

一类二阶时变非线性系统的混合自适应重复学习控制

孙云平, 刘 赟, 李俊民

(西安电子科技大学 理学院, 陕西 西安 710071)

摘要: 针对含有时变和时不变未知参数的二阶非线性系统, 结合 Backstepping 方法, 提出了一种新的自适应重复学习控制方法, 可处理参数在一个未知紧集内周期性快时变的非线性系统. 通过引入参数周期自适应律, 设计出的自适应控制策略, 使跟踪误差平方在一个周期上的积分范数渐近收敛于零. 通过构造 Lyapunov 函数, 给出了闭环系统收敛的一个充分条件.

关键词: 自适应重复学习控制; Backstepping 方法; Lyapunov 函数; 参数周期自适应律; 混合型的参数非线性系统

中图分类号: TP13 文献标识码: A 文章编号: 1001-2400(2006)03-0495-05

Adaptive repetitive learning control for a class of second order nonlinear time-varying systems with mixed parameters

SUN Yun-ping, LIU Yun, LI Jun-min

(School of Science, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract: A novel adaptive repetitive learning control for second-order nonlinear systems with time-varying and time-invariant parameters is proposed by using the Backstepping approach. It can be applied to the time-varying parametric uncertainty systems with an unknown compact set, which are non-vanishing, rapid time-varying, and periodic and where the prior knowledge is the periodicity only. A periodic mixed adaptive law and an adaptive repetitive learning control one are constructed to ensure the asymptotic convergence of the tracking error in the sense of square error norm. Also, a sufficient condition for the convergence of the method is given. A simulation example illustrates the effectiveness and the feasibility of the proposed method.

Key Words: adaptive repetitive learning control; Backstepping approach; Lyapunov function; periodic parameter adaptive law; mixed parametric nonlinear system

自适应控制可有效地处理线性和非线性系统含有常值参数的不确定性, 而对含有时变参数不确定系统, 实施自适应控制还是一个公开的难题^[1~4]. 文献[5]解决了含有慢时变参数不确定性的自适应控制问题, 文献[6]解决了对已知紧集内任意快时变参数不确定性系统的自适应控制问题, 文献[7]对系统中快时变参数渐近收敛到一个常数的控制问题, 给出了自适应控制策略. 以上文献说明了自适应控制算法还不能解决任意快的非零变化的未知参数不确定性问题. 当系统的不确定性参数的周期预先知道时, 文献[8]通过分段积分方法, 构造了自适应控制器的参数周期自适应律, 解决了一阶混合参数不确定性系统的周期自适应控制问题, 使得跟踪误差在 L_2^2 意义下渐近收敛, 但其仅对不确定参数满足匹配条件的情况作了研究. 文献[9]对具有周期和拟周期时变参数不确定系统, 利用 Backstepping 方法给出了鲁棒学习控制策略. 文献[10]对伺服机械系统给出了一种自适应重复学习控制方法, 该方法仅适合于未知常值参数的系统. 笔者在文献[8]的基

收稿日期: 2005-07-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60374015)

作者简介: 孙云平(1966-), 男, 西安电子科技大学硕士研究生.

基础上,研究含有时变和时不变参数化二阶非线性系统,去掉了对未知参数匹配条件的限制,提出了混合参数自适应律,利用 Backstepping 方法,通过构造 Lyapunov 函数,设计了混合自适应控制率,使得跟踪误差 L_T^2 意义下渐近收敛于零,并给出了闭环系统稳定的充分条件.数值仿真说明了所提方法的有效性和可行性.

1 问题描述和假设

考虑下列二阶三角型非线性参数的不确定性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta_2^T f_1(x_1) \quad , \\ \dot{x}_2 &= u + \theta_1^T(t) \varphi(x) + \theta_2^T f_2(x) \quad , \\ y &= x_1 \quad , \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x = [x_1, x_2]^T \in R^2$ 是可测的系统状态, $u \in R$ 是系统的控制输入, $\theta_1(t)$ 是未知连续时变参数, θ_2 是未知时不变参数,初始状态为 $x(t_0) = x_0$, $\varphi(x)$, $f_1(x_1)$, $f_2(x)$ 均为已知的向量值函数. y 表示系统的输出,而 y_r 表示参考系统的输出.

