过的值, 即用每组回归出的 $c_i, \theta_i (i=1 \sim n)$, 把每组数据 $\tau_{ij} (j=1 \sim k)$ 都修正到 $\tau_{ij} = c_i + p_j \theta_i$ 直线上。认为每组数据都严格服从库仑定律, 此时, 式(9a)才成立。

下面讨论如何求 $\Gamma_{\tau_j}^2(h)$ 。根据随机场理论, $\Gamma_{\tau_j}^2(h)$ 可按式(5)求得。那么理论上首先要根据试验所得的特定压力 p_j 下对应的抗剪强度 τ_{ij} , 分别求出对应的相关距离 δ_{uj} 。但是考虑到这 $n(i=1 \sim n)$ 组试验样本应来自于同一土层母体, 因此用不同压力 p_j 下对应的抗剪强度 τ_{ij} 求得的相关距离值应该是相等的, 即只有一个相关距离 δ_u 。进而利用式(5)求得的 $\Gamma_{\tau_j}^2(h)$ 也应该是相等的, 即 $\Gamma_{\tau_j}^2(h) = \Gamma_{\tau}^2(h)$ 。实际计算中, 相关距离 δ_u 可近似地取为平均值, 即

$$\delta_u = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \delta_{uj} \quad (10)$$

这种土性指标的随机场统计方法考虑了指标的自相关性, 而互相关性可根据回归得到的 $\sigma_{c\theta} \Gamma_{c\theta}^2(h) + \sigma_{\theta c} \Gamma_{\theta c}^2(h)$ 进一步在可靠度计算中考虑。

2.3 抗剪强度指标按随机场统计的简化相关法

将随机场理论引入简化相关法(τ 平均法), 在考虑抗剪强度指标互相关性的同时, 考虑自相关性的影响。

抗剪强度指标均值的统计与节 2.2 的统计方法相同, 下面讨论方差的统计。在用 JC 法计算可靠度时, 考虑将 $c_h(z), \theta_h(z)$ 作为独立的随机变量, 因此式(9a)可化为

$$\sigma_{\tau}^2 \Gamma_{\tau}^2(h) = \sigma_c^2 \Gamma_c^2(h) + p^2 \sigma_{\theta}^2 \Gamma_{\theta}^2(h) \quad (11)$$

比较式(9a)及式(11)可看出, 2 个土性指标的互相关性的影响可通过式(11)的回归自动反映在均值方差中。

先按照节 2.2 考虑自相关性的方法求出 k 个 $\sigma_{\tau_j}^2 \Gamma_{\tau_j}^2(h)$, 然后利用数据 $(p_j^2, \sigma_{\tau_j}^2 \Gamma_{\tau_j}^2(h)) (j=1, 2, \dots, k)$, 按式(11)用最小二乘法进行回归计算, 得到 $\sigma_c^2 \Gamma_c^2(h)$ 和 $\sigma_{\theta}^2 \Gamma_{\theta}^2(h)$ 的表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta}^2 \Gamma_{\theta}^2(h) &= \frac{1}{\Delta} \left(k \sum_{j=1}^k p_j^2 \sigma_{\tau_j}^2 \Gamma_{\tau_j}^2(h) - \sum_{j=1}^k p_j^2 \sum_{j=1}^k \sigma_{\tau_j}^2 \Gamma_{\tau_j}^2(h) \right) \\ \sigma_c^2 \Gamma_c^2(h) &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sigma_{\tau_j}^2 \Gamma_{\tau_j}^2(h) - \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k p_j^2 \right) \sigma_{\theta}^2 \Gamma_{\theta}^2(h) \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

其中,

$$\Delta = k \sum_{j=1}^k p_j^4 - \left(\sum_{j=1}^k p_j^2 \right)^2 \quad (12b)$$

这样得到的 $\sigma_c^2 \Gamma_c^2(h)$ 和 $\sigma_{\theta}^2 \Gamma_{\theta}^2(h)$ 可作为相互独立的随机变量直接应用于可靠度的计算, 而不必在可靠度计算中再考虑土性指标间互相关性的影响。

2.4 抗剪强度指标按随机场统计的正交变换法

规范^[5]中规定, 可靠度计算时也可采用正交变换法。此法通过正交变换, 消除了 $\tan \varphi$ 与 c 之间的互相关性, 使抗剪强度指标可直接应用于可靠度的计算。但是, 此法仍未考虑指标的自相关性。下面将随机场理论引入正交变换法, 使其在考虑抗剪强度指标自相关性的同时, 消除互相性的影响。

