

赵成刚,王 磊,李伟华. 具有饱和土沉积层的充水河谷对平面瑞雷波的散射. 地球物理学报, 2008, 51(5): 1567~1573

Zhao C G, Wang L, Li W H. Scattering of plane Rayleigh waves by circular-arc alluvial valleys with saturated soil deposits and water layer. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2008, 51(5): 1567~1573

# 具有饱和土沉积层的充水河谷对平面瑞雷波的散射

赵成刚<sup>1</sup>, 王 磊<sup>1,2</sup>, 李伟华<sup>1</sup>

1 北京交通大学土建学院, 北京 100044

2 中铁第一勘察设计院, 西安 710043

**摘 要** 针对具有饱和土沉积层的充水河谷对平面瑞雷波的散射问题, 把半空间场地用单相弹性介质模拟, 河谷中的饱和土沉积层用 Biot 饱和多孔介质动力理论模拟, 河谷中的水假定为无黏性流体(理想流体), 利用波函数展开法在频域内给出了具有饱和土沉积层的圆弧形充水河谷对平面瑞雷波散射问题的解析解答. 文中给出了算例, 计算了不同输入频率和高宽比时河谷谷底的位移幅值. 算例表明由于具有饱和土沉积层的充水河谷存在, 使得河谷谷底的位移幅值放大 4 倍多, 并且它的幅值随着河谷谷底位置的不同而产生较大的变化.

**关键词** 河谷, 平面瑞雷波, 散射, 饱和土, 理想流体

文章编号 0001-5733(2008)05-1567-07

中图分类号 P631

收稿日期 2007-08-14, 2008-05-12 收修定稿

## Scattering of plane Rayleigh waves by circular-arc alluvial valleys with saturated soil deposits and water layer

ZHAO Cheng-Gang<sup>1</sup>, WANG Lei<sup>1,2</sup>, LI Wei-Hua<sup>1</sup>

1 School of Civil Engineering and Architecture, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China

2 China Railway First Survey and Design Institute Group Ltd., Xi'an 710043, China

**Abstract** An analytic solution of two-dimensional scattering and diffraction of plane Rayleigh waves by circular-arc alluvial valley with saturated soil deposits and water was presented. The Fourier-Bessel series expansion technique was used with the deposits simulated by the Biot dynamic theory for saturated porous media, the half space assumed to be elastic single-phase media, and the water in the valleys simulated by perfect fluid. Numerical results are given to show the displacement amplitudes on the valley floor. The analytical results show that some surface displacement amplitudes of the valley floor are amplified to more than 4 times, and it changes with the location of the observation points apparently.

**Keywords** Valleys, Plane Rayleigh waves, Wave scattering, Saturated soil deposit, Perfect fluid

## 1 引 言

近些年以来, 许多研究者关注河谷地形对地面运动的影响, 河谷地表的震响应也有了大量的研

究成果<sup>[1~12]</sup>, 但在所有的研究中, 考虑的大都是空谷或者河谷中有沉积层的情况, 对于河谷充水时在地震作用下河谷的动力响应的研究甚少. 而这种局部场地条件是修建大坝、渡槽、多跨桥梁等大跨结构物时常见的, 对这种局部场地的研究是确定这些

**基金项目** 国家自然科学基金重大研究计划项目(90715035)和国家自然科学基金项目(50708005)资助.

**作者简介** 赵成刚, 男, 1955 年生, 北京交通大学土建学院教授、博士生导师. 主要从事土力学、岩土地震工程、土的本构、岩土计算力学等方面的研究. E-mail: cgzhao@center. bjtu. edu. cn

大跨度结构的地震响应分析中地震动输入的理论基础. 本文将以此为出发点, 把河谷中的水模拟为无黏性、可压缩流体, 给出了具有饱和土沉积层 (利用 Biot 动力理论进行分析) 的圆弧形充水河谷对平面 Rayleigh 波散射问题的解析解答. 并给出了不同入射频率和高宽比的情况下, 河谷谷底的位移幅值的计算算例.

## 2 波场模型

具有饱和土沉积层的圆弧形充水河谷的模型如图 1 所示, 为一镶嵌在半空间的圆弧形河谷, 河谷中有饱和土沉积层和水层. 两个圆弧界面的半宽度分别为  $a_1$  和  $a_2$ , 深度分别为  $h_1$  和  $h_2$ , 它们的圆心均在  $O_1$  点, 半径分别为  $b_1$  和  $b_2$ , 圆心  $O_1$  到半空间表面的距离为  $d$ . 谷中的水为无黏性流体 (理想流体), 理想流体介质的波动方程可以由王维佳<sup>[13]</sup> 给出的黏性可压缩流体中的波动方程:

$$\rho_f \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} = \left[ K_f + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla \nabla \cdot u_f + \eta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 u_f), \quad (1a)$$

令式中黏性可压缩流体中的黏性系数  $\eta=0, \zeta=0$  得到

$$\rho_f \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} = K_f \nabla \nabla \cdot u_f, \quad (1b)$$

其中  $\rho_f$  为流体密度,  $K_f$  为流体的不可压缩系数,  $u_f$  为流体的运动位移. 由式 (1b) 可以看到, 在无黏性理想流体介质中只存在压缩波, 其波速为  $\sqrt{K_f/\rho_f}$ .

