区间数互补判断矩阵排序的一种新方法

周宏安[1,2]，刘三阳[1]
(1. 西安电子科技大学 理学院,陕西 西安 710071;
2. 陕西理工学院 基础课部,陕西 汉中 723000)

摘要：研究了决策信息以区间数互补判断矩阵形式给出的多目标决策问题. 给出了区间数一致性互补判断矩阵的概念及其判定定理;建立了一个目标规划模型,通过求解该模型得到区间数互补判断矩阵的权重向量;利用已有的可能度公式对方案进行排序与择优. 提出了区间数互补判断矩阵排序的目标规划法,该方法具有操作简便和易于上机实现的特点.

关键词：多目标决策;区间数一致性互补判断矩阵;目标规划;可能度;排序
中图分类号:O223 **文献标识码**:A **文章编号**:1001-2400(2006)02-0292-03

Novel method for priorities in the interval numbers complementary judgment matrix

ZHOU Hong-an[1,2], *LIU San-yang*[1]
(1. School of Science, Xidian Univ., Xi′an 710071, China;
2. Dept. of Basic Courses, Shaanxi Univ. of Technology, Hanzhong 723000, China)

Abstract: We focus on studying the multi-objective decision making problems, in which the preference information provided by the decision maker takes the form of an interval numbers complementary judgment matrix. Firstly, the concept of interval numbers consistency complementary judgment matrix and its judgment theorem are given. Secondly, a goal programming model is established and the weight vector of interval numbers complementary judgment matrix is obtained by solving the model. Finally, the alternatives are ranked by using an existing priority formula of possibility. A goal programming method for interval numbers complementary judgment matrix is presented and characterized by simple operation and it is easy to implement on computer.

Key Words: multi-objective decision-making; interval numbers consistency complementary judgment matrix; goal programming; possibility; priority

多目标决策问题的实质是利用已有的决策信息对给定的有限备选方案进行排序或择优. 在实际决策过程中,为了得到最终的方案排序结果,往往需要决策者(专家)按照某一准则和标度对方案进行两两比较,并构造判断矩阵. 目前,关于判断矩阵为数值形式的排序理论和方法已趋于完善[1~6]. 然而,由于客观事物的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性,人们在构造判断矩阵时,其所得到的判断值有时不是确定的数值,而是以区间数的形式出现,如何处理这类问题,是当今决策科学界研究的一个热点. 如文献[7]提出了行和归一法,但此法易造成决策信息的丢失,从而会增大最终决策失误的可能性;文献[8]提出了相对优势度法,此法虽然提高了决策分辨率,但需要进行可能度矩阵的一致性判断,且计算量较大. 鉴于上述方法的不足,笔者给出了区间数一致性互补判断矩阵的概念及其判定定理;建立了一个目标规划[9]模型,通过求解该模型得到区间数互补判断矩阵的权重向量;最后,利用已有的可能度公式对方案进行排序或择优,提出了区间数互补判断矩阵排序的目标规划法. 该方法具有操作简便、易于上机实现和决策分辨率较高的特点,算例分析表明方法亦是行之有效的.

收稿日期:2005-04-20
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2004A05);陕西省教育厅科学研究基金资助项目(06JK189)
作者简介:周宏安(1968-),男,陕西理工学院副教授,西安电子科技大学博士研究生.

1　预备知识

定义 1　设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，其中 b_{ij} 表示方案 x_i 优于方案 x_j 的程度，且满足：$b_{ij}>0, b_{ij}+b_{ji}=1, b_{ii}=0.5, \forall i, j\in N$. 则称 B 是互补判断矩阵. 特别地，当 $b_{ij}b_{ki}b_{jk}=b_{ji}b_{ik}b_{kj}, \forall i,j,k\in N$ 成立时，则 B 是一致性互补判断矩阵[4,5].

定理 1　设 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是互补判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 的权重向量，若 $b_{ij}=\omega_i/(\omega_i+\omega_j), \forall i, j\in N$ 成立，则 B 是一致性互补判断矩阵[5].

定义 2　设 $\tilde{a}=[a^L,a^R]=\{x\mid 0\leqslant a^L\leqslant x\leqslant a^R\}$，则称 $\tilde{a}$ 为一个区间数. 特别地，当 $a^L=a^R$ 时，$\tilde{a}$ 退化为一实数[10~13].