与节 2.2 类似, 首先利用数据 $(p_j, \sigma_{\tau_j}^2 \Gamma_{\tau_j}^2(h)) (j=1, 2, \dots, k)$, 按式(9a)进行回归计算, 可得到 $\sigma_c^2 \Gamma_c^2(h), \sigma_{\theta}^2 \Gamma_{\theta}^2(h)$ 及 $\sigma_{c\theta} \Gamma_{c\theta}^2(h) + \sigma_{\theta c} \Gamma_{\theta c}^2(h)$ 。令

$$p_s(h) = \frac{\sigma_{c\theta} \Gamma_{c\theta}^2(h) + \sigma_{\theta c} \Gamma_{\theta c}^2(h)}{2\sigma_{\theta}^2 \Gamma_{\theta}^2(h)} \quad (13)$$

作以下变换:

$$c'_h(z) = c_h(z) - p_s(h) \theta_h(z)$$

$$\theta_h(z) \equiv \theta_h(z)$$

则易证 $c'_h(z)$ 与 $\theta_h(z)$ 是不相关的, 且有

$$\left. \begin{aligned} E[c'_h(z)] &= \mu_c - p_s(h) \mu_{\theta} \\ E[\theta_h(z)] &= \mu_{\theta} \\ \text{Var}[c'_h(z)] &= \sigma_c^2 \Gamma_c^2(h) - p_s^2(h) \sigma_{\theta}^2 \Gamma_{\theta}^2(h) \\ \text{Var}[\theta_h(z)] &= \sigma_{\theta}^2 \Gamma_{\theta}^2(h) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

因此, 抗剪强度指标 $c, \tan \varphi$ 的均值及均值方差可按式(14)统计。 $\sigma_{\tau_j}^2 \Gamma_{\tau_j}^2(h)$ 的计算方法与节 2.3 相同。

3 可靠度算例

以天津新港北港池地区的土质统计资料为基础, 用随机场方法统计其抗剪强度指标, 并对其上的一长方形基础的地基承载力作可靠度分析, 以进一步说明抗剪强度指标的随机场统计方法如何应用于可靠度计算。为便于比较, 本算例也用其他方法对土性指标进行统计, 并根据不同的相关性考虑方式分别对地基承载力作可靠度分析^[7]。

3.1 计算条件

长方形基础长度 $L = 10\text{ m}$ ，宽度 $B = 4\text{ m}$ ，埋置深度 $D = 1\text{ m}$ 。基础上作用的有效垂直荷载 $p_v = 150\text{ kPa}$ ，变异系数 0.2 。持力层最大深度 $Z_{\max} = 6.0\text{ m}$ 。

3.2 土层强度统计特性

长方形基础以下 $0\sim 6\text{ m}$ 为黏土层，此土层的容重变异性很小，为简化起见暂不考虑，取其均值为 17.74 kN/m^3 。采用固结快剪试验结果，试样间距 0.5 m ，用相关函数法求得抗剪强度 τ 的相关距离 $\delta_r = 0.395\text{ m}^{[8\sim 11]}$ 。

滑动面最大切割深度约为 4 m ，在此深度范围内对土性指标进行平均特性统计，各种统计方法得到的抗剪强度指标^[12, 13]分别如表 1~3 所示，传统法得到的未考虑和考虑自相关 c, φ 协方差分别为 -0.188 和 -0.063 。

从表 1~3 的抗剪强度指标统计结果可以看到：

(1) 各种统计方法得到的抗剪强度指标的均值近似相等(除正交变化法中的黏聚力外)。

(2) 若不考虑指标的自相关性，则原简化相关法的“点”标准差小于传统法统计的“点”标准差，这是因为简化相关法考虑了 c, φ 的互相关性。

(3) 抗剪强度指标按随机场统计的简化相关法得到的标准差小于原简化相关法统计的“点”标准

差，这是因为考虑了指标的自相关性，统计得到的是均值标准差。

(4) 抗剪强度指标按随机场统计的简化相关法得到的标准差小于传统法统计的均值标准差，这也是因为考虑了指标的互相关性。

3.3 地基承载力的可靠度计算

本例采用 Hansen 公式计算极限承载力，考虑的随机变量有垂直荷载 p_v ，黏聚力 c 和内摩擦角 φ 。各随机变量都符合正态分布。极限状态方程为

$$Z = g(c, \varphi, p_v) = \frac{1}{2} \gamma N_\gamma B S_\gamma i_\gamma + (\gamma D + c \cot \varphi) N_q d_q S_q i_q - c \cot \varphi - p_v \quad (15)$$