半空间介质为单相弹性介质, 单相弹性介质的

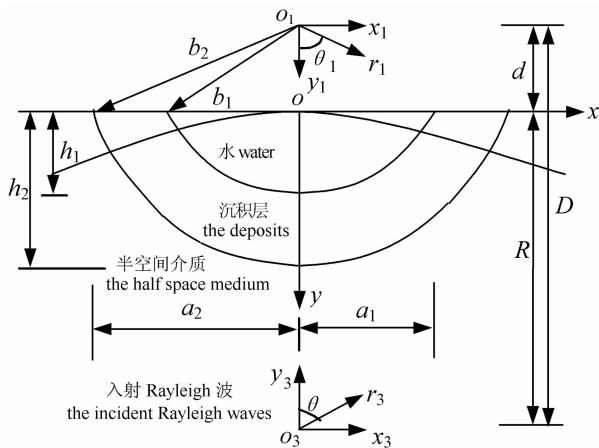


图 1 具有饱和土沉积层的圆弧形充水河谷的模型  
Fig. 1 Model of an alluvial valley with saturated soil deposits and water

材料参数由 Lamé 常数  $\lambda, \mu$  以及质量密度  $\rho$  确定. 沉积层介质为流体饱和和多孔介质, 其波动方程见文献[7].

## 3 场地中的波场分析

### 3.1 自由场

设入射波为 Rayleigh 波:

$$\phi^R(x, y) = A_i \exp[(ik_R x - v_\alpha y) - i\omega t], \quad (2a)$$

$$\psi^R(x, y) = B_i \exp[(ik_R x - v_\beta y) - i\omega t], \quad (2b)$$

其波长为  $\lambda_R = 2\pi/k_R, k_R = \omega/c_R$  为 Rayleigh 波数,  $i$  表示虚数单位,  $t$  为时间坐标. 设场地的泊松比  $\gamma = 0.25$ , 由 Rayleigh 方程可得:  $c_R \approx 0.9194c_s$ . 这里  $v_\alpha = \sqrt{k_R^2 - k_{sa}^2}, v_\beta = \sqrt{k_R^2 - k_{s\beta}^2}$ , 其中  $k_{sa}$  为纵波波数,  $k_{s\beta}$  为横波波数, 在下面的分析中将时间因子略去, 上式简化为

$$\phi^R(x, y) = A_i \exp[(ik_R x - v_\alpha y)], \quad (3a)$$

$$\psi^R(x, y) = B_i \exp[(ik_R x - v_\beta y)], \quad (3b)$$

由坐标之间的关系

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 - d \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = r_1 \sin\theta_1 \\ y_1 = r_1 \cos\theta_1 \end{cases} \quad (4)$$

可以得到极坐标下的表达式:

$$\phi^R(r_1, \theta_1) = A_i \exp(ik_R r_1 \sin\theta_1 - v_\alpha r_1 \cos\theta_1 - v_\alpha d), \quad (5a)$$

$$\psi^R(r_1, \theta_1) = B_i \exp(ik_R r_1 \sin\theta_1 - v_\beta r_1 \cos\theta_1 - v_\beta d). \quad (5b)$$

由于 Rayleigh 波是表面波, 其自身已经满足应力自由边界条件, 因此在半空间不会产生反射波.

### 3.2 自由场波函数的级数展开

Rayleigh 波的性质与 SV 波在大于临界角入射的情况下产生反射 P 波相似, 是沿  $y=0$  表面传播的纵向面波, 在半空间中其幅值随  $y$  轴坐标的增加呈指数级衰减而趋于零, 因此可以按照文献[14]中那样展开成如下的级数形式:

$$\phi^*(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{sa} r_1) (A_{0n} \cos n\theta_1 + B_{0n} \sin n\theta_1), \quad (6a)$$

$$\psi^*(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{s\beta} r_1) (C_{0n} \sin n\theta_1 + D_{0n} \cos n\theta_1), \quad (6b)$$

