



# 非线性光纤光学

## 第五部分 四波混频

### FWM – Four Wave Mixing

陈根祥

北京交通大学 2006·秋



# 内容

- 非线性极化与相位匹配问题
- **FWM**非线性传输方程
- **FWM**光学相位共轭与光谱反转
- 色散的影响与**FWM**带宽
- 相位匹配技术
- 四波混频的应用
- **Summary and Comments**



# 非线性极化与相位匹配问题



# 光纤中的场与非线性极化

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E,$$

$$E = \sum_{i=1}^4 E_i e^{j(\omega_i t - \beta_{i0} z)} = \sum_{i=1}^4 C_i \psi_i(u, v) A_i(z, t) e^{j(\omega_i t - \beta_{i0} z)}$$

$$C_i = \left( \int_S |\psi_i|^2 ds \right)^{-1/2} \quad \text{归一化常数}$$

非线性极化:

$$\mathbf{P}_{NL} = \mathbf{e}_x P_{NL},$$

$$P_{NL} = \frac{3\epsilon_0}{4} \chi_{1111}^{(3)} E E^* E,$$

$$P_{NL} = \sum_{i=1}^4 P_i e^{j(\omega_i t - \beta_{i0} z)}$$



# 非线性响应的展开式

考虑光纤在频率  $\omega_4$  上的非线性极化响应:

$$P_4 = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{1111}^{(3)} \left\{ \left[ |E_4|^2 + 2(|E_1|^2 + |E_2|^2 + |E_3|^2) \right] E_4 \right. \\ \left. + 2 \sum_{(ijk)} E_i E_j E_k^* e^{j\theta_{ijk}} + \sum_{i,j=1;i \neq j}^3 E_i^2 E_j^* e^{j\theta_{ij}} \right\}$$

$(ijk) = (123), (312), (231)$

相位因子:

$$\theta_{ijk} = (\omega_i + \omega_j - \omega_k - \omega_4)t - (\beta_i + \beta_j - \beta_k - \beta_4)z$$

$$\theta_{ij} = (2\omega_i - \omega_j - \omega_4)t - (2\beta_i - \beta_j - \beta_4)z$$



# 相位匹配问题

只有与 $E_4$ 近似同步的非线性极化项才对 $E_4$ 的传输有影响:

$$\theta_{ijk} \approx 0 \quad \text{或} \quad \theta_{ij} \approx 0$$


$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_i + \omega_j = \omega_k + \omega_4, \quad \beta_i + \beta_j = \beta_k + \beta_4 \\ \text{或} \quad 2\omega_i = \omega_j + \omega_4, \quad 2\beta_i = \beta_j + \beta_4 \end{array} \right.$$

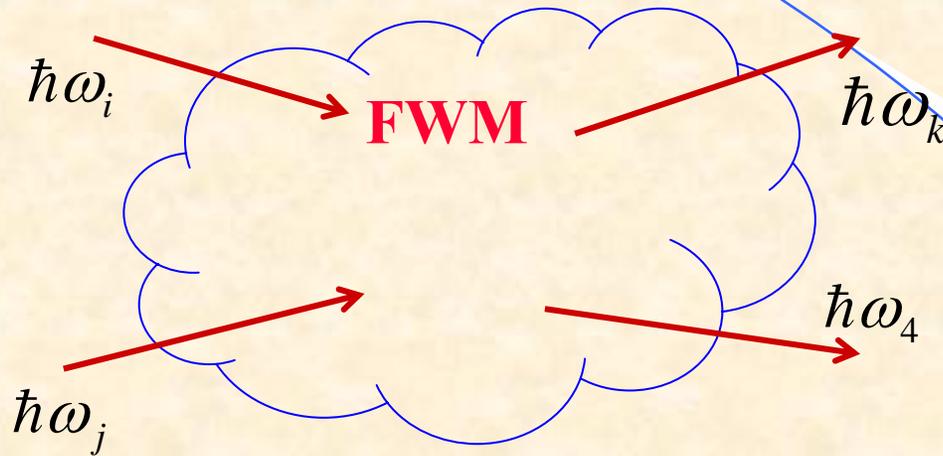
相位失配:

$$\Delta\beta = \beta_i + \beta_j - \beta_k - \beta_4$$

$$\text{或} \quad \Delta\beta = 2\beta_i - \beta_j - \beta_4$$



# 光子散射过程—四光子混频 (FPM)



能量守恒:

$$\omega_i + \omega_j = \omega_k + \omega_4$$

动量守恒:

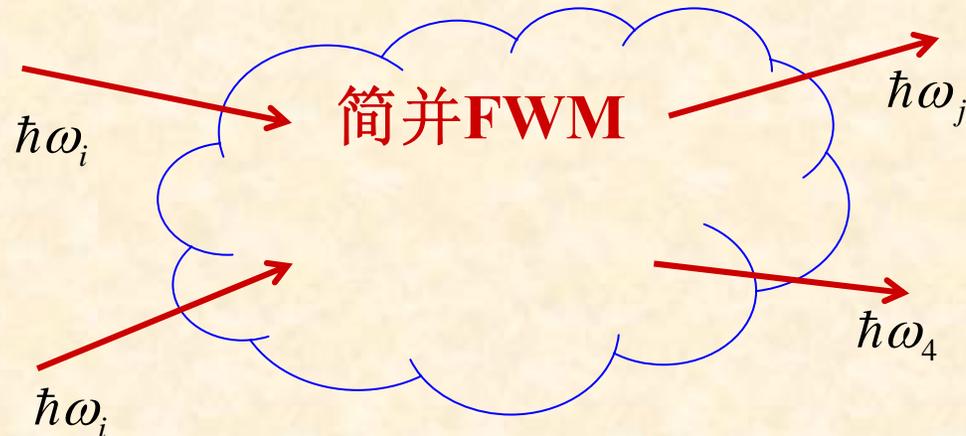
$$\beta_i + \beta_j = \beta_k + \beta_4$$

能量守恒:

$$2\omega_i = \omega_j + \omega_4$$

动量守恒:

$$2\beta_i = \beta_j + \beta_4$$





# FWM非线性传输方程



# FWM耦合传输方程

$$\nabla^2 E_i - k_{i,0}^2 n^2 E_i = \omega_i^2 \mu_0 P_i$$

忽略光纤损耗，对准连续波可得FWM耦合微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dz} = -j \frac{n_2 \omega_1}{c} \left[ \left( f_{11} |A_1|^2 + 2 \sum_{k \neq 1} f_{1k} |A_k|^2 \right) A_1 + 2 f_{1234} A_2^* A_3 A_4 e^{j\Delta\beta z} \right] \\ \frac{dA_2}{dz} = -j \frac{n_2 \omega_2}{c} \left[ \left( f_{22} |A_2|^2 + 2 \sum_{k \neq 2} f_{2k} |A_k|^2 \right) A_2 + 2 f_{2134} A_1^* A_3 A_4 e^{j\Delta\beta z} \right] \\ \frac{dA_3}{dz} = -j \frac{n_2 \omega_3}{c} \left[ \left( f_{33} |A_3|^2 + 2 \sum_{k \neq 3} f_{3k} |A_k|^2 \right) A_3 + 2 f_{3412} A_1 A_2 A_4^* e^{-j\Delta\beta z} \right] \\ \frac{dA_4}{dz} = -j \frac{n_2 \omega_4}{c} \left[ \left( f_{44} |A_4|^2 + 2 \sum_{k \neq 4} f_{4k} |A_k|^2 \right) A_4 + 2 f_{4312} A_1 A_2 A_3^* e^{-j\Delta\beta z} \right] \end{cases}$$



# 重迭积分与相位失配

场分布的重迭积分:

$$f_{ij} = \frac{\int_S |\psi_i|^2 |\psi_j|^2 ds}{\left( \int_S |\psi_i|^2 ds \right) \left( \int_S |\psi_j|^2 ds \right)}$$

$$f_{ijkl} = \frac{\int_S \psi_i^* \psi_j^* \psi_k \psi_l ds}{\left[ \left( \int_S |\psi_i|^2 ds \right) \left( \int_S |\psi_j|^2 ds \right) \left( \int_S |\psi_k|^2 ds \right) \left( \int_S |\psi_l|^2 ds \right) \right]^{1/2}}$$

前述FWM耦合微分方程中已假定:

$$\Delta\beta = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4$$

为所有相位失配中的最小值，所对应的项在所有FWM项中占据主导地位。其它FWM项与其相比可以忽略



# 强泵浦四波混频过程

一类很重要的四波混频现象是  $|A_1|, |A_2| \gg |A_3|, |A_4|$  的情况

**参量放大过程：**例如强泵浦光  $A_1, A_2$  对频率为  $\omega_3$  的信号光在光纤中传输的参量放大过程，由于FWM效应，光纤中同时将产生频率为  $\omega_4$  的空闲光

**FWM波长转换、光学相位共轭和OTDM解复用：**例如强泵浦  $A_1, A_2$  与频率为  $\omega_3$  的信号光相互作用，在光纤中产生频率为  $\omega_4$  的FWM信号，与输入信号光携带相同的信息，实现信号波长由  $\lambda_3$  到  $\lambda_4$  的转变



