2006 年 6 月
第 33 卷 第 3 期

西安电子科技大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF XIDIAN UNIVERSITY

Jun. 2006
Vol. 33 No. 3

拓扑向量空间中多目标优化问题的广义鞍点条件

余国林[1,2]， 刘三阳[1]

(1. 西安电子科技大学 理学院，陕西 西安 710071；
2. 西北第二民族学院 信计系，宁夏 银川 750021)

摘要：针对多目标优化问题的鞍点在理论和应用中的重要性，引进了一种新的广义鞍点，并指出其他几类鞍点为其特殊形式. 利用锥的性质得到了多目标优化问题的广义鞍点的判别条件和一些性质.

关键词：多目标优化；锥；广义鞍点；Gâteaux 可微

中图分类号：O221.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001-2400(2006)03-0491-04

The condition for generalized saddle points for multiobjective optimization problems in topological vector space

YU Guo-lin[1,2]， *LIU San-yang*[1]

(1. School of Science, Xidian Univ., Xi'an 710071, China;
2. The Second Northwest Inst. Ethnic Minority, Yinchuan 750021, China)

Abstract: Based on the importance of saddle points in theory and application for multiobjective optimization problems, this paper introduces a new kind of generalized saddle points and points out that other saddle points belong to a special case. By using the properties of a cone, the discriminant condition and some properties of generalized saddle points are obtained.

Key Words: multiobjective optimization; cone; generalized saddle points; Gâteaux differentiable

设 X，Y 和 Z 是拓扑向量空间，令 $C\subset Y$ 和 $D\subset Z$ 是两个非平凡的点闭凸锥，Y 和 Z 中的序由 C 和 D 确定. 考虑拓扑向量空间中多目标规划问题：

$$(\mathrm{TMP})\qquad T-\min f(x)\quad ,\qquad \mathrm{s.t.}\ -g(x)\in D\quad ,$$

其中 $f:X\to Y$ 和 $g:X\to Z$ 是目标映射和约束映射. (TMP)的约束集合记为

$$A=\{x\in X\mid -g(x)\in D\}\quad . \tag{1}$$

这类多目标优化问题许多学者作了研究，并取得了丰富的成果[1~8]. 由于鞍点在工程优化和决策论中的重要作用，近几年，一些学者开始注重对鞍点的存在性理论和鞍点集的结构等方面的研究[9,10]. 另外为了研究的需要，各种不同类型的鞍点被引入，例如 Fritz-John 鞍点，Kuhn-Tucker 鞍点和一般 Lagrange 泛函的鞍点. 但是对鞍点的判别条件和基本性质的文献所见不多. 笔者将对拓扑向量空间中多目标优化问题引入一种新的鞍点，将说明 Fritz-John 鞍点，Kuhn-Tucker 鞍点和一般 Lagrange 泛函的鞍点是其特殊形式，并且给出这种鞍点的判别条件和一些性质.

1 预备知识

令 V 为一拓扑向量空间，V^* 为其对偶空间，$Q\subset V$ 为一凸锥且 $\mathrm{int}\,Q\neq\varnothing$，则集合 $Q^+:=\{q^*\in V^*\mid <$

收稿日期：2005-06-19
基金项目：陕西省自然科学基金资助项目(2001SL03)
作者简介：余国林(1974-)，男，讲师，西安电子科技大学博士研究生.

$q^*, q> \geqslant 0, \forall q \in Q\}$ 是 Q 的对偶锥，$<q^*, q>$ 是泛函 q^* 在 q 的值.

下面给出文中用到的一些定义和引理.

定义 1 设 $y_0^* \in C^+$，$(x_0, z_0^*) \in X \times D^+$ 称为(TMP) 关于 y_0^* 的鞍点，如果对任意 $x \in X$，$z^* \in D^+$，有

$$<y_0^*, f(x_0)> + <z^*, g(x_0)> \leqslant <y_0^*, f(x_0)> + <z_0^*, g(x_0)> \leqslant <y_0^*, f(x)> + <z_0^*, g(x)> \quad . \tag{2}$$

注 当 $(y_0^*, z_0^*) \in C^+ \times D^+ \setminus \{(0,0)\}$，则上述定义正好是 Ye[8] 定义的向量优化问题的 Fritz-John 鞍点，若还有 $y_0^* \neq 0$，则称为 Kuhn-Tucker 鞍点，如果 $Y = R$，$C = R^+$，$y_0^* = 1 \in C^+$，此时定义 1 中的鞍点正好是 Lagrange 泛函 $L(x, z^*) = f(x) + <z^*, g(x)>$ 的鞍点.