式中,  $k_{sa}$  和  $k_{s\beta}$  分别为半空间介质中纵波和横波的波数,  $J_n(k_{s\beta} r_1)$  为第一类 Bessel 函数, 对于给定的  $r_1$  (如  $r_1 = a_1$ ) 有

$$\begin{cases} A_{0,0} = A_{0,N} = \frac{a_0(r_1)}{2} \\ A_{0,n} = \frac{a_n(r_1)}{J_n(k_{sa} r_1)} \\ B_{0,n} = \frac{b_n(r_1)}{J_n(k_{sa} r_1)} \end{cases} \quad n = 1 \sim N-1, \quad (7a)$$

$$\begin{cases} D_{0,0} = D_{0,N} = \frac{d_0(r_1)}{2} \\ D_{0,n} = \frac{d_n(r_1)}{J_n(k_{s\beta}r_1)} \\ C_{0,n} = \frac{c_n(r_1)}{J_n(k_{s\beta}r_1)} \end{cases} \quad n = 1 \sim N-1, \quad (7b)$$

式(7)中,

$$\begin{cases} a_n(r_1) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \phi^R\left(r_1, \frac{\pi l}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{N}n\right) \\ b_n(r_1) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \phi^R\left(r_1, \frac{\pi l}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{N}n\right) \end{cases} \quad (n = 0 \sim N), \quad (8a)$$

$$\begin{cases} d_n(r_1) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \psi^R\left(r_1, \frac{\pi l}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{N}n\right) \\ c_n(r_1) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \psi^R\left(r_1, \frac{\pi l}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{N}n\right) \end{cases} \quad (n = 0 \sim N), \quad (8b)$$

其中  $\phi^R, \psi^R$  由式(5)给出。

### 3.3 散射波场

为了便于问题的求解,这里采用一个半径为  $R$ , 圆心在  $O_3$  点的圆弧(图 1)来模拟半空间表面。下面分析整个场地中的波场。

#### 3.3.1 半空间中的散射波

半空间存在因沉积层和半空间界面而产生散射 P 波势函数  $\phi_{s1}(r_1, \theta_1)$  和 SV 波势函数  $\psi_{s1}(r_1, \theta_1)$ , 以及因半空间自由表面(由大圆弧近似)产生的散射 P 波势函数  $\phi_{s3}(r_1, \theta_1)$  和 SV 波势函数  $\psi_{s3}(r_1, \theta_1)$ , 它们可用 Fourier-Bessel 函数分别表示为:

(1)半空间与沉积河谷界面产生的散射波

$$\begin{aligned} \phi_{s1}(r_1, \theta_1) = & \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_{sa}r_1)(A_{s2,n}^{(1)} \cos n\theta_1 \\ & + B_{s2,n}^{(1)} \sin n\theta_1), \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \psi_{s1}(r_1, \theta_1) = & \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_{s\beta}r_1)(C_{s2,n}^{(1)} \sin n\theta_1 \\ & + D_{s2,n}^{(1)} \cos n\theta_1), \end{aligned} \quad (9b)$$

式中  $H_n^{(1)}(k_{sa}r_1), H_n^{(1)}(k_{s\beta}r_1)$  为第一类 Hankel 函数。

(2)半空间表面(由大圆弧近似)产生的散射波:

$$\begin{aligned} \phi_{s3}(r_3, \theta_3) = & \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{sa}r_3)(A_{s3,m}^{(3)} \cos m\theta_3 \\ & + B_{s3,m}^{(3)} \sin m\theta_3), \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \psi_{s3}(r_3, \theta_3) = & \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{s\beta}r_3)(C_{s3,m}^{(3)} \sin m\theta_3 \\ & + D_{s3,m}^{(3)} \cos m\theta_3). \end{aligned} \quad (10b)$$

#### 3.3.2 两相饱和介质沉积层中的散射波

谷中饱和沉积层中存在因饱和沉积层介质和半

空间交界面引起的散射  $P_1$  波势函数  $\phi_{1,v1}(r_1, \theta_1)$ ,  $P_{II}$  波势函数  $\phi_{2,v1}(r_1, \theta_1)$  和 SV 波势函数  $\psi_{v1}(r_1, \theta_1)$ ; 沉积层介质和流体介质交界面引起的散射  $P_1$  波势函数  $\phi_{1,v2}(r_1, \theta_1)$ ,  $P_{II}$  波势函数  $\phi_{2,v2}(r_1, \theta_1)$  和 SV 波势函数  $\psi_{v2}(r_1, \theta_1)$ ; 以及半空间自由表面(由大圆弧近似)引起的散射  $P_1$  波势函数  $\phi_{1,v3}(r_3, \theta_3)$ ,  $P_{II}$  波势函数  $\phi_{2,v3}(r_3, \theta_3)$  和 SV 波势函数  $\psi_{v3}(r_3, \theta_3)$ , 它们可以分别表示为:

(1)饱和沉积层介质与半空间介质交界面产生的散射波为

$$\begin{aligned} \phi_{1,v1}(r_1, \theta_1) = & \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{a,1}r_1)(A_{v1,n}^{(1)} \cos n\theta_1 \\ & + B_{v1,n}^{(1)} \sin n\theta_1), \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2,v1}(r_1, \theta_1) = & \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{a,2}r_1)(C_{v1,n}^{(1)} \cos n\theta_1 \\ & + D_{v1,n}^{(1)} \sin n\theta_1), \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \psi_{v1}(r_1, \theta_1) = & \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{\beta}r_1)(E_{v1,n}^{(1)} \sin n\theta_1 \\ & + F_{v1,n}^{(1)} \cos n\theta_1). \end{aligned} \quad (11c)$$

(2)沉积层介质与流体介质交界面产生的散射波为

$$\begin{aligned} \phi_{1,v2}(r_1, \theta_1) = & \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_{a,1}r_1)(A_{v2,n}^{(1)} \cos n\theta_1 \\ & + B_{v2,n}^{(1)} \sin n\theta_1), \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2,v2}(r_1, \theta_1) = & \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_{a,2}r_1)(C_{v2,n}^{(1)} \cos n\theta_1 \\ & + D_{v2,n}^{(1)} \sin n\theta_1), \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} \psi_{v2}(r_1, \theta_1) = & \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_{\beta}r_1)(E_{v2,n}^{(1)} \sin n\theta_1 \\ & + F_{v2,n}^{(1)} \cos n\theta_1). \end{aligned} \quad (12c)$$

(3)两相饱和介质沉积层内半空间自由表面(由大圆弧近似)产生的散射波为

$$\begin{aligned} \phi_{1,v3}(r_3, \theta_3) = & \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{a,1}r_3)(A_{v3,m}^{(3)} \cos m\theta_3 \\ & + B_{v3,m}^{(3)} \sin m\theta_3), \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2,v3}(r_3, \theta_3) = & \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{a,2}r_3)(C_{v3,m}^{(3)} \cos m\theta_3 \\ & + D_{v3,m}^{(3)} \sin m\theta_3), \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \psi_{v3}(r_3, \theta_3) = & \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{\beta}r_3)(E_{v3,m}^{(3)} \sin m\theta_3 \\ & + F_{v3,m}^{(3)} \cos m\theta_3), \end{aligned} \quad (13c)$$

其中,  $k_{a,1}, k_{a,2}$  和  $k_{\beta}$  分别为两相饱和介质沉积层内  $P_1$  波、 $P_{II}$  波和 SV 波的波数。

#### 3.3.3 流体介质层中的散射波

流体介质层中存在着因沉积层介质与流体介质

层交界面引起的散射 P 波势函数  $\phi_{w2}(r_1, \theta_1)$  和流体介质半空间自由表面(由大圆弧近似)引起的散射 P 波势函数  $\phi_{w3}(r_3, \theta_3)$ , 它们可分别表示为:

(1) 流体介质层与沉积层交界面产生的散射波为

$$\phi_{w2}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_w r_1) (A_{w2,n}^{(1)} \cos n\theta_1 + B_{w2,n}^{(1)} \sin n\theta_1), \quad (14)$$

(2) 流体介质层半空间自由表面(由大圆弧近似)产生的散射波为

$$\phi_{w3}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_w r_3) (A_{w3,m}^{(3)} \cos m\theta_3 + B_{w3,m}^{(3)} \sin m\theta_3), \quad (15)$$

式(14)和(15)中  $k_w$  为流体介质中 P 波波数.

由于上述波函数是在不同坐标系下给出的, 为了方便求解, 应进行坐标变换. 根据 Graf 加法公式

$$C_n(kr_1) \begin{cases} \cos n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 \end{cases} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_{m+n}(kD) J_m(kr_3) \begin{cases} \cos m\theta_3 \\ \sin m\theta_3 \end{cases} \quad (r_3 < D), \quad (16)$$

$$C_m(kr_3) \begin{cases} \cos m\theta_3 \\ \sin m\theta_3 \end{cases} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_{n+m}(kD) J_n(kr_1) \begin{cases} \cos n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 \end{cases} \quad (r_1 < D), \quad (17)$$