为了便于区间数计算，给出下列运算法则[12]：设 $\tilde{a}=[a^L,a^R]$，$\tilde{b}=[b^L,b^R]$，则 (1) $\tilde{a}=\tilde{b}\Leftrightarrow a^L=b^L, a^R=b^R$；(2) $\tilde{a}+\tilde{b}=[a^L+b^L, a^R+b^R]$；(3) $\tilde{a}\times\tilde{b}=[a^Lb^L, a^Rb^R]$；(4) $\tilde{a}/\tilde{b}=[a^L/b^R, a^R/b^L]$.

为了进行区间数之间的比较，给出下列定义：

定义 3　设 $\tilde{a}=[a^L,a^R]$，$\tilde{b}=[b^L,b^R]$ 为两个任意区间数[13]，则称

$$p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\min\left\{\max\left[\frac{a^R-b^L}{(a^R-a^L)+(b^R-b^L)},0\right],1\right\}\tag{1}$$

为 $\tilde{a}\geqslant\tilde{b}$ 的可能度. 在此定义下，$p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})$ 有下列性质：

(1) $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})+p(\tilde{b}\geqslant\tilde{a})=1$；

(2) 若 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=p(\tilde{b}\geqslant\tilde{a})$，则 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=p(\tilde{b}\geqslant\tilde{a})=1/2$；

(3) 若 $a^R\leqslant b^L$，则 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=0$，若 $a^L\geqslant b^R$，则 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=1$；

(4) 对于 3 个区间数 $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}$，若 $\tilde{a}\geqslant\tilde{b}$，则 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{c})\geqslant p(\tilde{b}\geqslant\tilde{c})$.

由上述定义和性质可看出，区间数比较实质是实数比较的延拓.

2　基于目标规划的区间数互补判断矩阵排序方法

定义 4　设 $\tilde{B}=(\tilde{b}_{ij})_{n\times n}$，其中 $\tilde{b}_{ij}=[b_{ij}^L, b_{ij}^R]$，$\tilde{b}_{ji}=[b_{ji}^L, b_{ji}^R]$，且满足：$b_{ij}^L+b_{ji}^R=b_{ij}^R+b_{ji}^L=1$，$\tilde{b}_{ii}=[0.5, 0.5]$，$\forall i,j\in N$，则称 $\tilde{B}$ 是区间数互补判断矩阵. 特别地，当 $\tilde{b}_{ij}\times\tilde{b}_{ki}\times\tilde{b}_{jk}=\tilde{b}_{ji}\times\tilde{b}_{ik}\times\tilde{b}_{kj}, \forall i,j,k\in N$ 成立时，则称 $\tilde{B}$ 是区间数一致性互补判断矩阵.

对定理 1 进行推广，结合定义 4 易证下列定理.

定理 2　设 $\tilde{\boldsymbol{v}}=(\tilde{v}_1,\tilde{v}_2,\cdots,\tilde{v}_n)^{\mathrm{T}}$ 是区间数互补判断矩阵 $\tilde{B}=(\tilde{b}_{ij})_{n\times n}$ 的权重向量，若 $\tilde{b}_{ij}=\tilde{v}_i/(\tilde{v}_i+\tilde{v}_j)$，$\forall i,j\in N$ 成立，则 $\tilde{B}$ 是区间数一致性互补判断矩阵.

证明　因

$$\tilde{b}_{ij}\times\tilde{b}_{ki}\times\tilde{b}_{jk}=(\tilde{\omega}_i/(\tilde{\omega}_i+\tilde{\omega}_j))\times(\tilde{\omega}_k/(\tilde{\omega}_k+\tilde{\omega}_i))\times(\tilde{\omega}_j/(\tilde{\omega}_j+\tilde{\omega}_k))=$$
$$(\tilde{\omega}_j/(\tilde{\omega}_i+\tilde{\omega}_j))\times(\tilde{\omega}_k/(\tilde{\omega}_k+\tilde{\omega}_j))\times(\tilde{\omega}_i/(\tilde{\omega}_i+\tilde{\omega}_k))=\tilde{b}_{ji}\times\tilde{b}_{ik}\times\tilde{b}_{kj},$$

故 $\tilde{B}$ 是区间数一致性互补判断矩阵.