引理 1 令 Q^* 是 Q 的对偶锥[1]：(1) 如果 $q^* \in Q^* \setminus \{0\}$，$q \in \mathrm{int}\, Q$，则 $<q^*, q> > 0$. (2) 如果 $q^* \in \mathrm{int}\, Q^*$，$q \in Q \setminus \{0\}$，则 $<q^*, q> > 0$.

定义 2 令 $\tilde{x} \in X$，W 是一拓扑向量空间[1]，$\varphi: X \to W$ 为一映射. 若极限 $\varphi'_{\tilde{x}}(x) = \lim\limits_{t \to 0}((\varphi(\tilde{x} + tx) - \varphi(\tilde{x}))/t)$ 存在，则称 φ 在 $\tilde{x}$ 处是 Gâteaux 可微的.

由定义 2 不难验证对任意实数 α 有
$$\varphi'_{\tilde{x}}(\alpha x) = \alpha \varphi'_{\tilde{x}}(x) \quad . \tag{3}$$

2 广义鞍点的充分和必要条件

定理 1 (1) 设 $x_0 \in A$，若 $(y_0^*, z_0^*) \in C^+ \times D^+$ 使得
$$<y_0^*, f(x) - f(x_0)> + <z_0^*, g(x)> \geqslant 0 \quad , \quad \forall x \in X \quad . \tag{4}$$
则 (x_0, z_0^*) 为(TMP) 关于 y_0^* 的鞍点.

(2) 若 $y_0^* \in C^+$，$(x_0, z_0^*) \in X \times D^+$ 为(TMP) 关于 y_0^* 的鞍点，则式(4) 成立，且有 $<z_0^*, g(x_0)> = 0$，以及 $x_0 \in A$.

证明 (1) 在式(4)中令 $x = x_0$ 可得 $<z_0^*, g(x_0)> \geqslant 0$. 又因 $x_0 \in A$ 和 $z_0^* \in D^+$，根据引理 1 有 $<z_0^*, g(x_0)> \leqslant 0$，因此 $<z_0^*, g(x_0)> = 0$. 由此等式和式(4) 立即可得式(2) 中的第 2 个不等式. 再由 $<z_0^*, g(x_0)> = 0$ 以及对任意的 $z^* \in D^+$ 有 $<z^*, -g(x_0)> \geqslant 0$，马上得到式(2)中的第 1 个不等式.

(2) 设 $x_0 \in X$ 满足式(2)，在式(2) 的第 1 个不等式中令 $z^* = 0$，可得 $0 \leqslant <z_0^*, g(x_0)>$. 再由式(2) 的第 2 个不等式得 $<z_0^*, g(x_0)> \leqslant <y_0^*, f(x) - f(x_0)> + <z_0^*, g(x)>$. 由上面两个不等式便得式(4)成立.

用上述(1) 的证明方法可推出 $<z_0^*, g(x_0)> = 0$.

要证明 $x_0 \in A$，只需证明 $g(x_0) \in -D$ 便可. 事实上，对任意的 $z^* \in D^+$ 和 $\alpha > 0$，由式(2) 的第 1 个不等式可得 $<\alpha z^*, g(x_0)> \leqslant <z_0^*, g(x_0)>$. 因上式对所有的 $\alpha > 0$ 都成立，所以必有 $<z^*, g(x_0)> \leqslant 0$. 由于 D 为闭锥，故有 $g(x_0) \in -D$.

3 Gâteaux 可微假设下广义鞍点的性质

当目标映射和约束映射在广义鞍点处满足 Gâteaux 可微时，广义鞍点具有下述性质.

定理 2 设 $A \subset X$ 是由式(1) 确定的非空集合，若 $y_0^* \in C^+$，$(x_0, z_0^*) \in X \times D^+$ 为(TMP) 关于 y_0^* 的鞍点，并且 f 和 g 在 $x_0 \in X$ 是 Gâteaux 可微的，则有 $<y_0^*, f'_{x_0}(x)> + <z_0^*, g'_{x_0}(x)> = 0, \forall x \in X$.