进行坐标交换, 其中  $D$  为  $O_1$  和  $O_3$  之间的距离,  $C_n(kr_1)$ ,  $C_m(kr_3)$  分别代表 Hankel 函数和第一类 Bessel 函数. 进行坐标变换后, 得到波势函数式(9)、(10)在另外一个极坐标系下(见图 1)的表达式为:

$$\phi_{s1}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{sa} r_3) (A_{s1,m}^{(3)} \cos m\theta_3 + B_{s1,m}^{(3)} \sin m\theta_3), \quad (18a)$$

$$\phi_{s1}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{s\beta} r_3) (C_{s1,m}^{(3)} \sin m\theta_3 + D_{s1,m}^{(3)} \cos m\theta_3), \quad (18b)$$

其中

$$\begin{Bmatrix} A_{s1,m}^{(3)} \\ B_{s1,m}^{(3)} \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{2nm}^{\pm}(k_{sa} D) \begin{Bmatrix} A_{s1,n}^{(1)} \\ B_{s1,n}^{(1)} \end{Bmatrix}, \quad (19a)$$

$$\begin{Bmatrix} C_{s1,m}^{(3)} \\ D_{s1,m}^{(3)} \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{2nm}^{\mp}(k_{s\beta} D) \begin{Bmatrix} C_{s1,n}^{(1)} \\ D_{s1,n}^{(1)} \end{Bmatrix}, \quad (19b)$$

$T_{2nm}$  和下面用到的  $T_{1nm}$  的定义见式(22a、b).

$$\phi_{s3}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{sa} r_1) (A_{s3,n}^{(1)} \cos n\theta_1 + B_{s3,n}^{(1)} \sin n\theta_1), \quad (20a)$$

$$\phi_{s3}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{s\beta} r_1) (C_{s3,n}^{(1)} \sin n\theta_1 + D_{s3,n}^{(1)} \cos n\theta_1), \quad (20b)$$

其中

$$\begin{Bmatrix} A_{s3,n}^{(1)} \\ B_{s3,n}^{(1)} \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} T_{1nm}^{\pm}(k_{sa} D) \begin{Bmatrix} A_{s3,m}^{(3)} \\ B_{s3,m}^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad (21a)$$

$$\begin{Bmatrix} C_{s3,n}^{(1)} \\ D_{s3,n}^{(1)} \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} T_{1nm}^{\mp}(k_{s\beta} D) \begin{Bmatrix} C_{s3,m}^{(3)} \\ D_{s3,m}^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad (21b)$$

$$T_{2nm}^{\pm}(kD) =$$

$$\frac{\epsilon_m}{2} [H_{m+n}^{(1)}(kD) \pm (-1)^n H_{m-n}^{(1)}(kD)], \quad (22a)$$

$$T_{1nm}^{\pm}(kD) =$$

$$\frac{\epsilon_m}{2} [J_{m+n}(kD) \pm (-1)^n J_{m-n}(kD)]. \quad (22b)$$

同理, 式(11)~(15)可进行类似的坐标变换, 为了节省篇幅, 这里不再赘述.

### 3.4 总波场

这样, 在 Rayleigh 波入射情况下, 半空间中的波势函数为

$$\phi_s = \phi^R + \phi_{s1} + \phi_{s3}, \quad (23a)$$

$$\psi_s = \psi^R + \psi_{s1} + \psi_{s3}, \quad (23b)$$

饱和沉积层中的波势函数为:

固相:

$$\phi_v = \phi_{1,v1} + \phi_{2,v1} + \phi_{1,v2} + \phi_{2,v2} + \phi_{1,v3} + \phi_{2,v3}, \quad (24a)$$

$$\psi_v = \psi_{v1} + \psi_{v2} + \psi_{v3}, \quad (24b)$$

液相:

$$\Phi_v = \eta_1 [\phi_{1,v1} + \phi_{1,v2} + \phi_{1,v3}] + \eta_2 [\phi_{2,v1} + \phi_{2,v2} + \phi_{2,v3}], \quad (25a)$$

$$\Psi_v = \eta_3 (\psi_{v1} + \psi_{v2} + \psi_{v3}), \quad (25b)$$

上式中  $\eta_1$ 、 $\eta_2$ 、 $\eta_3$  分别表示  $P_1$  波、 $P_{II}$  波和剪切波的参与系数, 其物理意义和计算方法见文献[15].

流体介质中的波势函数:

$$\phi_w = \phi_{w2} + \phi_{w3}, \quad (26)$$

式(23)~(26)中下角标 s 表示弹性半空间, v 表示饱和介质, w 表示水介质; 下角标中逗号以前的 1 和 2 分别表示  $P_1$  波和  $P_{II}$  波; 逗号以后的 1、2、3 以及角标中没有逗号时的 1、2、3 分别表示由弹性半空间与饱和介质交界面、饱和介质与水的交界面、大圆弧表示的自由表面产生的散射势函数.

