

交替方向隐式时域有限差分法中的 Berenger 理想匹配层

王林年, 褚庆昕, 梁昌洪

(西安电子科技大学 天线与微波技术重点实验室, 陕西 西安 710071)

摘要: 提出一种新方案, 用于离散 Berenger 场分裂形式 Maxwell 方程, 将理想匹配层吸收边界条件由通常的时域有限差分法推广到交替方向隐式时域有限差分法. 和已有的离散方案比较, 采用文中提出的离散方案可使理想匹配层吸收边界的反射误差成数量级地减小.

关键词: 交替方向隐式方法; 时域有限差分法; 理想匹配层

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2006)03-0458-04

Berenger's perfectly matched layer for the alternating direction implicit finite-difference time-domain method

WANG Lin-nian, CHU Qing-xin, LIANG Chang-hong

(Key Lab. of Antennas and Microwave Technology, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract: This paper presents a new scheme, which is used in discretizing Berenger's split field representation of Maxwell's equations, in order to use the perfectly matched layer(PML) with the alternating direction implicit (ADI) finite-difference time-domain (FDTD) method instead of the standard FDTD method. Compared with the discretization scheme proposed earlier, the new one makes the reflection errors of PML absorbing boundary condition decrease by orders of magnitude when a larger time step is used.

Key Words: finite-difference time-domain (FDTD) method; alternating direction implicit(ADI) algorithm; perfectly matched layer(PML)

当利用时域有限差分法(FDTD)模拟开区域的电磁场问题时,吸收边界条件(ABC)是必须的. Berenger 提出的理想匹配层(PML)是一种建立在场分裂基础上的媒质吸收边界条件^[1], 这种 ABC 理论上可实现反射误差任意小.

无条件稳定的交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD)算法^[2]出现以后, 如何实现 ADI-FDTD 和 PML 的结合是一个需要解决的问题. 文献[3]首次将 Berenger 的 PML 引入了 ADI-FDTD 算法, 但是采用所建议的离散方案, 当时间步加大时, PML 的性能迅速蜕化; 文献[4, 5]将非分裂场分量 PML 引入了 ADI-FDTD 算法, 同样的问题再次出现. 考虑到 ADI-FDTD 算法通常会使用较大的时间步尺寸, 如此 PML 的价值将大打折扣.

为了解决这一问题, 笔者发展了一种新途径以实现 ADI-FDTD 与 Berenger PML 的结合^[6].

1 ADI-FDTD PML 新算法

以二维 TE 模为例. 在较一般的情况下, 考虑无反射匹配条件以后^[1], Berenger 的场分裂形式的 Maxwell 方程为

$$\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y \epsilon_0 \epsilon_r E_x = \frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y}, \quad (1a)$$

$$\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x \epsilon_0 \epsilon_r E_y = -\frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x}, \quad (1b)$$

$$\mu_0 \mu_r \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x \mu_0 \mu_r H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (1c)$$

$$\mu_0 \mu_r \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y \mu_0 \mu_r H_{zy} = -\frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (1d)$$

ADI-FDTD 算法的每一时间步分为两步来执行. 与文献[3]不同, 文中的离散方案为

前半段时间步

$$\frac{2}{\Delta t} \epsilon_0 \epsilon_r \left(E_x \Big|_{i+1/2, j}^{n+1/2} - E_x \Big|_{i+1/2, j}^n \right) + \sigma_y \epsilon_0 \epsilon_r E_x \Big|_{i+1/2, j}^n = \frac{1}{\Delta y} \left(H_z \Big|_{i+1/2, j+1/2}^n - H_z \Big|_{i+1/2, j-1/2}^n \right), \quad (2a)$$

$$\frac{2}{\Delta t} \epsilon_0 \epsilon_r \left(E_y \Big|_{i, j+1/2}^{n+1/2} - E_y \Big|_{i, j+1/2}^n \right) + \sigma_x \epsilon_0 \epsilon_r E_y \Big|_{i, j+1/2}^{n+1/2} = -\frac{1}{\Delta x} \left(H_z \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - H_z \Big|_{i-1/2, j+1/2}^{n+1/2} \right), \quad (2b)$$

$$\frac{2}{\Delta t} \mu_0 \mu_r \left(H_{zx} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - H_{zx} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^n \right) + \sigma_x \mu_0 \mu_r H_{zx} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = -\frac{1}{\Delta x} \left(E_y \Big|_{i+1, j+1/2}^{n+1/2} - E_y \Big|_{i, j+1/2}^{n+1/2} \right), \quad (2c)$$

$$\frac{2}{\Delta t} \mu_0 \mu_r \left(H_{zy} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - H_{zy} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^n \right) + \sigma_y \mu_0 \mu_r H_{zy} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^n = \frac{1}{\Delta y} \left(E_x \Big|_{i+1/2, j+1}^n - E_x \Big|_{i+1/2, j}^n \right). \quad (2d)$$