证明 因为 (x_0, z_0^*) 为(TMP) 关于 y_0^* 的鞍点，由定理 1 中的 (2) 可得式(4) 成立，且有 $<z_0^*, g(x_0)> = 0$ 和 $x_0 \in A$. 因此 $<y_0^*, f(x) - f(x_0)> + <z_0^*, g(x) - g(x_0)> \geqslant 0, \forall x \in X$.

由于上式中 x 是任意的，因此对任意的 $x \in X$ 和 $t > 0$ 有
$$<y_0^*, (f(x_0 + tx) - f(x_0))/t> + <z_0^*, (g(x_0 + tx) - g(x_0))/t> \geqslant 0 \quad .$$

令 $t \to 0$，可得
$$<y_0^*, f'_{x_0}(x)> + <z_0^*, g'_{x_0}(x)> \geqslant 0 \quad , \quad \forall x \in X \quad .$$

再由式(3) 得到
$$<y_0^*, f'_{x_0}(x)> + <z_0^*, g'_{x_0}(x)> \leqslant 0 \quad , \quad \forall x \in X \quad .$$

因此
$$<y_0^*, f'_{x_0}(x)> + <z_0^*, g'_{x_0}(x)> = 0 \quad , \quad \forall x \in X \quad .$$

4　广义鞍点的锥分离性质

设 $M \subset Y$ 为非空集合,用 $\mathrm{cone}(M)$,$\mathrm{co}(M)$ 和 $\mathrm{cl}(M)$ 分别表示由 M 生成的锥、由 M 生成的凸包和 M 的闭包.

定理 3　设 A 是由式(1) 确定的非空集合,$x_0 \in A$,记 $W = \{(f(x),g(x)):x \in X\}$.

(1) 若 $y_0^* \in \mathrm{int}\, C^+$,$z_0^* \in D^+$ 使得(x_0,z_0^*)为(TMP) 关于 y_0^* 的鞍点,则有

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}[(f(x_0),\ 0) - W - C \times D]) \cap (C \times \{0\}) = (0,0)\quad. \tag{5}$$

(2) 若 $y_0^* \in C^+ \setminus \{0\}$,$z_0^* \in D^+$ 使得(x_0,z_0^*)为(TMP) 关于 y_0^* 的鞍点,则有

$$\mathrm{cone}[(f(x_0),\ 0) - W - C \times D] \cap (\mathrm{int}\, C \times \{0\}) = \varnothing\quad. \tag{6}$$

证明　(1) 假设存在 $y_0^* \in \mathrm{int}\, C^+$,$z_0^* \in D^+$ 使得(x_0,z_0^*)为(VP) 关于 y_0^* 的鞍点,根据定义 1 有式(2) 成立,又由定理 1 中的 (2) 还有 $< z_0^*,\ g(x_0) > = 0$,若式(5) 不成立,则应有 $\bar{y} \neq 0$ 且

$$(\bar{y},0) \in \mathrm{cl}(\mathrm{cone}[(f(x_0),\ 0) - W - C \times D]) \cap (C \times \{0\})\quad.$$

此时就有

$$< y_0^*,\bar{y} > + < z_0^*,0 > = < y_0^*,\bar{y} > > 0\quad.$$

又根据泛函 y_0^* 和 z_0^* 的连续性,必存在$(y',\ z') \in \mathrm{cone}[(y_0,0) - W - C \times D]$ 使得 $< y_0^*,y' > + < z_0^*,z' > > 0$. 此即是存在 $\alpha > 0$,$x_1 \in X$ 及$(c_1,d_1) \in C \times D$ 使得

$$< y_0^*,\ \alpha(f(x_0) - f(x_1) - c_1) > + < z_0^*,\ \alpha(-g(x_1) - d_1) > > 0\quad.$$

由于 $< y_0^*,\ -c_1 > \leqslant 0$,$< z_0^*,\ -d_1 > \leqslant 0$,所以 $\alpha(< y_0^*,\ f(x_0) - f(x_1) > + < z_0^*,\ -g(x_1) >) > 0$.