# 准连续泵浦波的传输

对于圆对称单模光纤情形，四波混频只能在较小的频率范围内发生，因此有：

$$f_{ij} \approx f_{ijkl} \approx \frac{1}{A_{\text{eff}}} \quad \gamma_j = \frac{n_2 \omega_j}{c A_{\text{eff}}} \approx \gamma$$

忽略泵浦耗尽与光纤损耗，在准连续泵浦情况下，FWM泵浦传输方程可近似为：

$$\frac{dA_1}{dz} = -j\gamma(P_1 + 2P_2)A_2 \quad \frac{dA_2}{dz} = -j\gamma(P_2 + 2P_1)A_1$$

其解为：

$$A_1 = \sqrt{P_1} e^{-j\gamma(P_1 + 2P_2)z} \quad A_2 = \sqrt{P_2} e^{-j\gamma(P_2 + 2P_1)z}$$

即对泵浦光的传输而言，主要的影响来自SPM和XPM效应



# 信号光与空闲光的耦合方程

$$\frac{dA_3}{dz} = -2j\gamma \left[ (P_1 + P_2)A_3 + \sqrt{P_1 P_2} A_4^* e^{-j\Delta\phi z} \right]$$

$$\frac{dA_4}{dz} = -2j\gamma \left[ (P_1 + P_2)A_4 + \sqrt{P_1 P_2} A_3^* e^{-j\Delta\phi z} \right]$$

$$\Delta\phi = \Delta\beta + 3\gamma(P_1 + P_2)$$

**作变换：**  $B_3 = A_3 e^{2j\gamma(P_1+P_2)z}$        $B_4 = A_4^* e^{-2j\gamma(P_1+P_2)z}$

**方程成为：**

$$\frac{dB_3}{dz} = -j\kappa B_4 e^{-2j\delta z} \quad \frac{dB_4}{dz} = j\kappa B_3 e^{2j\delta z}$$

**耦合强度：**  $\kappa = 2\gamma\sqrt{P_1 P_2}$

**相位失配：**  $\delta = \frac{1}{2} [\Delta\beta + \gamma(P_1 + P_2)]$



# 参量放大过程

再作变换：

$$S = B_3 e^{j\delta z} \quad R = B_4 e^{-j\delta z}$$

方程成为：

$$S' - j\delta S = -j\kappa R$$

$$R' + j\delta R = j\kappa S$$

通解：

$$S(z) = a_3 e^{gz} + b_3 e^{-gz}$$

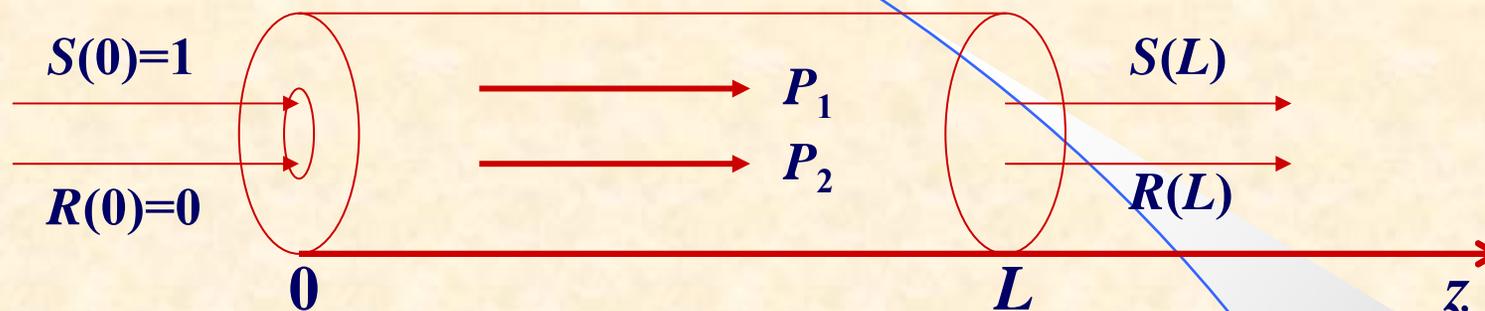
$$R(z) = a_4 e^{gz} + b_4 e^{-gz}$$

参量增益：

$$g = \sqrt{\kappa^2 - \delta^2}$$

$$\kappa = 2\gamma \sqrt{P_1 P_2}$$
$$\delta = \frac{1}{2} [\Delta\beta + \gamma(P_1 + P_2)]$$