后半段时间步

$$\frac{2}{\Delta t} \epsilon_0 \epsilon_r \left(E_x \Big|_{i+1/2, j}^{n+1} - E_x \Big|_{i+1/2, j}^{n+1/2} \right) + \sigma_y \epsilon_0 \epsilon_r E_x \Big|_{i+1/2, j}^{n+1} = \frac{1}{\Delta y} \left(H_z \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - H_z \Big|_{i+1/2, j-1/2}^{n+1} \right), \quad (3a)$$

$$\frac{2}{\Delta t} \epsilon_0 \epsilon_r \left(E_y \Big|_{i, j+1/2}^{n+1} - E_y \Big|_{i, j+1/2}^{n+1/2} \right) + \sigma_x \epsilon_0 \epsilon_r E_y \Big|_{i, j+1/2}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta x} \left(H_z \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - H_z \Big|_{i-1/2, j+1/2}^{n+1/2} \right), \quad (3b)$$

$$\frac{2}{\Delta t} \mu_0 \mu_r \left(H_{zx} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - H_{zx} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} \right) + \sigma_x \mu_0 \mu_r H_{zx} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = -\frac{1}{\Delta x} \left(E_y \Big|_{i+1, j+1/2}^{n+1/2} - E_y \Big|_{i, j+1/2}^{n+1/2} \right), \quad (3c)$$

$$\frac{2}{\Delta t} \mu_0 \mu_r \left(H_{zy} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - H_{zy} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} \right) + \sigma_y \mu_0 \mu_r H_{zy} \Big|_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta y} \left(E_x \Big|_{i+1/2, j+1}^{n+1} - E_x \Big|_{i+1/2, j}^{n+1} \right). \quad (3d)$$

其中

$$H_z = H_{zx} + H_{zy}. \quad (4)$$

这里式(2a)是式(1a)在 $(i+1/2, j)$ 点, n 时刻的差分近似, E_x 的时间导数项代以其向前时间差商; 式(3a)是式(1a)在同一点, $n+1$ 时刻的差分近似, E_x 的时间导数项代以其向后时间差商. 对式(2)和式(3)的其余公式可作类似的理解.

以上差分方程用于从 n 到 $n+1/2$ 和 $n+1/2$ 到 $n+1$ 前后两个半时间步的数值更新, 这一过程与无耗媒质中的 ADI-FDTD 数值更新过程相同^[2].

2 数值检验

为了对比不同的离散方案所产生的不同结果, 来研究一个二维 TE 波模拟问题. 将整个计算域划分为 60×60 个均匀网格(含 PML), PML 吸收层加在正方形计算域的 4 条边带上, 厚度为 10 个网格. 根据 Berenger 的建议, 在 PML 吸收层中电导率随 PML 媒质层深度 ρ 适度地增加, 如

$$\sigma(\rho) = \sigma_{\max}(\rho/\delta)^m, \quad (5)$$

其中 δ 为 PML 厚度.

已有的数值实验表明^[7], 如果采用变换式(5), m 的最佳值介于 3~4 之间, 对于厚度为 10 个网格单元的 PML, 反射误差的最佳选择为 $R(0) = e^{-16}$, 由此决定的 σ_{\max} 的最佳值为

$$\sigma_{\text{opt}} = (m+1)/(150\pi(\epsilon_r)^{1/2}\Delta x). \quad (6)$$

这里取 $\epsilon_r = 1, m = 4$. 在计算域中部一点加高斯脉冲激励

$$H_z[30][30] = H_z[30][30] + \exp[-((nt_n - 186)/50)^2]. \quad (7)$$

这里 t_n 即 Courant-Friedrich-Levy 数(CFLN), $\Delta t = t_n \Delta t_0$ 表示时间步的大小, $\Delta t_0 = \Delta/(2^{1/2}c)$ 为二维情况

