时间最优开关控制的非线性规划方法

李炳杰[1,2]，刘三阳[1]，尹忠海[1,2]
(1. 西安电子科技大学 理学院,陕西 西安　710071；
2. 空军工程大学 理学院,陕西 西安　710077)

摘要：提出单输入非线性时间最优开关控制的非线性规划算法. 针对不同的开关控制划分未知时间段，以时间段为变量建立与最优控制等价的非线性规划模型. 构造每个未知时间段的等分龙格库塔格式，该格式不但不增加未知变量，而且可构造出不含导数的非线性规划算法. 利用龙格库塔格式的收敛性和非线性规划的一阶最优性条件证明该方法的收敛性. 最后以实例验证该算法.

关键词：时间最优控制；开关控制；非线性规划；龙格库塔方法
中图分类号：O221.2；O231.2　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1001-2400(2006)02-0299-05

Nonlinear programming method for time optimal switching control

LI Bing-jie[1,2], *LIU San-yang*[1], *YIN Zhong-hai*[1,2]
(1. School of Science, Xidian Univ., Xi′an　710071, China;
2. School of Science, Air Force Engineering Univ., Xi′an　710077, China)

Abstract: A nonlinear programming method for time optimal switching control with a single control input is proposed. The unknown arc time is partitioned off the unknown durations of the segmental times in different switching control problems, and the nonlinear programming model equivalent to the optimal control is constituted with the time segments serving as variables. The Runge-Kutta numerical formulations based on average partitioning of each time segment are formed, which do not increase the number of the unknown variables but constitute a nonlinear programming without the derivative of all the functions. The convergence of the method is derived from the convergence of the Runge-Kutta formulations and the first-order necessary optimality condition. Finally, the proposed method is applied to some examples to demonstrate the effectiveness of the method.

Key Words: time optimal control; switching control; nonlinear programming; Runge-Kutta method

考虑时间最优控制问题(P)

$$\begin{aligned} &\min \quad t_f \ , \\ &\text{s.t.}\ \ x'(t) = f(x(t), u(t)) \ , \\ &\qquad x(0) = x_0 \ , \quad x(t_f) = x_T \ , \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $t_f \leqslant T$，状态 $x(t) \in R^m$，控制输入 $u:[0, t_f] \to U \subseteq R$ 是分段常函数，$f: R^m \times U \to R^n$ 几乎处处连续可微，最简单的控制是继电器式控制. 将动态控制问题化为静态非线性规划是求解该类问题的有效方法之一，特别是针对控制输入为有限个开关的控制问题. 近几年有关这方面的成果较多，文献[1]划分未知整体时间段为

收稿日期：2005-04-30
基金项目：国家跨世纪优秀人才资助项目；陕西省自然科学研究项目(2003A09)
作者简介：李炳杰(1963-)，男，空军工程大学副教授，西安电子科技大学博士研究生.

规定的有限个长度未知的分段,构造了对应的非线性规划,并给出了投影梯度迭代算法,但迭代格式中出现高阶导数表示的Hesse矩阵,为求出梯度还须求解关于梯度向量的微分方程组. 文[2]利用欧拉折线法化连续问题为离散问题构造了求解工业机器人实时参数最优控制的非线性规划方法,尽管很好地解决了参数扰动,但对较复杂的情形,为达到一定的精度离散时间区域会形成规划变量的倍数增长. 文献[3,4]研究了时间最优控制的梯度计算法. 笔者以相邻开关时间间隔为变量建立与原问题等价的非线性规划,该规划的约束条件中包含每分段对应的状态方程初边值问题以及保持状态函数连续的等式. 对每分段实施等份分割,利用龙格库塔格式建立每分段的递推格式,等分每分段的目的是为了更方便地构造算法. 利用龙格库塔格式的收敛性和最优性条件证明该方法的收敛性.

1 非线性规划模型及算法

设控制问题有 N 个开关,将时间段 $[0,t_f]$ 划分为 $0=t_0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_N\leqslant t_{N+1}=t_f$,在每个分段 $t_{i-1}\leqslant t<t_i$ 上 $u(t)=u_i$(常数),当 $u_i=(-1)^iM$ 或 $u_i=(-1)^{i+1}M$ 时就是继电器式控制,时间最优开关控制的目的是选择最优的开关点 t_i $(i=1,2,\cdots,N)$ 使得 $[0,t_f]$ 最小.