所以有

$$< y_0^*,\ f(x_0) > > < y_0^*,\ f(x_1) > + < z_0^*,\ g(x_1) >\quad.$$

因 $< z_0^*,\ g(x_0) > = 0$,故有 $< y_0^*,\ f(x_0) > + < z_0^*,\ g(x_0) > > < y_0^*,\ f(x_1) > + < z_0^*,\ g(x_1) >$　.

这与式(2)矛盾.

(2) 若 $y_0^* \in C^+ \setminus \{0\}$,$z_0^* \in D^+$ 使得$(x_0,\ z_0^*)$为(TMP) 关于 y_0^* 的鞍点,假设式(6) 不成立,则必有 $\bar{y} \in \mathrm{int}\, C$ 使 $(\bar{y},0) \in \mathrm{cone}[(f(x_0),\ 0) - W - C \times D] \cap (\mathrm{int}\, C \times \{0\})$　.

从而

$$< y_0^*,\ \bar{y} > + < z_0^*,\ 0 > = < y_0^*,\ \bar{y} > > 0\quad.$$

用完全类似于(1) 证明方法可得到上式与式(2)矛盾.

定理 4　设 A 是由式(1) 确定的非空集合,$x_0 \in A$,记 $W = \{(f(x),\ g(x)):\ x \in X\}$.

(1) 若 $y_0^* \in \mathrm{int}\, C^+$,$z_0^* \in D^+$ 使得$(x_0,\ z_0^*)$为(TMP) 关于 y_0^* 的鞍点,则有

$$\mathrm{cl}(\mathrm{co}[(f(x_0),\ 0) - W - C \times D]) \cap (C \times \{0\}) = (0,0)\quad. \tag{7}$$

(2) 若 $y_0^* \in C^+ \setminus \{0\}$,$z_0^* \in D^+$ 使得$(x_0,\ z_0^*)$为(TMP) 关于 y_0^* 的鞍点,则有

$$\mathrm{co}[(f(x_0),0) - W - C \times D] \cap (\mathrm{int}\, C \times \{0\}) = \varnothing\quad. \tag{8}$$

证明　(1),(2)的证明与定理 3 中(1)的证明类似. 假设存在 $y_0^* \in \mathrm{int}\, C^+$,$z_0^* \in D^+$ 使得(x_0,z_0^*)为(VP) 关于 y_0^* 的鞍点,根据定义 1 式(2) 成立,又由定理 1 中的 (2) 还有 $< z_0^*,g(x_0) > = 0$,若式(7) 不成立,则应有 $\bar{y} \neq 0$ 且

$$(\bar{y},0) \in \mathrm{cl}(\mathrm{co}[(f(x_0),0) - W - C \times D]) \cap (C \times \{0\})\quad.$$

此时就有

$$< y_0^*,\ \bar{y} > + < z_0^*,\ 0 > = < y_0^*,\ \bar{y} > > 0\quad.$$

又根据泛函 y_0^* 和 z_0^* 的连续性,必存在$(y',z') \in \mathrm{cone}[(y_0,0) - W - C \times D]$ 使得 $< y_0^*,y' > + < z_0^*,z' > > 0$. 此即是存在 $\alpha,\beta > 0$,$x_1,x_2 \in X$ 及$(c_1,d_1),(c_2,d_2) \in C \times D$ 使得

$$< y_0^*,\ \alpha(f(x_0) - f(x_1) - c_1) > + < z_0^*,\ \alpha(-g(x_1) - d_1) > +$$
$$< y_0^*,\ \beta(f(x_0) - f(x_2) - c_2) > + < z_0^*,\ \beta(-g(x_2) - d_2) > > 0\quad.$$

由于 $< y_0^*,\ -c_1 - c_2 > \leqslant 0$,$< z_0^*,\ -d_1 - d_2 > \leqslant 0$,所以

$$\alpha(< y_0^*,\ f(x_0) - f(x_1) > + < z_0^*,\ -g(x_1) >) + \beta(< y_0^*,\ f(x_0) -$$
$$f(x_1) > + < z_0^*,\ -g(x_1) >) > 0\quad.$$

上式必有一括号中的项大于零,不妨设 $\alpha(< y_0^*,\ f(x_0) - f(x_1) > + < z_0^*,\ -g(x_1) >) > 0$.