式中： γ 为地基土的容重； N_γ, N_q 均为承载力系数，为内摩擦角 φ 的函数； S_γ, S_q 均为与基础形状有关的系数； i_γ, i_q 均为与基础底面作用合力的倾斜率有关的倾斜系数； d_q 为与基础埋深有关的深度系数^[14~17]。

采用国际“结构安全度联合委员会”(JCSS)推荐的 JC 法计算可靠度指标 β 。JC 法考虑了极限状态方程中各基本变量的实际概率分布，将功能函数在验算点处用泰勒级数展开并使之线性化，最后求解可靠度指标，是一种精度较高、较实用的近似概率分析方法。

表 1 传统法得到的抗剪强度指标

Table 1 Shear strength indexes using traditional method

c					φ				
均值	未考虑自相关		考虑自相关		均值	未考虑自相关		考虑自相关	
/kPa	“点”标准差/kPa	“点”变异系数	均值标准差/kPa	均值变异系数	/($^\circ$)	“点”标准差/($^\circ$)	“点”变异系数	均值标准差/($^\circ$)	均值变异系数
18.650	6.693	0.359	3.864	0.207	14.728	2.410	0.164	1.418	0.096

表 2 简化相关法得到的抗剪强度指标

Table 2 Shear strength indexes using simplified correlation method

c					φ				
均值	原简化相关法		按随机场统计的简化相关法		均值	原简化相关法		按随机场统计的简化相关法	
/kPa	“点”标准差/kPa	“点”变异系数	均值标准差/kPa	均值变异系数	/($^\circ$)	“点”标准差/($^\circ$)	“点”变异系数	均值标准差/($^\circ$)	均值变异系数
18.650	6.333	0.340	3.656	0.196	14.755	1.330	0.090	0.769	0.052

表 3 正交变换法得到的抗剪强度指标

Table 3 Shear strength indexes using cross transform method

c					φ				
均值	原正交变换法		按随机场统计的正交变换法		均值	原正交变换法		按随机场统计的正交变换法	
/kPa	“点”标准差/kPa	“点”变异系数	均值标准差/kPa	均值变异系数	/($^\circ$)	“点”标准差/($^\circ$)	“点”变异系数	均值标准差/($^\circ$)	均值变异系数
18.080	5.528	0.128	3.351	0.077	14.728	2.410	0.164	1.418	0.096

JC 法假定随机变量之间是相互独立的, 本文提出的抗剪强度指标的随机场统计方法在土性指标统计时就考虑了指标之间的相关性, 所以可直接应用 JC 法计算可靠度指标。若抗剪强度指标按传统法统计, 若要在可靠度计算中考虑指标间的互相关性, 可采用改进的 JC 法^[18]。

根据节 3.2 中不同方法统计的抗剪强度指标, 按照土性指标相关性的不同考虑方式, 分 8 种情形对本例中的地基承载力进行可靠度分析, 结果见表 4。

表 4 可靠度计算结果汇总表
Table 4 Summary of reliability calculation results

序号	抗剪强度指标 统计方法	是否考虑		计算结果		
		自相关	互相关	β	$P_f/\%$	K
1				2.132	1.650	
2	传统法	√		3.380	0.036	
3			√	2.320	1.014	
4		√	√	3.469	0.026	
5	简化相关法		√	2.316	1.028	2.435
6	按随机场统计 的简化相关法	√	√	3.643	0.013	
7	正交变换法		√	2.522	0.583	
8	按随机场统计 的正交变换法	√	√	3.719	0.010	

注: P_f 为失效概率, K 为按定值法求得的安全系数, “√” 表示考虑。

3.4 可靠度计算结果分析

由表 4 中可靠度分析结果可知:

(1) 当采用传统的抗剪强度指标统计方法时, 若既不考虑指标的自相关性, 又不考虑指标的互相关性, 则所得的可靠度指标偏小, 失效概率偏大, 达到 1.650%。与工程的实际安全程度相比, 相差甚远, 这在工程设计中是难以被人们接受的。