令 $\xi_i=t_i-t_{i-1}$,显然,$t_i=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i$,$i=1,2,\cdots,N+1$. 在第 i 个时间分段(不妨记为 ξ_i)上轨线对应的状态方程满足 $x'(t)=f(x(t),u_i)=f_i(x(t))$,由文献[1],在时间分段 ξ_i 上轨线 $x(t)$ 可表示为 $x(t)=x(\tau_i,\xi_{i-1},\xi_{i-2},\cdots,\xi_1)$,$0\leqslant\tau_i<\xi_i$,$t=\tau_i+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{i-1}$. 由此得到与问题($P$)等价的非线性规划($\bar{P}$)

$$\min\quad \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{N+1}\quad, \tag{2}$$

$$\text{s.t.}\ \frac{\partial x}{\partial\tau_i}(\tau_i,\xi_{i-1},\xi_{i-2},\cdots,\xi_1)=f_i(x(\tau_i,\xi_{i-1},\xi_{i-2},\cdots,\xi_1))\quad, \tag{3}$$

$$x(\tau_i,\xi_{i-1},\xi_{i-2},\cdots,\xi_1)\Big|_{\tau_i=0}=x(\tau_{i-1},\xi_{i-2},\cdots,\xi_1)\Big|_{\tau_{i-1}=\xi_{i-1}}\quad, \tag{4}$$

$$x(0)=x_0\quad,\qquad x(\xi)=x_T\quad, \tag{5}$$

其中 $x(\xi)=x(\xi_{N+1},\xi_N,\cdots,\xi_1)$,非线性规划($\bar{P}$)以 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{N+1})^{\mathrm{T}}$ 为变量. 文献[1]针对该类问题引进时间终端的 $N+1-m$ 维曲面 $h(\xi)=x(\xi)-x_T$,计算曲线 $h(\xi)$ 的梯度 $\nabla\boldsymbol{h}(\xi)$,$\nabla\boldsymbol{h}(\xi)$ 是一个 $m\times(N+1)$ 的Jacobi矩阵. 为得到 $\nabla\boldsymbol{h}(\xi)$,需构造关于Jacobi矩阵的微分方程初值问题

$$\frac{\partial}{\partial\tau_i}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi_j}\right)=\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\xi_j}\right)\quad,\qquad \frac{\partial x}{\partial\xi_j}\Big|_{\tau_{j+1}=0}=f_j(x)\Big|_{\tau_{j+1}=0}\quad. \tag{6}$$

求解微分方程组(6)得到Jacobi矩阵 $\nabla\boldsymbol{h}(\xi)$,进一步以某初始值 $(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots,\xi_{N+1}^{(0)})$ 开始构造投影梯度迭代算法,构造该算法的主要障碍是求解微分方程组(6). 这里避开求解微分方程组,直接构造常规非线性规划算法.

对每个假设的时间分段 $[0,\xi_i]$ 实施 n 等份分割,分割步长为 $h_i=\xi_i/n$,令 $x_{1,0}=x_0$,$x_{i,0}=x_{i-1}$,$i=1,2,\cdots,N+1$,在 $[0,\xi_i]$ 上利用龙格库塔公式(不妨以二阶公式为例),有

$$x_{i,k}=x_{i,k-1}+h_if\left(x_{i,k-1}+\frac{h_i}{2}f(x_{i,k-1},u_i),u_i\right)\quad,\qquad k=1,2,\cdots,n\quad. \tag{7}$$

利用上式以 $x_{i,0}$(上一个时间分段 $[0,\xi_{i-1}]$ 终端处状态函数的数值解)为初值递推得到 $x_{i,n}$,令 $x_{i,n}=x_i$,显然 x_i 只与 $x_0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i$ 有关,记 $x_i=\hat{x}(x_0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i)$. 以 $x_{i+1,0}=x_i$ 为初值,在 $[0,\xi_{i+1}]$ 上取步长 $h_{i+1}=\xi_{i+1}/n$ 继续递推得到 $x_{i+1,n}=x_{i+1}=x_{i+2,0}$,$x_{i+1}=\hat{x}(x_0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i,\xi_{i+1})$,如此继续可得 $x_{N+1}=\hat{x}(x_0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{N+1})$,由此得到非线性规划($\bar{P}_n$)

$$\min\quad \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{N+1}\quad, \tag{8}$$

$$\text{s.t.}\ \hat{x}(x_0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{N+1})-x_T=0\quad. \tag{9}$$

问题($\bar{P}_n$)是($\bar{P}$)的近似问题,在一定的条件下,当 $n\to\infty$ 时,问题($\bar{P}_n$)的解收敛于($\bar{P}$)的解,假设($\bar{P}_n$)的解收敛于($\bar{P}$)的解,则可构造问题(P)的直接非线性规划算法.