## 4 边界条件

此问题中边界条件为空间和沉积层以及流体介质自由表面的边界条件以及沉积层与半空间交界面和饱和沉积层与流体介质交界面的连续条件.

假定饱和沉积层自由地表透水, 自由地表的边界条件可以表示为

当  $y=0$  时

$$\tau_{yy}^s = \tau_{yx}^s = 0, \tau_{yy}^v = \tau_{yx}^v = \sigma^v = 0, \tau_{yy}^w = 0, \quad (27a)$$

上标  $s, v, w$  分别表示半空间、沉积层和流体介质。

设饱和沉积层与弹性半空间介质交界面为透水边界,则其交界面的连续条件可表示为:

当  $r_1=b_2$  时

$$u_r^v = u_r^s, u_\theta^v = u_\theta^s, \tau_{rr}^v = \tau_{rr}^s, \sigma^v = 0, \tau_{r\theta}^v = \tau_{r\theta}^s. \quad (27b)$$

饱和沉积层与流体介质交界面的连续条件为 (Л. М. 布列霍夫斯基赫, 1985)<sup>[16]</sup>:

当  $r_1=b_1$  时

$$(1-n)u_r^v + nU_r^v = u_r^w, \quad \tau_{r\theta}^v = 0 \\ \tau_{rr,s}^v + \tau_{rr,l}^v = \tau_{rr}^w, \sigma^v = -n\tau_{rr}^w, \quad (27c)$$

引入大圆弧假定后,边界条件转化为:

当  $r_3=R$  时

$$\tau_{rr}^s = \tau_{r\theta}^s = 0, \tau_{rr}^v = \tau_{r\theta}^v = \sigma^v = 0, \tau_{rr}^w = 0. \quad (28)$$

$$u_r^s = \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ +DS_{11}^{(1)}(n, r_1)(A_{0n} + A_{s3,n}^{(1)}) + DS_{12}^{(1)}(n, r_1)(C_{0n} + C_{s3,n}^{(1)}) \right] \cos n\theta_1 \\ + \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ DS_{11}^{(1)}(n, r_1)(B_{0n} + B_{s3,n}^{(1)}) - DS_{12}^{(1)}(n, r_1)(D_{0n} + D_{s3,n}^{(1)}) \right] \sin n\theta_1 \quad (29a)$$

$$u_\theta^s = \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -DS_{21}^{(1)}(n, r_1)(A_{0n} + A_{s3,n}^{(1)}) + DS_{22}^{(1)}(n, r_1)(C_{0n} + C_{s3,n}^{(1)}) \right] \cos n\theta_1 \\ + \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ DS_{21}^{(1)}(n, r_1)(B_{0n} + B_{s3,n}^{(1)}) + DS_{22}^{(1)}(n, r_1)(D_{0n} + D_{s3,n}^{(1)}) \right] \sin n\theta_1 \quad (29b)$$

通过坐标变换,可以求得直角坐标下的位移  $|u_x|$  和  $|u_y|$ . 式中各项系数表达式从略。

## 6 结果分析

引入无量纲频率  $\eta$ , 其定义为河谷的宽度与入射波波长  $\lambda_{s\beta}$  的比值

$$\eta = \frac{2a_2}{\lambda_{s\beta}} = \frac{k_{s\beta} a_2}{\pi}, \quad (30)$$

式中  $\lambda_{s\beta}$  为半空间的 SV 波的波长. 为了便于分析说明,各位移分量的幅值  $|u_x|$  和  $|u_y|$  也进行无量纲化,用位移分量的幅值与入射波位移幅值的比值,即放大系数来表示. 计算中大圆弧的半径  $R$  取  $R=100b_2$ ; 无限维代数方程组的求解,截取有限项进行计算. 本文在数值分析中为得到问题的解答,截取不同的项数进行计算,并观察相邻计算项数之间的误差,当误差小于预先设定的精度时,即用此次项数作为实际收敛的计算项数。

取场地中介质参数如下:半空间介质为单相弹

确定了地震波场之后,接下来要做的是利用边界条件,确定和求解上述波场中各种波的势函数表达式中 Fourier-Bessel 级数的待定系数. 一旦求得所有波势函数中的待定系数,即可得到地表位移的解析解. 限于篇幅,这里不再赘述其求解过程,感兴趣的读者可参考文献[6].