下条件稳定的 FDTD 所允许使用的最大时间步, $\Delta = \Delta x = \Delta y$ 为空间网格尺寸. 在邻近两种媒质交界面处取两点 A(在邻近该点的交界面处电磁场垂直入射 PML) 和 B(在邻近该点的交界面处电磁场 45° 斜入射 PML), 取 A, B 两点的场分量 $H_z(A) = H_z[30][49], H_z(B) = H_z[49][49]$ 作为研究对象. 为了将 PML 的实际反射误差从数值解中分离出来, 还需要一个作为参考的数值解, 这可通过加大计算域以隔离反射误差来求得. 考虑如下定义的相对反射误差 $H_{relative}(t) = [H_{PML}(t) - H_{ref}(t)] / \max\{abs[H_{ref}(t)]\}$.

数值实验结果如图 1, 图 2 所示.

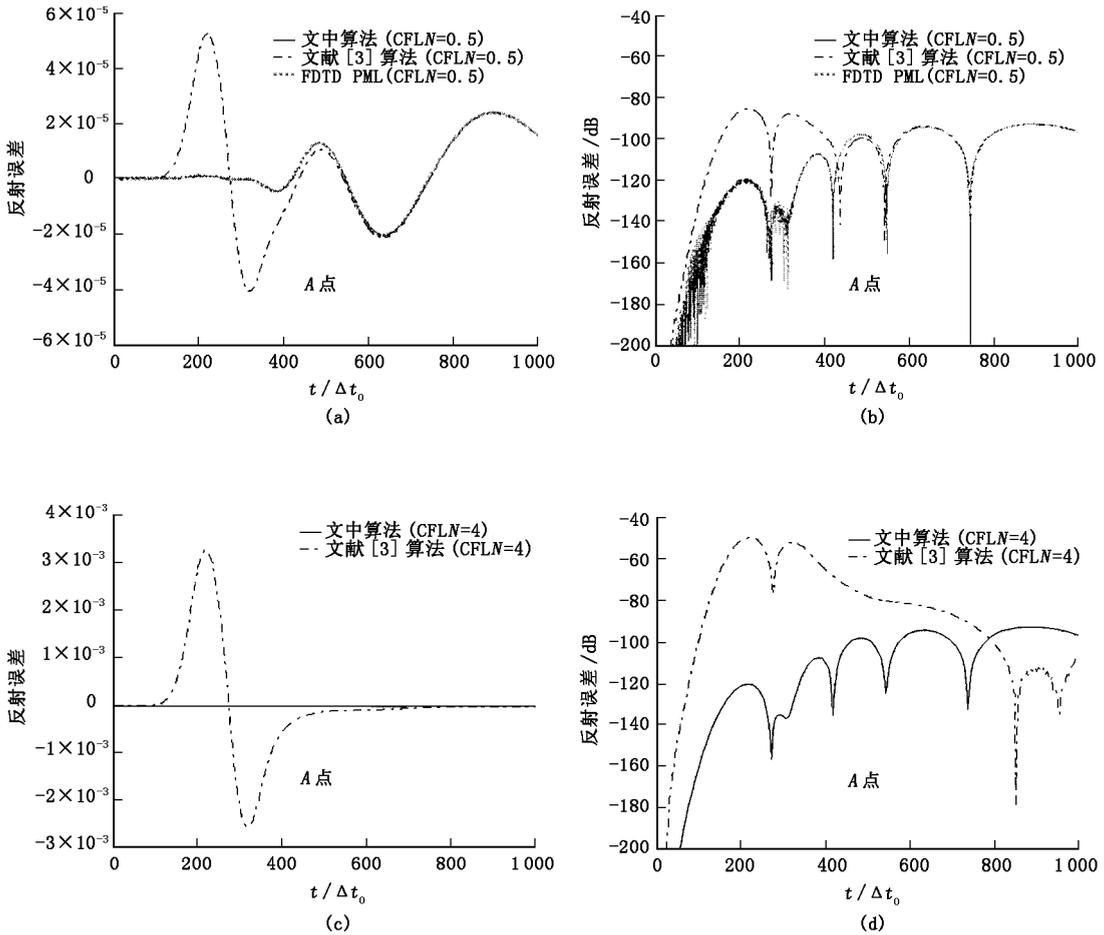


图 1 A 点的反射误差对照图

图 1 表示 A 点附近 PML 的反射误差随时间的变化规律(B 点的情况类似). 图 1(a)和图 1(c)中的相对反射误差为线性表示, 图 1(b)和图 1(d)中的相对反射误差以分贝为单位表示.