算法 1　步骤 1　输入开关控制 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_{N+1})$，定义开关时间变量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{N+1})$，取开关时间初值 $\xi^{(0)}=(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots,\xi_{N+1}^{(0)})$，给定适当的正整数 n，精度 $\varepsilon>0$.

步骤 2　取状态方程的初值变量 x_0，$i:=1$.

步骤 3　$k:=1$，$x_{i,k-1}=x_0$. $h_i:=\xi_i/n$，$i=1,2,\cdots,N+1$.

步骤 4　$x_{i,k}=x_{i,k-1}+h_i f\left(x_{i,k-1}+\dfrac{h_i}{2}f(x_{i,k-1},u_i),\ u_i\right)$.

步骤 5　如果 $k<n$，则令 $k:=k+1$，转步骤 4，如果 $k=n$，则 $x_0=x_{i,k}$，转步骤 6.

步骤 6　如果 $i<N+1$，则 $i:=i+1$，转步骤 3，如果 $i=N+1$，令 $x_{N+1}=x_0$，转步骤 7.

步骤 7　求解问题 $(\bar{P}_n)$：$\min\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{N+1}$，$x_{N+1}=x_T$. 得到最优解 $\xi^{(1)}=(\xi_1^{(1)},\xi_2^{(1)},\cdots,\xi_{N+1}^{(1)})$，如果 $\|\xi^{(1)}-\xi^{(0)}\|\leqslant\varepsilon$，则输出 $\xi^*=\xi^{(1)}$，否则，$\xi^{(0)}:=\xi^{(1)}$，$n:=2n$，清除变量 x_0，转步骤 2.

注 1　如果开关控制问题 (P) 的解不惟一，则步骤 7 中终止条件 $\|\xi^{(1)}-\xi^{(0)}\|\leqslant\varepsilon$ 应有所变化，可定义 $\eta^{(0)}=\xi_1^{(0)}+\xi_2^{(0)}+\cdots+\xi_{N+1}^{(0)}$，$\eta^{(1)}=\xi_1^{(1)}+\xi_2^{(1)}+\cdots+\xi_{N+1}^{(1)}$，终止条件为 $|\eta^{(1)}-\eta^{(0)}|\leqslant\varepsilon$.

2　收敛性分析

由文献[1,3]，如果问题 (P) 有惟一解，则问题 $(\bar{P})$ 也有惟一解. 令 $\eta=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{N+1}$，无论问题 $(\bar{P})$ 是否有惟一解，只要其解存在，则所有最优解对应的和 η^* 惟一存在.

定理 1　假设 $f(x,u)$ 在 $t\in[0,T]$ 上分别关于 x 和 u 是 Lipschitz 连续的，如果问题 (P) 的最优控制存在，$\xi^*=(\xi_1^*,\xi_2^*,\cdots,\xi_{N+1}^*)$ 是问题 $(\bar{P})$ 的一个最优解，$\xi_n^*=(\xi_{1,n}^*,\xi_{2,n}^*,\cdots,\xi_{N+1,n}^*)$ 是问题 $(\bar{P}_n)$ 的最优解，令 $\eta^*=\xi_1^*+\xi_2^*+\cdots+\xi_{N+1}^*$，$\eta_n^*=\xi_{1,n}^*+\xi_{2,n}^*+\cdots+\xi_{N+1,n}^*$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n^*=\eta^*$.

证明　式(7)可改写为 $x_{i,k}=x_{i,k-1}+h_i\,\varphi(x_{i,k-1},u_i,h_i)$，其中 $\varphi(x,u,h)$ 称增量函数，显然 $\varphi(x,u,0)=f(x,u)$，不难验证 $\varphi(x,u,h)$ 关于 x 和 h 是 Lipschitz 连续的，因此由文献[5]，递推公式(7)在 $[0,\xi_i]$ 上收敛于(3)的解. 对充分大的 n，式(7)是稳定的.