(2) 当采用传统法时, 若分别考虑指标的自相关和互相关性, 则所得的可靠度指标都有一定的提高。相比较下, 考虑抗剪强度指标的自相关性对可靠度指标的影响较之考虑互相关性要大一些。

(3) 采用按随机场统计的传统法, 在土性指标统计时考虑自相关性, 在可靠度计算中考虑互相关性, 得到的失效概率为 0.026%, 与港口工程统标的规定比较接近, 也与该工程的安全系数相对应, 因此比较合理。

(4) 当不考虑土性指标的相关性时得到的失效概率比考虑相关性时得到的失效概率高了两个数量级, 这是因为可靠度计算时土性指标采用的是子样方差, 而不是空间均值方差, 实际上这仅表示是地基中个别最薄弱点出现极限平衡的概率, 而不是整体失稳事件出现的概率, 没有反映工程的整体安全程度, 不能作为失效控制的准则。

(5) 原简化相关法及正交变换法只考虑了抗剪强度指标的互相关性, 使计算所得的可靠度指标有一定提高, 但仍偏小; 按随机场统计的简化相关法及正交变换法既考虑自相关性又考虑互相关性, 所得的失效概率最小, 分别为 0.013% 和 0.010%, 与表 4 中第 4 种情形(即本文提出的抗剪强度指标按随机场统计的传统法)计算所得的可靠度指标较接近, 说明这 3 种方法虽然对相关性的考虑方式不同, 但所得结果较为一致, 在工程应用中都是可行的。

(6) 应用本文提出的 3 种抗剪强度指标的随机场统计方法, 对应于用定值法求得的安全系数 2.435, 可靠性指标平均为 3.61, 失效概率为 0.016%, 符合工程的实际安全程度, 且易于为工程人员所接受。若改变荷载工况和土质条件, 进一步计算分析可得到本地区地基承载力总安全系数与平均可靠度指标间的粗略对应关系, 即当 $K=2$ 时, 建议目标可靠性指标为 3.06。

4 结 论

(1) 在地基工程可靠度研究中, 选择不同的抗剪强度指标统计方法对可靠度分析的结果有很大影响。对于地基承载力问题, 一般以整体失稳作为失效控制的准则, 因此有必要将随机场理论引入土性抗剪强度指标的统计, 采用空间均值方差进行可靠性分析。

(2) 在应用随机场理论进行可靠度计算时, 土性指标的自相关性和指标间的互相关性不容忽视。相比较下, 考虑抗剪强度指标的自相关性对可靠度指标的影响较之考虑互相关性更为显著。

(3) 本文提出的抗剪强度指标按随机场统计的传统法和按随机场统计的简化相关法及正交变换法, 分别从不同角度对自相关性及互相关性加以考虑, 较之传统的统计方法, 更为全面和合理。

(4) 3 种统计方法所得的可靠度指标接近, 且与传统的安全系数相匹配, 证明在土工可靠度计算

时, 3种方法都可作为合理的抗剪强度指标统计方法。

(5) 在天津港软土地基的地基承载力可靠度分析中, 当安全系数 $K=2$ 时, 建议目标可靠性指标为 3.06。而其他地区地基承载力的目标可靠性指标, 需根据不同土类加以统计并与实际工程相校验获得, 这也是下一步有待研究的内容。

参考文献(References):