由图 1(a), (b), 即使在时间步尺寸很小时(CFLN 为 0.5), 采用文献[3]的离散方案, PML 在照射初期的反射误差即很大, 数十倍地大于新方案, 而恰恰是这一段时间脉冲信号通过 PML 分界面; 而采用新方案, ADI-FDTD PML 的反射误差则要小得多, 与 FDTD PML 几乎完全相同.

在图 1(c), (d)中, CFL 数等于 4. 由图可见, 当时间步尺寸较大时, 文中离散方案的优越性更加明显.

图 2 表示最大相对反射误差和时间步尺寸的关系. 由图 2 可见, 当时间步尺寸增加时, 采用文献[3]的离散方案, 最大相对反射误差成数量级增加; 而采用笔者提出的方案, A 点的最大相对反射误差几乎不变, B 点的最大相对反射

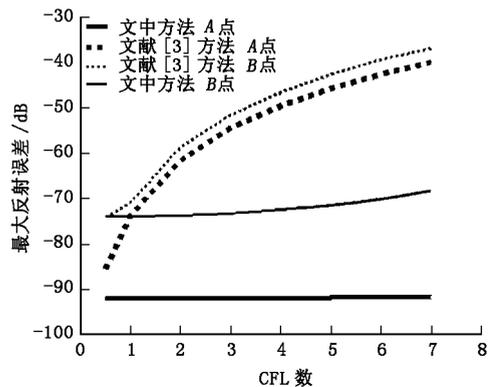


图 2 两种方法最大反射误差对照

误差有轻微增加.

3 结束语

提出一种新的离散方案,将 Berenger 的理想匹配层吸收边界条件由通常的 FDTD 推广到 ADI-FDTD. 如以二维 TE 模 ADI-FDTD 数值模拟为例,采用原有的方法离散修正形式 Maxwell 方程,PML 的最大反射误差随时间步尺寸的增加而迅速增加,而采用文中所提出的离散方法,PML 的最大反射误差则基本不变;恰好在电磁场脉冲通过观察点的一段时间内,即使当 CFLN 较小的时候,采用原有方法时的反射误差也要比采用新方法大过数倍、数十倍;而采用笔者所提出的方法离散修正形式 Maxwell 方程,ADFI-FDTD PML 的反射误差与 FDTD PML 的反射误差基本一致.

这里只给出几个典型的图例.大量的数值实验充分表明,采用文献[3]的方法离散修正形式 Maxwell 方程式则所得结果很不理想;而如果采用新的、概念上统一的离散方法,Berenger PML 在 ADI-FDTD 数值模拟中,可实现与 FDTD 中相似的吸收效果.

文中成功地将 Berenger 分裂场 PML 移植到 ADI-FDTD 方法中,后续的工作是进一步改善文献[4,5,8]中的非分裂场 PML.

参考文献:

- [1] Berenger J P. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves[J]. J Corp Phys, 1994, 114(2): 185-200.
- [2] Namiki T. A New FDTD Algorithm Based on Alternating-direction Implicit Method[J]. IEEE Trans on Microwave Theory Tech, 1999, 47(10): 2003-2007.
- [3] Liu G, Gedney S D. Perfectly Matched Layer Media for an Unconditionally Stable Three-dimensional ADI-FDTD Method [J]. IEEE Microwave Guided Wave Lett, 2000, 10(7): 261-263.
- [4] Luzzy G. Unconditionally Stable D-H FDTD Formulation with Anisotropic PML Boundary Condition [J]. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 2001, 11(4): 149-151.
- [5] Gedney S D, Liu G, Roden J A, et al. Perfectly Matched Layer Media with CFS for an Unconditionally Stable ADI-FDTD Method[J]. IEEE Trans on Antennas Propagat, 2001, 49(11): 1554-1559.
- [6] 王林年. ADI-FDTD 算法研究[D]. 西安:西安电子科技大学,2003.
- [7] Taflove A. Advances in Computational Electrodynamics; the Finite-Difference Time-Domain Method[M]. Norwood: Artech House, 1998. 263-343.
- [8] Zheng Kuisong, Ge Debiao, Tian Chunming. 2D ADI-FDTD Method Applied to EM Scattering with Cylindrical Wave Source Illumination[J]. Journal of Xidian University, 2005, 32(2): 197-200.

(编辑:齐淑娟)