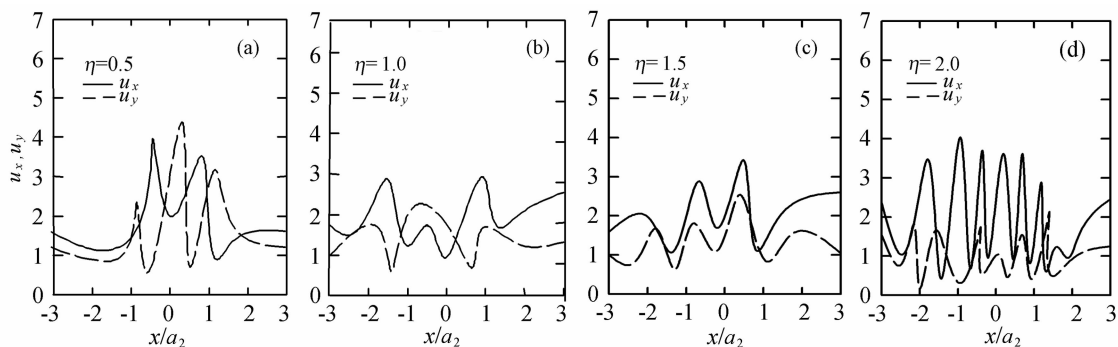
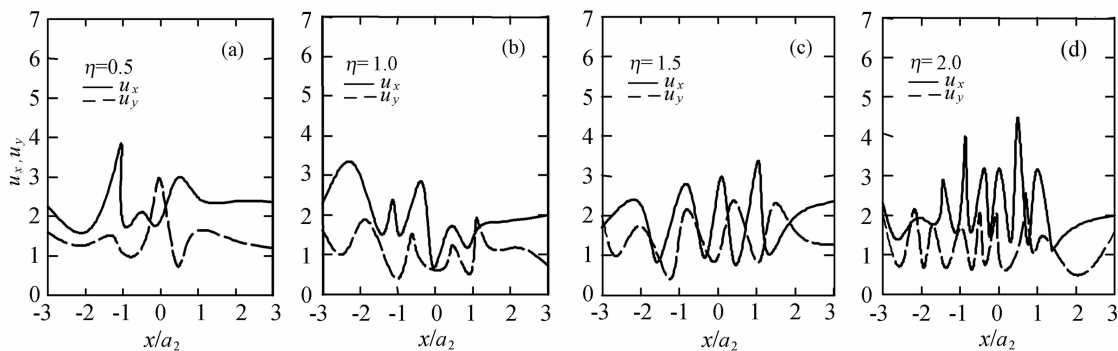
## 5 地表位移表达式

确定了散射波场的解析解后,可求得瑞雷波被河谷散射后在场内产生的位移场和应力场的解析解答. 当对河谷这种局部场地中的桥梁、渡槽等大跨结构进行地震响应分析时,所关心的一般是半空间介质表面(谷底面)的位移. 则河谷(谷底面)的位移为:

当  $r_1 \geq b_1$  时

性介质,设其泊松比  $\nu=0.25$ , Lamé 常数为  $\lambda=\mu=2.48 \times 10^9$  Pa, 密度  $\rho=2.0 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>; 饱和沉积层介质为流体饱和多孔介质,不考虑耗散( $\eta=0, b=0$ )并不计固体骨架即土颗粒的压缩,取  $\rho_s=2700$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_f=1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_a=-350$  kg/m<sup>3</sup>,  $A=3.8133 \times 10^9$  Pa,  $N=2.2 \times 10^8$  Pa,  $R=0.66 \times 10^9$  Pa,  $Q=1.54 \times 10^9$  Pa,  $n=0.3$ ; 谷中理想流体的体积模量  $K_f=2.2 \times 10^9$  Pa.

图 2 和图 3 分别给出了 Rayleigh 波入射下,河谷高宽比  $h_2/a_2$  分别为 0.5 和 1.0 时半空间介质表面的无量纲位移幅值的分布. 横坐标为  $x$  坐标与河谷半宽  $a_2$  的比值,两个图中的(a), (b), (c)和(d)分别对应于  $\eta=0.5, 1.0, 1.5$  和 2.0. 对比两个图可以看到:首先,无论较深( $h_2/a_2=1.0$ )还是较浅( $h_2/a_2=0.5$ )的河谷,半空间介质表面(谷底面)的位移幅值沿  $x$  坐标变化都比较大,尤其是当入射频率较高,即  $\eta$  值较大时. 同时由于河谷地形的存在使得河谷谷底( $-1 < x/a_2 < 1$ )的位移以及与河谷相连的半空间水平地表( $x/a_2 > 1$ 和 $x/a_2 < -1$ )的位移都

图 2 位移放大系数 ( $h_2/a_2=0.5$ )Fig. 2 The amplification of displacement ( $h_2/a_2=0.5$ )图 3 位移放大系数 ( $h_2/a_2=1.0$ )Fig. 3 The amplification of displacement ( $h_2/a_2=1.0$ )

有一定程度的放大,尤其是河谷谷底的位移,其位移幅值在某些情况下可以达到入射波幅值的 4 倍左右.说明在这种局部场地中修建水库、桥梁等大跨度结构时,有必要按照场地的实际条件,考虑局部场地效应.