系统满足下列假设:

(1) $\theta_1(t)$ 是周期为 T 的连续向量函数,且在某个紧集内变化,即 $\theta_1(t) = \theta_1(t-T)$,存在一个正数 θ_{1M} ,使得 $\theta_1(t) \leq \theta_{1M}$.

(2) $\varphi(x)$ 关于 x 是李普希茨连续,即 $\forall x^1, x^2 \in R^2$, $\|\varphi(x^1) - \varphi(x^2)\| \leq l \|x^1 - x^2\|$,这里 l 是未知的李普希茨常数.

(3) 参考轨迹 y_r 和它的一阶和二阶导数均在 L_T^2 意义下是有界的,即 $\forall t > 0$, $\int_{-T}^t \|y_r^{(k)}(\tau)\|^2 d\tau < \infty$, $k = 0, 1, \dots, n$.

注 1 假设 (1) 限定了快速时变参数是周期性的,并且在一个未知紧集内变化.需要注意的是,在该假设中只要求这样的紧集存在,即存在 θ_{1M} 即可, θ_{1M} 可以未知.

注 2 假设 (2) 和 $\theta_1(t)$ 是连续向量函数,确保了式 (1) 的解存在惟一并连续;假设 (3) 是为了保证系统的所有信号均在 L_T^2 意义下是有界的而给出的.

控制目标是设计一种周期自适应控制策略,保证系统的跟踪误差 $e(t) = y(t) - y_r(t)$ 在 L_T^2 意义下渐近收敛于零,并保证闭环系统的所有信号是有限的.

2 周期自适应率和控制律的设计

利用 Backstepping 方法,做坐标变换^[2]

$$z_1 = x_1 - y_r \quad , \quad z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1, \hat{\theta}_2(t), y_r, \dot{y}_r) \quad , \quad (2)$$

则 $\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1(x_1, \hat{\theta}_2(t), y_r, \dot{y}_r) + \theta_2^T f_1(x_1) - \dot{y}_r$.

令 $\alpha_1(x_1, \hat{\theta}_2(t), y_r, \dot{y}_r) = -c_1 z_1 - \hat{\theta}_2^T(t) f_1(x_1) + \dot{y}_r$, 则

$$\dot{z}_1 = z_2 - c_1 z_1 + \bar{\theta}_2^T(t) f_1(x_1) \quad . \quad (3)$$

构造第一个 Lyapunov 函数为 $V_1 = z_1^2/2 + \bar{\theta}_2^T(t) \Gamma_2^{-1} \bar{\theta}_2(t)/2$, $\Gamma_2^{-1} > 0$, 则对 V_1 沿式 (3) 的导数为

$$\dot{V}_1 = z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + \bar{\theta}_2^T(t) f_1(x_1) z_1 + \bar{\theta}_2^T(t) \Gamma_2^{-1} \dot{\bar{\theta}}_2(t) \quad .$$

由式 (2) 得 $\dot{z}_2 = u + \theta_1^T(t) \varphi(x) + \theta_2^T f_2(x) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2(t) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \theta_2^T f_1(x_1)$. (4)

构造第二个 Lyapunov 函数为 $V_2 = V_1 + z_2^2/2$, 则沿着式 (3), (4) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + \bar{\theta}_2^T(t) f_1(x_1) z_1 + \bar{\theta}_2^T(t) \Gamma_2^{-1} \dot{\bar{\theta}}_2(t) + \\ & z_2 \left[u + \theta_1^T(t) \varphi(x) + \theta_2^T f_2(x) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \ddot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2(t) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \theta_2^T f_1(x_1) \right] \quad . \end{aligned}$$

对于式 (1) 提出学习控制律为

$$u = \hat{\theta}_2^T(t) \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}) \right] + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_2(t)} \dot{\hat{\theta}}_2(t) - \hat{\theta}_1^T(t) \varphi(\mathbf{x}) - z_1 - c_2 z_2. \quad (5)$$