为此，设 $\tilde{B}$ 是区间数一致性互补判断矩阵，$\tilde{\boldsymbol{v}}=(\tilde{v}_1,\tilde{v}_2,\cdots,\tilde{v}_n)^{\mathrm{T}}$ 为其权重向量，则有

$$[b_{ij}^L, b_{ij}^R]=\frac{[v_i^L, v_i^R]}{[v_i^L, v_i^R]+[v_j^L, v_j^R]}=\frac{[v_i^L, v_i^R]}{[v_i^L+v_j^L, v_i^R+v_j^R]}=\left[\frac{v_i^L}{v_i^R+v_j^R},\frac{v_i^R}{v_i^L+v_j^L}\right],\quad\forall i,j\in N.$$

即 $\quad b_{ij}^L=v_i^L/(v_i^R+v_j^R),\quad b_{ij}^R=v_i^R/(v_i^L+v_j^L),\quad\forall i,j\in N.$

亦即

$$v_i^L=b_{ij}^Lv_i^R+b_{ij}^Lv_j^R,\quad v_i^R=b_{ij}^Rv_i^L+b_{ij}^Rv_j^L,\quad\forall i,j\in N.\tag{2}$$

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}(n\geqslant 2)$ 为一有限的方案集，并记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$. 决策者按照某一准则和标度对方案集 X 进行两两比较，并构造区间数互补判断矩阵 $\tilde{B}$. 由于决策者在决策过程中所给出的 $\tilde{B}$ 通常是非一致的，即式(2)不成立，故引入偏差函数：$f_{ij}^L=|b_{ij}^Lv_i^R+b_{ij}^Lv_j^R-v_i^L|$，$f_{ij}^R=|b_{ij}^Rv_i^L+b_{ij}^Rv_j^L-v_i^R|$，$\forall i,j\in N$.

显然，为了得到合理的权重向量，上述偏差值总是越小越好，即有下列多目标优化模型：

$$(M1)\quad \min f_{ij}^L=|b_{ij}^Lv_i^R+b_{ij}^Lv_j^R-v_i^L|,\quad\forall i,j\in N;$$
$$\min f_{ij}^R=|b_{ij}^Rv_i^L+b_{ij}^Rv_j^L-v_i^R|,\quad\forall i,j\in N;$$

$$\text{s.t.}\ 0 \leqslant v_i^L \leqslant v_i^R \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} v_i^L \leqslant 1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} v_i^R \quad , \quad i \in N \quad .$$

由于每个目标函数希望达到的期望值为零,且考虑到所有的目标函数是公平竞争的,没有任何偏好关系,故可将上述模型转化为下列目标规划模型:

$$(M2)\quad \min J = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[(d_{ij}^{L+} + d_{ij}^{L-}) + (d_{ij}^{R+} + d_{ij}^{R-}) \right] \quad ;$$

$$\text{s.t.}\ b_{ij}^L v_i^R + b_{ij}^L v_j^R - v_i^L - d_{ij}^{L+} + d_{ij}^{L-} = 0 ;\ b_{ij}^R v_i^L + b_{ij}^R v_j^L - v_i^R - d_{ij}^{R+} + d_{ij}^{R-} = 0 \quad ;$$

$$0 \leqslant v_i^L \leqslant v_i^R \leqslant 1 ;\ 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} v_i^L \leqslant 1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} v_i^R ;\ d_{ij}^{L-} d_{ij}^{L+} = 0 ,\ d_{ij}^{R-} d_{ij}^{R+} = 0 \quad ;$$

$$d_{ij}^{L-} \geqslant 0 ,\ d_{ij}^{L+} \geqslant 0 ,\ d_{ij}^{R-} \geqslant 0 ,\ d_{ij}^{R+} \geqslant 0 ;\ \forall i, j \in N \quad ,$$

其中 d_{ij}^{L+}, d_{ij}^{L-} 分别表示 $b_{ij}^L v_i^R + b_{ij}^L v_j^R - v_i^L$ 期望值为 0 的上下偏差变量;d_{ij}^{R+}, d_{ij}^{R-} 分别表示 $b_{ij}^R v_i^L + b_{ij}^R v_j^L - v_i^R$ 期望值为 0 的上下偏差变量.

利用 Matlab6.5 的优化工具箱编程求解模型($M2$),即可得到区间数互补判断矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 的权重向量 $\tilde{\boldsymbol{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \cdots, \tilde{v}_n)^{\mathrm{T}}$. 由于 $\tilde{v}_i (i \in N)$ 为区间数,不便直接对方案进行排序. 为此,根据式(1)计算 $\tilde{v}_i \geqslant \tilde{v}_j$ 的可能度 $p(\tilde{v}_i \geqslant \tilde{v}_j), i, j \in N$,并建立可能度判断矩阵 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n \times n}$. 由定义 3 的性质 1 易知可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为数值型互补判断矩阵,故可利用文献[7]的排序公式

$$\omega_i = \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} + n/2 - 1 \right) \Big/ \left(n(n-1) \right) \quad , \qquad i \in N \tag{3}$$

得到 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$,并按其分量的大小对方案进行排序或择优.