## 7 结 论

本文中给出了具有饱和土沉积层和水的河谷场地对平面波入射下动力响应分析的解析解,通过该解析解可以得到整个河谷场地内的位移和应力场,这为在这种场地中建造的结构物的地震响应分析提供地震动输入的依据.本文还以高宽比不同的两个河谷为算例,给出了半空间介质表面的位移幅值,从中明显看出河谷地形的存在使得半空间介质表面的位移幅值随着观察点的位置的不同而呈现较大的变化,因而在对该场地中建筑结构进行地震响应分析时应该考虑局部场地效应.

## 参考文献 (References)

[1] Cao H, Lee V W. Scattering and diffraction of plane P waves

by circular-cylindrical canyons with variable depth-to-width ratio. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1990, **9** (3): 141~150

[2] Sanchez-sesma F J, Pamos-martinez J, Campillo M. An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves. *Earthquake Engineering and Structure Dynamics*, 1993, **22**: 279~295

[3] Todorovska M, Lee V W. Surface motion of shallow circular alluvial valleys for incident plane SH waves; analytical solution. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1991, **4**: 192~200

[4] Trifunac M D. Surface motion of semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bulletin of Seismological Society of America*, 1971, **61**: 1755~1770

[5] Yuan X, Liao Z. Scattering of plane SH wave by a cylindrical alluvial valley of circular-arc cross-section. *Earthquake Engineering and Structure Dynamics*, 1995, **24** (1): 1303~1313

[6] 李伟华. 含饱和土的复杂局部场地波动散射问题的解析解和显式有限元数值模拟[博士论文]. 北京:北京交通大学,2004  
Li W H. Analytical solutions and numerical simulation of the scattering of plane waves by local sites with saturated soil [Ph. D. dissertation]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2004

- [7] 李伟华,赵成刚. 圆弧形凹陷饱和土地对平面 P 波散射问题的散射解析解. 地球物理学报, 2003, **46**(4): 539~546  
Li W H, Zhao C G. An analytical solution for the diffraction of plane P-waves by circular cylindrical canyons in a fluid-saturated porous media half space. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2003, **46**(4): 539~546
- [8] 李伟华,赵成刚. 饱和土沉积谷场地对平面 P 波的散射. 岩土工程学报, 2003, **25**(3):346~351  
Li W H, Zhao C G. Scattering of plane P waves in alluvial valleys with saturated soil deposits. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering* (in Chinese), 2003, **25**(3): 346~351
- [9] 李伟华,赵成刚. 饱和土沉积谷场地对平面 SV 波的散射问题的解析解. 地球物理学报,2004, **47**(5): 911~919  
Li W H, Zhao C G. Scattering of plane SV waves by circular-arc alluvial valleys with saturated soil deposits. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2004, **47**(5): 911~919
- [10] 董俊,赵成刚. 三维半球形凹陷饱和土地对平面 P 波散射问题的解析解. 地球物理学报,2005, **48**(3):680~688  
Dong J, Zhao C G. An analytical solution for the diffraction of plane P-waves by three-dimensional hemispherical canyons in a fluid-saturated porous media half space. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2005, **48**(3): 680~688
- [11] Li W H, Zhao C G. Scattering of plane SV waves by cylindrical canyons in saturated porous medium. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2005, **25**:981~995
- [12] Li W H, Zhao C G. Scattering of plane P waves by circular-arc alluvial valleys with saturated soil deposits. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2005, **25**: 997 ~ 1014
- [13] 王维佳. 粘性可压缩流体中的波. 地球物理学报, 1984, **27**(1): 84~93  
Wang W J. The waves in viscous compressible fluid. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1984, **27**(1):84~93
- [14] 纪晓东. 半空间中圆形洞室对弹性波的散射 [博士论文]. 天津: 天津大学,2005  
Ji X D. Scattering and diffraction of a cylindrical cavity in half-space subjected to elastic waves [Ph. D. dissertation]. Tianjin: Tianjin University, 2005
- [15] Deresiewicz H, Rice J T. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid filled porous solid. III: Reflection of plane waves at a free plane boundary. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1962, **52**(3): 595~625
- [16] Л. М. 布列霍夫斯基赫著. 分层介质中的波, 杨训川译,北京: 科学出版社, 1985  
Brekhovskikh L M. Waves in Layered Media. Yang X C translated. Beijing: Science Press, 1985

(本文编辑 胡素芳)