周期校正律为

$$\hat{\theta}_1(t) = \begin{cases} \hat{\theta}_1(t-T) + \mathbf{\Gamma}_1 \phi(\mathbf{x}) z_2(t) & , \quad t \in [T, \infty) & , \\ \mathbf{\Gamma}_{10}(t) \varphi(\mathbf{x}) z_2(t) & , \quad t \in [0, T) & , \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{\Gamma}_1 = \text{diag}(q_1, q_2) > 0$ 是常数增益矩阵, $\mathbf{\Gamma}_{10}(t) = \text{diag}(q_{10}(t), q_{20}(t)) > 0$, 每个对角线元素 $q_{10}(t), q_{20}(t)$ 是 t 的连续并且严格增加函数, $q_{j0}(0) = 0, q_{j0}(T) = q_j, j = 1, 2$.

$$\dot{\hat{\theta}}_2(t) = \mathbf{\Gamma}_2 \left(z_1 f_1(\mathbf{x}) + z_2 f_2(\mathbf{x}) - z_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} f_1(\mathbf{x}) \right) = \mathbf{\Gamma}_2 \tau_2 \quad , \quad (7)$$

其中 $\mathbf{\Gamma}_2 = \mathbf{\Gamma}_2^T > 0$.

将式(5)代入式(4), 结合式(3)得闭环方程为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - c_1 z_1 + \bar{\theta}_2^T(t) f_1(x_1) \quad , \\ \dot{z}_2 &= -z_1 - c_2 z_2 + \bar{\theta}_1^T(t) \varphi(\mathbf{x}) + \bar{\theta}_2^T(t) f_2(\mathbf{x}) - \bar{\theta}_2^T(t) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} f_1(x_1) \quad , \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\bar{\theta}_1(t) = \theta_1(t) - \hat{\theta}_1(t), \bar{\theta}_2(t) = \theta_2 - \hat{\theta}_2(t), \hat{\theta}_1(t), \hat{\theta}_2(t)$ 分别是 $\theta_1(t), \theta_2$ 的估计量.

3 收敛性分析

定理 1 由式(1)和式(5)以及式(6), (7)组成的闭环系统式(8)具有如下特性:(1)跟踪误差 $e(t)$ 在 L_T^2 意义下渐近收敛于零, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-T}^t \|e(\tau)\|^2 d\tau = 0$. (2) 闭环系统所有信号均在 L_T^2 意义下有界.

证明 (1)定义新的 Lyapunov 函数为

$$E(t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) + \frac{1}{2} \int_{-T}^t \bar{\theta}_1^T(\tau) \mathbf{\Gamma}_1^{-1} \bar{\theta}_1(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \bar{\theta}_2^T(t) \mathbf{\Gamma}_2^{-1} \bar{\theta}_2(t) \quad , \quad (9)$$

其中 $\mathbf{z}(t) = [z_1(t) \quad z_2(t)]^T, E(t)$ 在一个周期段上差分为

$$\begin{aligned} \Delta E(t) &= E(t) - E(t-T) = \\ & \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t-T) \mathbf{z}(t-T) + \frac{1}{2} [\bar{\theta}_2^T(t) \mathbf{\Gamma}_2^{-1} \bar{\theta}_2(t) - \bar{\theta}_2^T(t-T) \mathbf{\Gamma}_2^{-1} \bar{\theta}_2(t-T)] + \\ & \frac{1}{2} \int_{-T}^t [\bar{\theta}_1^T(\tau) \mathbf{\Gamma}_1^{-1} \bar{\theta}_1(\tau) - \bar{\theta}_1^T(t-T) \mathbf{\Gamma}_1^{-1} \bar{\theta}_1(\tau-T)] d\tau \quad . \end{aligned} \quad (10)$$

利用式(8)可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t-T) \mathbf{z}(t-T) = \\ & \int_{-T}^t \left(-\sum_{i=1}^2 c_i z_i^2(\tau) + \bar{\theta}_2^T(\tau) \tau_2 + z_2(\tau) \varphi^T(\mathbf{x}) \bar{\theta}_1(\tau) \right) d\tau \quad . \end{aligned} \quad (11)$$

利用恒等式 $(a-b)^T Q(a-b) - (a-c)^T Q(a-c) = (c-b)^T Q[2(a-b) + (b-c)]$ 以及式(6)和 $\theta_1(t) =$