- [1] 包承纲, 黄卫峰, 张庆华. 随机场理论在重力式码头地基承载力计算中的应用[C]// 地基工程可靠度分析方法研究. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1996: 110 - 117.(BAO Chenggang, HUANG Weifeng, ZHANG Qinghua. Application of random field theory to the reliability analysis on bearing capacity of jetty foundation[C]// Study on Reliability Analysis in the Foundation Engineering. Wuhan: Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Press, 1996: 110 - 117.(in Chinese))
- [2] 熊启东, 高大钊. 上海地区地基承载力的可靠度分析[J]. 岩土力学, 1997, 18(1): 73 - 77.(XIONG Qidong, GAO Dazhao. Reliability analysis of bearing capacity of foundation in Shanghai region[J]. Rock and Soil Mechanics, 1997, 18(1): 73 - 77.(in Chinese))
- [3] 高大钊. 土的抗剪强度指标的统计与应用[C]// 地基工程可靠度分析方法研究. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1996: 98 - 104.(GAO Dazhao. Statistic and application of indexes of soil properties[C]// Study on Reliability Analysis in the Foundation Engineering. Wuhan: Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Press, 1996: 98 - 104.(in Chinese))
- [4] 孙万禾, 黄传志, 叶国良, 等. 土的抗剪强度指标统计方法的分析[J]. 港口工程, 1996, (3): 5 - 16.(SUN Wanhe, HUANG Chuanzhi, YE Guoliang, et al. Study on statistical methods for characteristics of shear strength of soil[J]. Port Engineering, 1996, (3): 5 - 16.(in Chinese))
- [5] 中华人民共和国行业标准编写组. JTJ250 - 98 港口工程地基规范[S]. 北京: 人民交通出版社, 1998.(The Professional Standards Compilation Group of Peoples Republic of China. JTJ250 - 98 Code for soil foundations of port engineering[S]. Beijing: China Communications Press, 1998.(in Chinese))
- [6] VANMARCKE E H. Probabilistic modeling of soil profiles[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 1977, 103(GT11): 1 227 - 1 246.
- [7] 高大钊. 岩土工程设计中安全度指标及其应用[J]. 工程勘察, 1998, (1): 1 - 6.(GAO Dazhao. Application of reliability index in the design of geotechnical engineering[J]. Geotechnical Investigation and Surveying, 1998, (1): 1 - 6.(in Chinese))
- [8] 李镜培, 舒翔, 丁士君. 土性指标的自相关特征参数及其确定原则[J]. 同济大学学报, 2003, 31(3): 287 - 290.(LI Jingpei, SHU Xiang, DING Shijun. Discussion on characteristic parameter of self-correlation of soil index and its determining principle[J]. Journal of Tongji University, 2003, 31(3): 287 - 290.(in Chinese))
- [9] 朱登峰, 高大钊. 土性平稳随机场的空间统计特性分析[J]. 岩土力学, 2003, 24(3): 455 - 462.(ZHU Dengfeng, GAO Dazhao. Space statistical characteristics analysis of smooth stochastic field of soil characteristics[J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, 24(3): 455 - 462.(in Chinese))
- [10] 徐斌, 王大通, 高大钊. 用相关函数法求静探曲线相关距离的讨论[J]. 岩土力学, 1998, 19(1): 55 - 58.(XU Bin, WANG Datong, GAO Dazhao. Discussion on determining relative distance of static cone penetration curves by relative function method[J]. Rock and Soil Mechanics, 1998, 19(1): 55 - 58.(in Chinese))
- [11] DON J D, GREGORY B B. Estimating autocovariance of in-situ soil properties[J]. Journal of the Geotechnical Engineering, ASCE, 1993, 119(1): 147 - 165.
- [12] 杨强, 陈新, 周维垣. 抗剪强度指标可靠度分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 868 - 873.(YANG Qiang, CHEN Xin, ZHOU Weiyuan. Reliability analysis of shear strength parameters[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(6): 868 - 873.(in Chinese))
- [13] 刘润, 闫焱旺. 软黏土边坡稳定性分析中十字板强度取值的探讨[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(8): 1 422 - 1 426.(LIU Run, YAN Shuwang. Discussion on soft soil strength for slope stability analysis based on vane shear strength[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(8): 1 422 - 1 426.(in Chinese))
- [14] 高大钊. 土力学可靠性原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989.(GAO Dazhao. Theory of reliability in soil mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1989.(in Chinese))
- [15] GORDON A F, GRIFFITHS D V. Bearing-capacity prediction of spatially random $c-\phi$ soils[J]. Can. Geotech. J., 2003, 40(1): 54 - 65.
- [16] MICHAEL D J. Factors of safety and reliability in geotechnical engineering[J]. Journal of the Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2000, 126(4): 307 - 316.
- [17] GRIFFITHS D V, GORDON A F, MANOHARAN N. Bearing capacity of rough rigid strip footing on cohesive soil: probabilistic study[J]. Journal of the Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2002, 128(9): 743 - 755.
- [18] 张庆华, 包承纲. 改进 JC 法及其在土工可靠度计算中的应用[C]// 地基工程可靠度分析方法研究. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1996: 105 - 109.(ZHANG Qinghua, BAO Chenggang. Application of improved JC method to the soil reliability analysis[C]// Study on Reliability Analysis in the Foundation Engineering. Wuhan: Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Press, 1996: 105 - 109.(in Chinese))