由于 $\xi_n^*=(\xi_{1,n}^*,\xi_{2,n}^*,\cdots,\xi_{N+1,n}^*)$ 是问题 $(\bar{P}_n)$ 的最优解，设 $\hat{x}_n(t)$ 是其对应的满足方程组(3)的轨线，$\hat{x}_n(t)$ 是分段二次连续函数且满足 $\hat{x}_n(\eta_n^*)=x_T$，因此 ξ_n^* 是 $\bar{P}$ 的容许解，故有 $\eta_n^*\geqslant\eta^*$.

设问题 $(\bar{P})$ 的最优解 $\xi^*=(\xi_1^*,\xi_2^*,\cdots,\xi_{N+1}^*)$ 对应的轨线是 $x(t)$，则有 $x(\eta^*)=x_T$，令 $h_i^*=\xi_i^*/n$，$i=1,2,\cdots,N+1$，对 ξ^* 按式(9)递推得到 $\hat{x}(x_0,\xi_1^*,\xi_2^*,\cdots,\xi_{N+1}^*)$，不妨记该值为 $\hat{x}(\eta^*)=\hat{x}_T$，该数值解对应轨线为 $\hat{x}(t)$，显然 $\hat{x}(t)$ 为分段二次连续函数. 由数值解的局部误差估计可得[5]

$$|x(\eta^*)-\hat{x}(\eta^*)|\leqslant C(h^*)^2\quad,\qquad h^*=\max\{h_i^*\}\quad.$$

由 $\hat{x}(t)$ 的连续性以及式(7)的收敛性与稳定性，存在充分大的 n，使得 $\hat{x}(\eta^*+\alpha h_{N+1}^*)=x_T$，其中，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，$\hat{x}(\eta^*+\alpha h_{N+1}^*)$ 由 $\hat{x}(t)$ 在第 $N+1$ 个时间分段上满足方程组(3)及递推公式(7)的延拓而得. 值得说明的是，$\hat{x}(\eta^*-\alpha h_{N+1}^*)=x_T$ 不可能成立，否则，$(\xi_1^*,\ \xi_2^*,\ \cdots\ \xi_{N+1}^*-\alpha h_{N+1}^*)$ 是问题 $(\bar{P}_n)$ 的容许解，这与 $\xi_n^*=(\xi_{1,n}^*,\xi_{2,n}^*,\cdots,\xi_{N+1,n}^*)$ 是问题 $(\bar{P}_n)$ 的最优解以及结论 $\eta_n^*\geqslant\eta^*$ 矛盾. 因此，$(\xi_1^*,\ \xi_2^*,\ \cdots\xi_{N+1}^*-\alpha h_{N+1}^*)$ 是问题 $(\bar{P}_n)$ 的容许解，则有，$\eta^*+\alpha h_{N+1}^*\geqslant\eta_n^*\geqslant\eta^*$，显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n^*=\eta^*$.

定理 2　如果问题 (P) 存在最优控制，并且问题 $(\bar{P})$ 存在惟一最优解，则在定理 1 的假设下，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\xi^*-\xi_n^*\|=0$.

证明　不难得到与 $(\bar{P})$ 等价的以积分方程表达式为约束条件的非线性规划 $(\tilde{P})$

$$\min\quad \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{N+1}\quad,\tag{10}$$

$$\text{s.t. } x_0+\int_0^{\xi_1}f(x(\tau),\ u_1)\ \mathrm{d}\tau+\int_{\xi_1}^{\xi_1+\xi_2}f(x(\tau),\ u_2)\ \mathrm{d}\tau+\cdots+$$
$$\int_{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_N}^{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_N+\xi_{N+1}}f(x(\tau),\ u_{N+1})\ \mathrm{d}\tau=x_T\quad.\tag{11}$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^T$，将约束条件(11)改写为 $h(\xi) = x(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{N+1}) - x_T = 0$，则 Lagrange 函数为 $L(\xi, \lambda) = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{N+1} - \lambda^T h(\xi)$，由于约束条件式(11)始终为积极约束[6~8]且问题 $(\tilde{P})$ 有惟一解 $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \cdots, \xi_{N+1}^*)$，由一阶最优性条件，最优解 ξ^* 不但满足式(11)而且满足 $\nabla L(\xi^*, \lambda) = 0$，因此对 $i = 1, 2, \cdots, N$，有

$$\lambda_n^T \{(f(x(\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_i^*), u_i) + \sum_{j=i+1}^{N+1} (f(x(\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_j^*), u_j) - f(x(\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_{j-1}^*), u_j)))\} = 1 \quad , \tag{12}$$

$$\lambda^T f(x(\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_{N+1}^*), u_{N+1}) = 1 \quad . \tag{13}$$