$\theta_1(t-T)$ 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-T}^t [\bar{\theta}_1^T(\tau) \mathbf{\Gamma}_1^{-1} \bar{\theta}_1(\tau) - \bar{\theta}_1^T(\tau-T) \mathbf{\Gamma}_1^{-1} \bar{\theta}_1(\tau-T)] d\tau = \\ & \int_{-T}^t \left[-\bar{\theta}_1^T(\tau) \varphi(\mathbf{x}) z_2(\tau) - \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}_1 \varphi^T(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) z_2^2(\tau) \right] d\tau \quad . \end{aligned} \quad (12)$$

由式(7)可得

$$\frac{1}{2} [\bar{\theta}_2^T(t) \mathbf{\Gamma}_2^{-1} \bar{\theta}_2(t) - \bar{\theta}_2^T(t-T) \mathbf{\Gamma}_2^{-1} \bar{\theta}_2(t-T)] = \int_{-T}^t -\bar{\theta}_2(\tau) \tau_2 d\tau \quad . \quad (13)$$

将式(11)~(13)代入式(10), 可得

$$E(t) - E(t-T) = \int_{-T}^t \left(-\sum_{i=1}^2 c_i z_i^2(\tau) - \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}_1 \varphi^T(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) z_2^2(\tau) \right) d\tau \leq -\int_{-T}^t \sum_{i=1}^2 c_i z_i^2 d\tau \quad . \quad (14)$$

令 $t = t_0 + iT$, 对 $\forall t \in [iT, (i+1)T]$, 重复应用式(10)得

$$E(t) = E(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta E(t-jT) \quad . \quad (15)$$

因为 $E(t)$ 是正定的, 由式(14)知 $E(t)$ 单调下降, 因而 $E(t)$ 的极限存在.

以下证明 $\max_{t_0 \in [0, T]} E(t_0)$ 的有限性, 在区间 $[0, T)$ 内, $\hat{\theta}_1(t) = \Gamma_{10}(t) \varphi(x) z_2(t)$ 是连续的. 因此式(1) 右边关于 x, t 是连续的, 式(8) 右边关于 z, t 是连续的, 根据微分方程解的存在性定理, 一定存在一个 $T_0 > 0$, 使得在区间 $[0, T_0) \subset [0, T)$ 上, 系统方程(1) 和闭环方程(8) 存在惟一连续有限解. 以下一步证明 $E(t_0)$ 在区间 $t_0 \in [T_0, T)$ 上的有限性.

显然, 由式(6) 可知, 对 $\forall t \in [T_0, T)$, 有 $\gamma_j > \gamma_{j0}(t) > \gamma_{j0}(T_0) > 0, j = 1, 2, \dots, p$, 并且由式(8) 可得

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) = & z^T(t) \dot{z}(t) + \frac{1}{2} \bar{\theta}_1^T(t) \Gamma_1^{-1} \bar{\theta}_1(t) - \frac{1}{2} \bar{\theta}_1^T(t-T) \Gamma_1^{-1} \bar{\theta}_1(t-T) + \bar{\theta}_2^T(t) \Gamma_2^{-1} \dot{\theta}_2(t) \leq \\ & - \sum_{i=1}^2 c_i z_i^2 - \bar{\theta}_1^T(t) \left(\Gamma_{10}^{-1}(t) - \frac{1}{2} \Gamma_1^{-1} \right) \bar{\theta}_1(t) + \bar{\theta}_1^T(t) \Gamma_{10}^{-1}(t) \theta_1(t) \quad , \end{aligned} \tag{16}$$

这里 $\Gamma_{10}^{-1}(t) - \frac{1}{2} \Gamma_1^{-1} > 0$ (因为 $\gamma_j > \gamma_{j0}(t) \geq \gamma_{j0}(T_0) > 0$).