基于上述讨论,下面通过算例给出区间数互补判断矩阵排序的步骤.

3 算 例

设某一决策问题,有 4 个方案 x_1, x_2, x_3, x_4 可供选择,决策者(专家)在某一准则下利用 0.1~0.9 标度对方案进行两两比较,给出的区间数互补判断矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = (\tilde{b}_{ij})_{4\times4} = ([b_{ij}^L, b_{ij}^R])_{4\times4} = \begin{bmatrix} [0.5, 0.5] & [0.4, 0.6] & [0.1, 0.7] & [0.3, 0.5] \\ [0.4, 0.6] & [0.5, 0.5] & [0.3, 0.4] & [0.3, 0.7] \\ [0.3, 0.9] & [0.6, 0.7] & [0.5, 0.5] & [0.2, 0.6] \\ [0.5, 0.7] & [0.3, 0.7] & [0.4, 0.8] & [0.5, 0.5] \end{bmatrix} \quad .$$

step 1 根据模型($M2$)解得:$v_1^L = 0.1779$, $v_1^R = 0.2223$, $v_2^L = 0.1778$, $v_2^R = 0.2224$, $v_3^L = 0.1339$, $v_3^R = 0.2440$, $v_4^L = 0.2668$, $v_4^R = 0.3113$, $d_{11}^{L-} = 0$, $d_{11}^{L+} = 0.4447$, $d_{11}^{R-} = 0.4446$, $d_{11}^{R+} = 0$, $d_{12}^{L-} = 0$, $d_{12}^{L+} = 0$, $d_{12}^{R-} = 0.8894$, $d_{12}^{R+} = 0$, $d_{13}^{L-} = 0.1312$, $d_{13}^{L+} = 0$, $d_{13}^{R-} = 0$, $d_{13}^{R+} = 0.1085$, $d_{14}^{L-} = 0.1779$, $d_{14}^{L+} = 0$, $d_{14}^{R-} = 0$, $d_{14}^{R+} = 0$, $d_{21}^{L-} = 0$, $d_{21}^{L+} = 0$, $d_{21}^{R-} = 0.8894$, $d_{21}^{R+} = 0$, $d_{22}^{L-} = 0$, $d_{22}^{L+} = 0.4446$, $d_{22}^{R-} = 0.4447$, $d_{22}^{R+} = 0$, $d_{23}^{L-} = 0.3796$, $d_{23}^{L+} = 0$, $d_{23}^{R-} = 0.9523$, $d_{23}^{R+} = 0$, $d_{24}^{L-} = 0.1779$, $d_{24}^{L+} = 0$, $d_{24}^{R-} = 0$, $d_{24}^{R+} = 0.8894$, $d_{31}^{L-} = 0$, $d_{31}^{L+} = 0$, $d_{31}^{R-} = 0$, $d_{31}^{R+} = 0.4197$, $d_{32}^{L-} = 0$, $d_{32}^{L+} = 0.1019$, $d_{32}^{R-} = 0.2158$, $d_{32}^{R+} = 0$, $d_{33}^{L-} = 0$, $d_{33}^{L+} = 0.1041$, $d_{33}^{R-} = 0.1041$, $d_{33}^{R+} = 0$, $d_{34}^{L-} = 0.2885$, $d_{34}^{L+} = 0$, $d_{34}^{R-} = 0$, $d_{34}^{R+} = 0$, $d_{41}^{L-} = 0$, $d_{41}^{L+} = 0$, $d_{41}^{R-} = 0$, $d_{41}^{R+} = 0$, $d_{42}^{L-} = 0.1779$, $d_{42}^{L+} = 0$, $d_{42}^{R-} = 0$, $d_{42}^{R+} = 0.8894$, $d_{43}^{L-} = 0$, $d_{43}^{L+} = 0.8221$, $d_{43}^{R-} = 0$, $d_{43}^{R+} = 0.8134$, $d_{44}^{L-} = 0$, $d_{44}^{L+} = 0.4446$, $d_{44}^{R-} = 0.4447$, $d_{44}^{R+} = 0$.

因此,$\tilde{\boldsymbol{v}} = ([0.1779, 0.2223], [0.1778, 0.2224], [0.1399, 0.2440], [0.2668, 0.3113])^{\mathrm{T}}$.

step 2 利用式(1)计算 p_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$,并建立相应的可能度矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5549 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5548 & 0 \\ 0.4451 & 0.4452 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad .$$

(下转第 326 页)