同理，对问题 $(\bar{P}_n)$ 引入 Langrange 乘子 $\lambda_n = (\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \cdots \lambda_{m,n})^T$ 以及相应的 Lagrange 函数，由其分段二次连续轨线 $\hat{x}_n(t)$ 对应的最优性条件可得，对 $i = 1, 2, \cdots, N$ 有

$$\lambda^T \{(f(\hat{x}(\xi_{1,n}^* + \xi_{2,n}^* + \cdots + \xi_{i,n}^*), u_i) + \sum_{j=i+1}^{N+1} (f(\hat{x}(\xi_{1,n}^* + \xi_{2,n}^* + \cdots + \xi_{j,n}^*), u_j) - f(\hat{x}(\xi_{1,n}^* + \xi_{2,n}^* + \cdots + \xi_{j-1,n}^*), u_j)))\} = 1 \quad , \tag{14}$$

$$\lambda_n^T f(\hat{x}(\xi_{1,n}^* + \xi_{2,n}^* + \cdots + \xi_{N+1,n}^*), u_{N+1}) = 1 \quad . \tag{15}$$

对式(12)，(14)中的 N 个等式，二式相减可知，对 $i = 1, 2, \cdots, N$ 有

$$\lambda^T (f(x(\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_i^*), u_i) - f(x(\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_i^*), u_{i+1})) = 0 \quad , \tag{16}$$

$$\lambda_n^T (f(\hat{x}(\xi_{1,n}^* + \xi_{2,n}^* + \cdots + \xi_{i,n}^*), u_i) - f(\hat{x}(\xi_{1,n}^* + \xi_{2,n}^* + \cdots + \xi_{i,n}^*), u_{i+1})) = 0 \quad . \tag{17}$$

由式(13)与(15)的差得

$$\lambda^T f(x(\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_{N+1}^*), u_{N+1}) - \lambda_n^T f(\hat{x}(\xi_{1,n}^* + \xi_{2,n}^* + \cdots + \xi_{N+1,n}^*), u_{N+1}) = 0 \quad ,$$

$$\lambda^T f(x(\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_{N+1}^*), u_{N+1}) - \lambda^T f(\hat{x}(\xi_{1,n}^* + \xi_{2,n}^* + \cdots + \xi_{N+1,n}^*), u_{N+1}) + \lambda^T f(\hat{x}(\xi_{1,n}^* + \xi_{2,n}^* + \cdots + \xi_{N+1,n}^*), u_{N+1}) - \lambda_n^T f(\hat{x}(\xi_{1,n}^* + \xi_{2,n}^* + \cdots + \xi_{N+1,n}^*), u_{N+1}) = 0 \quad .$$

由定理1及函数 $f(x,u)$ 的 Lipschitz 连续性和三角不等式不难证明 $\lim_{n\to\infty} \|\lambda - \lambda_n\| = 0$. 对充分大的 n 以及 $i = 1, 2, \cdots, N$，由式(16)减去式(17)，利用 $f(x,u)$ 的 Lipschitz 连续性和三角不等式，再利用结论 $\lim_{n\to\infty} \|\lambda - \lambda_n\| = 0$ 及定理1结论 $\lim_{n\to\infty} \eta_n^* = \eta^*$ 和轨线在相邻开关点的连续性质可得

$$\lim_{n\to\infty} \|(\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_i^*) - (\xi_{1,n}^* + \xi_{2,n}^* + \cdots + \xi_{i,n}^*)\| = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, N \quad ,$$

故有 $$\lim_{n\to\infty} \|\xi^* - \xi_n^*\| = 0 \quad .$$

注2 由以上定理可知，如果问题 (P) 存在最优控制 t_f^*，则由算法1求出的解的和收敛于最优控制 t_f^*，但开关时间不惟一. 如果问题 $(\bar{P})$ 存在惟一最优解，则算法1的解惟一收敛于开关时间.