为了消去交叉项, 利用 Young 不等式进行放大, 对 $\forall c > 0$ 有

$$(\Gamma_{10}^{-1}(t) \bar{\theta}_1(t))^T \theta_1(t) \leq c \bar{\theta}_1^T(t) (\Gamma_{10}^{-1}(T_0))^2 \bar{\theta}_1(t) + \frac{1}{4c} \|\theta_1(t)\|^2 \quad . \tag{17}$$

所以将式(17) 代入式(16) 得

$$\dot{E}(t) \leq - \sum_{i=1}^2 c_i z_i^2 + \frac{1}{4c} \theta_1^T(t) \theta_1(t) - \bar{\theta}_1^T(t) \left[\Gamma_{10}^{-1}(t) - \frac{1}{2} \Gamma_1^{-1} - (\Gamma_{10}^{-1}(T_0))^2 c \right] \bar{\theta}_1(t) \quad . \tag{18}$$

选择足够小的正数 c 满足 $c \leq \min_{1 \leq j \leq p} \left\{ \gamma_{j0}^2(T_0) \left[\gamma_{j0}^{-1}(t) - \frac{1}{2} \gamma_j^{-1} \right] \right\} \quad , \tag{19}$

保证 $\Gamma_{10}^{-1}(t) - \frac{1}{2} \Gamma_1^{-1} - c(\Gamma_{10}^{-1}(T_0))^2 > 0$. 由假设 A_1 知道, $\theta_1(t)$ 是周期的, 并且存在一个有限的上界 $\theta_{1M} \geq \theta_1(t), \forall t \in [0, T]$. 所以 $\dot{E}(t)$ 在区域

$$\Omega = \left\{ (e, \bar{\theta}_1(t)) \in R^2 \mid \sum_{i=1}^2 c_i z_i^2 + \bar{\theta}_1^T(t) \left[\Gamma_{10}^{-1}(t) - \frac{1}{2} \Gamma_1^{-1} - (\Gamma_{10}^{-1}(T_0))^2 c \right] \bar{\theta}_1(t) \leq \frac{1}{4c} \theta_{1M}^2 \right\}$$

之外是负定的, 因而 $E(t)$ 在区间 $[T_0, T)$ 上是有限的.

因为 $t_0 \in [0, T), E(t_0)$ 是有界的, 由式(12) 和式(13) 得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) < \max_{t_0 \in [0, T)} E(t_0) - \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{i-1} c_1 \int_{-(j+1)T}^{t-jT} z_1^2(\tau) d\tau \quad . \tag{20}$$

由于 $E(t)$ 是正定的, $\max_{t_0 \in [0, T)} E(t_0)$ 是有限的, 所以跟踪误差 $z_1(t) = e(t)$ 在 L_T^2 意义下渐近收敛于零.

(2) 由式(20) 知, $E(t)$ 是有界的, 则由 $E(t)$ 的定义式(9) 可知, $e(t)$ 在 L^∞ 意义下是有界的, 由 $E(t)$ 的有界性可知 $\bar{\theta}_1(t)$ 在 L_T^2 意义下有界, 进而可得, 控制输入在 L_T^2 意义下是有界. 由假设(3) 以及式(1), (2) 和(7) 易得其他信号的 L_T^2 意义下的有界性.

4 数值仿真

考虑如下二阶混合参数化严格反馈系统: $\dot{x}_1 = x_2 + \theta_2 x_1^2, \dot{x}_2 = u + \theta_1(t) e^{x_1}$, 其中 θ_2 是未知常值参数, $\theta_1(t)$ 是未知时变参数, 在仿真中, 选择参考轨迹 $y_r(t) = 2 \sin(2t)$, 周期 $T = 6 \text{ s}, \theta_1(t) = 2 \sin(4\pi t/3), \theta_2 = 1$. 利用文中设计的周期自适应控制律, 得到仿真结果如图 1~4 所示. 由图 1 知跟踪误差在 L_T^2 意义下趋于零, 由图 2~3 可看出, 控制曲线和时变参数曲线是有界的, 由图 4 可看出时不变参数的估计值收敛于它的真值, 这与理论结果是相符的. 以上结果表明所提方法是有效的.

5 结束语

针对一类混合型参数的二阶非线性系统, 利用 Backstepping 方法, 引进参数周期自适应律, 设计了一种周期自适应控制策略. 通过构造 Lyapunov 函数, 证明了跟踪误差在 L_T^2 意义下渐近收敛于零, 仿真结果说明

了该方法的有效性和可行性.