所以有

$$< y_0^*,\ f(x_0) > > < y_0^*,\ f(x_1) > + < z_0^*,\ g(x_1) >\quad.$$

因 $< z_0^*, g(x_0) > = 0$,故有 $< y_0^*, f(x_0) > + < z_0^*, g(x_0) > > < y_0^*, f(x_1) > + < z_0^*, g(x_1) >$. 这与式(2)矛盾.

参考文献:

[1] Hu Yuda, Ling Cheng. The Generalized Optimality Conditions of Multiobjective Programming Problem in Topological Vector Space[J]. J Math Anal Appl, 2004, 290(1): 363-372.

[2] Yang Xinmin, Teo K L, Yang Xiaoqi. Note Duality for a Class of Nondifferentiable Multiobjective Programming Problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 252(3): 999-1 005.

[3] Xu Yihong, Liu Sanyang. Optimality Codictions and Dual Theorems of a Class of Nonsmooth Preinvex Programming[J]. Journal of Xidian University, 2002, 29(5): 698-701.

[4] Li Zhongfei. Lagrangian Multipliers, Saddle Points and Duality in Vector Optimization of Set Valued Maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, 215(1): 297-316.

[5] Liu Sanyang. Recent Developments of Convex Functions[J]. Journal of Xidian University, 1990, 17(1): 63-69.

[6] Hu Yuda, Ling Cheng. Connectedness of Cone Super Efficient Pointsets in Locally Convex Topological Spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 107(2): 433-446.

[7] Molho G A, Zaffaroni A. On the Notion of Proper Efficiency in Vector Optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1994, 82(1): 1-21.

[8] Ye Y L. D-invexity and Optimality Conditions[J]. J Math Anal Appl, 1991, 162(1): 242-249.

[9] Tanaka T. Some Existence Theorems for Cone Saddle Points of Vector-valued Functions in Infinite-dimensional[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1987, 62(1): 127-138.

[10] Yu Chao, Yu Jian. On the Structures of the Set of Saddle Points[J]. OR Transactions, 2000, 4(1): 71-74.

(编辑:齐淑娟)

(上接第 478 页)

其中 $I(i,j)$ 和 $J(i,j)$ 分别为加噪声的图像与平滑后后和图像,$\overline{I(i,j)} = \left(\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} I(i,j)\right)\Big/(MN)$. 从实验结果可见,文中方法的主客观效果都得到了一定的改善,见图 1.

表 1 不同扩散过程 Toys 图像增强效果的比较

	噪声图像	式(5)AM	式(6)Kornprobst	式(7)CA	式(9)方法
S_{NR} /dB	11.944 1	16.229 7	16.166 1	16.125 5	17.085 7
R_{MSE}	8.030 6	4.903 1	4.939 1	4.962 2	4.442 9

参考文献:

[1] Jiang Donghuan, Feng Xiangchu, Song Guoxiang. An Anisotropic Diffusion Equation Basead on the Morphological Operator[J]. Journal of Xidian University, 2006, 33(1): 121-124.

[2] Osher S J, Rudin L I. Feature-oriented Image Enhancement Using Shock Filters[J]. SIAM J Numer Anal, 1990, 27(4): 919-940.

[3] Alvarez L, Mazorra L. Signal and Image Restoration Using Shock Filters and Anisotropic Diffusion[J]. SIAM J Numer Anal, 1994, 31(2): 590-605.

[4] Kornprobst P, Deriche R, Aubert Gh. Image Coupling Restoration and Enhancement Via PDE's[A]. Proc Int'l Conf[C]. Santa Barbara: Image Processing, 1997. 458-461.

[5] Coulon O, Arridge S R. Dual Echo MR Processing Using Multi-spectral Probabilistic Diffusion Coupled with Shock Filters [DB/OL]. http://www.Lsis.org/fiche-42.html, 2005-10-18.

[6] Perona P, Malik J. Scale-space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 7(12): 629-639.

[7] Sochen N, Kimmel R, Malladi R. A General Framework for Low-level Vision[J]. IEEE Trans on Image Processing, 1998, 7(3): 310-318.

(编辑:齐淑娟)