3 算 例

考虑继电器式控制，控制输入 $u = \{u_1, u_2, \cdots\} = \{-1, 1, -1, \cdots\}$，状态方程为

$$x_1' = x_2 \quad ,$$

$$x_2' = -x_1 - (x_1^2 - 1) x_2 + u \quad .$$

取两个开关点形成3个变量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 执行算法1，从 $n = 10$ 开始，记录问题 (P_n) 的解如表1所示.

表1 2个开关点时的迭代记录

n	ξ_1^*	ξ_2^*	ξ_3^*	t_f^*
10	0.9604	2.5700	0.1402	3.6706
20	0.7230	2.3702	0.0000	3.0932
30	0.7239	2.3718	0.0000	3.0957

取5开关点形成 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$，从 $n = 10$ 开始，记录问题 (P_n) 的解如表2所示.

显然,两种不同的情形下,只需 3 次网格细分,计算精度至少已达到 10^{-2},并且收敛于同一最优时间 $t_f^* = 3.09$. 如果增加开关点,则 ξ_3 以后的开关均无效. 值得说明的是,如果取其他不同的开关控制验证算法 1,可得到完全相似的结果,算法仍保持很好的收敛性.

表 2　5 个开关点时的迭代记录

n	ξ_1^*	ξ_2^*	ξ_3^*	ξ_4^*	ξ_5^*	ξ_6^*	t_f^*
10	0.6013	3.0012	0.2141	0.0189	0.3187	0.0000	4.1453
20	0.7202	2.3700	0.0011	0.0000	0.0000	0.0000	3.0913
30	0.7230	2.3716	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3.0946

4　结 束 语

文中提出的时间最优开关控制的常规非线性规划方法不必求解任何形式的微分方程,也不必求出函数的导数,不增加变量个数. 可利用数值积分公式将该方法推广到一般的时间最优控制中. 从算例可看出,该方法的收敛速度很快,如果递推公式(7)的收敛阶数提高,比如运用更高阶的龙格库塔公式或变单步迭代为多步迭代,会进一步提高收敛速度.

参考文献:

[1] Kaya C Y, Noakes J L. Computational Method for Time-Optimal Switching Control[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, 117(1): 69-92.

[2] Boskens C, Maurer H. Nonlinear Programming Methods for Real-Time Control of an Industrial Robot[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 107(3): 505-527.

[3] Kaya C Y, Noakes J L. Computations and Time-Optimal Controls[J]. Optimal Control Applications and Methods, 1996, 17(1): 171-185.

[4] Lucas S K, Kaya C Y. Switching Time Computation for Bang-Bang Control Law[A]. Proceedings of the 2001 American Control Conference[C]. Washington: IEEE, 2001. 176-181.

[5] 余德浩,汤华中. 微分方程数值解法[M]. 北京:科学出版社,2003.

[6] 袁亚湘,孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2001.

[7] Yin Zhonghai, Li Bingjie. A Self-adapted Two Step Size Newton Algorithm for Multidimensional Optimal Problem[J]. Journal of Xidian University, 2002, 29(6): 800-804.

[8] Yin Zhonghai, Jian Jianfeng, Zhou Lihua, et al. Defect of the Existing Fidelity Definition and Its Improvement[J]. Journal. of Xidian University, 2004, 31(6): 833-836.

(编辑:齐淑娟)

(上接第 298 页)

[3] Mallat S, Zhong S. Characterization of Signals from Multiscale Edges[J]. IEEE Trans on IAMI, 1992, 14(7): 710-731.

[4] Morse B S, Pizer S M, Liu A. Multiscale Medial Analysis of Medical Images[J]. Image and Vision Computing, 1994, 12(6): 327-338.

[5] Yang Wei, Su Wanli, Song Guoxiang. Multi-scale Edge Detection of the Image Based on the Interval Biorthogonal Wavelet[J]. Journal of Xidian University, 2004, 31(4): 630-633.

[6] 冯象初,宋国乡,甘小冰. 数值泛函与小波理论[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2001.

[7] Morse B S. Computation of Object Cores from Grey-level Images[D]. Chapel Hill: University of North Carolina at Chapel Hill, 1994.

(编辑:齐淑娟)