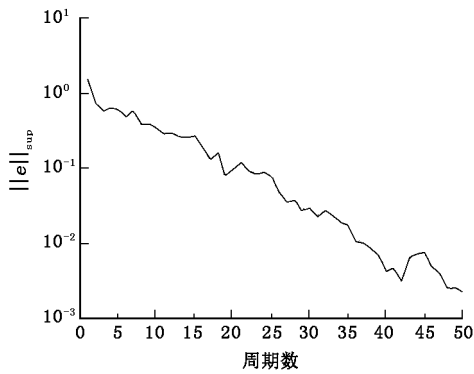


图 1 误差曲线

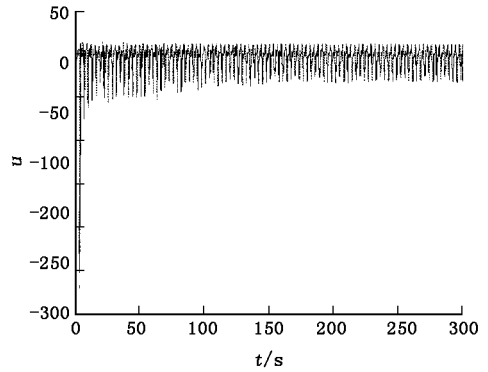


图 2 控制曲线

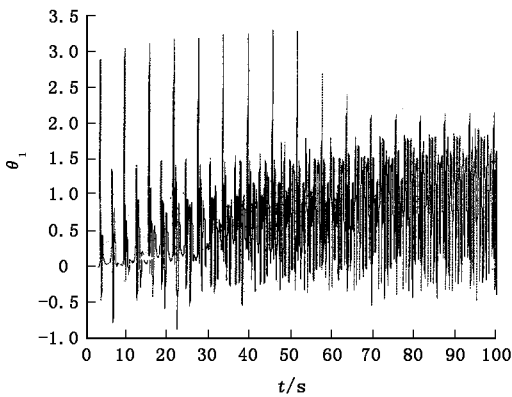


图 3 时变参数的估计曲线

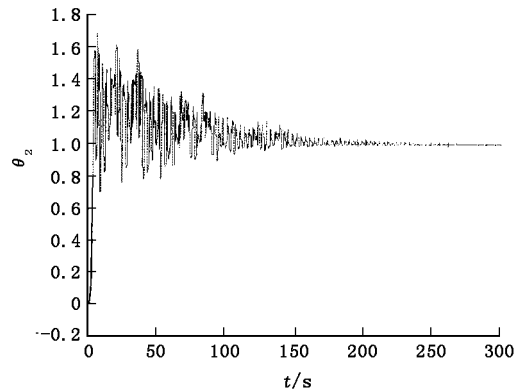


图 4 时不变参数的估计曲线

参考文献:

- [1] Narendra K S, Annaswamy A M. Stable Adaptive Systems[M]. NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [2] Yang Xiaojun, Li Junmin. Robust Adaptive Sliding Mode Iterative Learning Control Based on the Neural Network[J]. Journal of Xidian University, 2002, 29(3): 382-386.
- [3] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and Adaptive Control Design[M]. New York: Wiley, 1995.
- [4] Ioannou P A, Sun J. Robust Adaptive Control[M]. NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [5] Middleton R H, Goodwin G G C. Adaptive Control of Time-varying Linear Systems[J]. IEEE Trans on Automat Contr, 1988, 33(2): 150-155.
- [6] Tsakalis K S, Ioannou P A. Linear Time-varying Systems-control and Adaptation[M]. NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [7] Marino R, Tomei P. Adaptive Control of Linear Time-varying Systems[J]. Automatica, 2003, 39(4): 651-659.
- [8] Xu Jianxin. A New Periodic Adaptive Control Approach for Time-varying Parameters with Known Periodicity[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(4): 579-583.
- [9] Tian Yuping, Yu Xinghuo. Robust Learning Control for a Class of Nonlinear Systems with Periodic and Aperiodic Uncertainties[J]. Automatic, 2003, 39(11): 1957-1966.
- [10] Sun Mingxuan, Ge S S. Adaptive Repetitive Learning Control of Servo Mechanisms[A]. Proc of the Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation[C]. Hangzhou:IEEE, 2004. 1 212-1 216.

(编辑: 齐淑娟)