# 具体例子



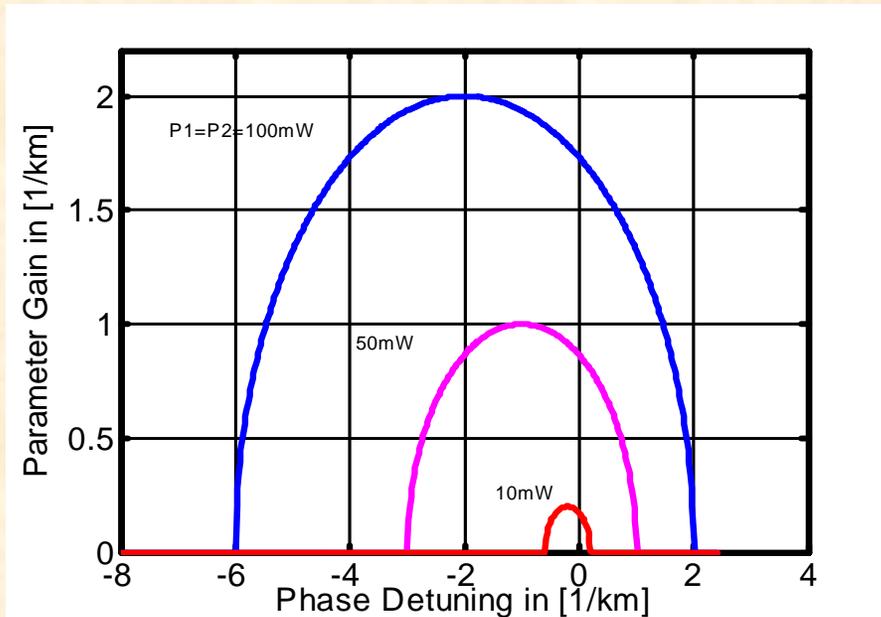
边界条件：

$$a_3 + b_3 = 1 \quad a_4 + b_4 = 0$$

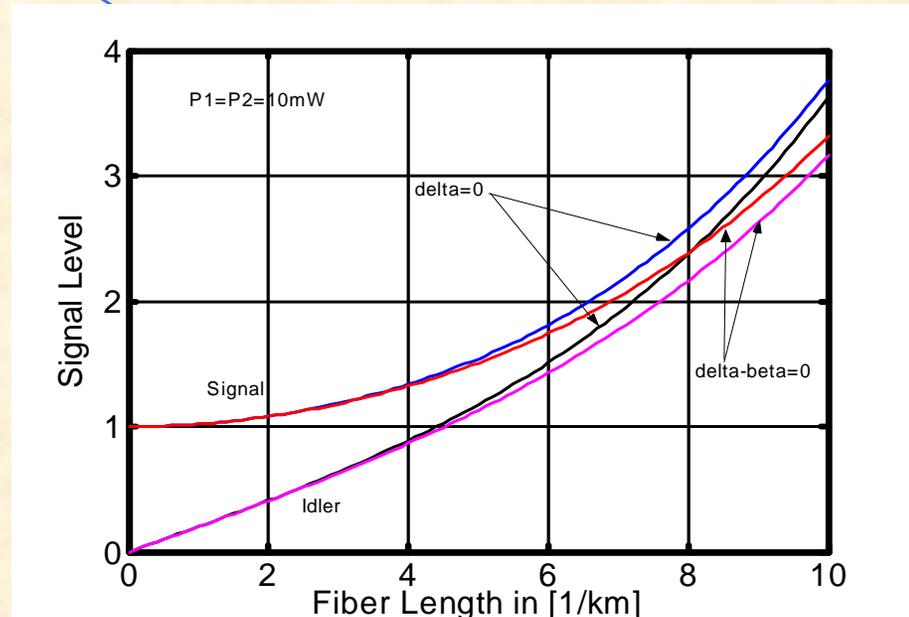
$$a_3 g - b_3 g = j\delta \quad a_4 g - b_4 g = j\kappa$$

$$\begin{cases} S(z) = [g \cosh(gz) + j\delta \sinh(gz)]/g \\ R(z) = j\kappa \sinh(gz)/g \end{cases}$$

# 数值结果



## Parameter Gain



## Parameter Amplification

非线性相位匹配:

$$\delta = \frac{1}{2} [\Delta\beta + \gamma(P_1 + P_2)] = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta\beta = -\gamma(P_1 + P_2)$$



# 四波混频光学相位共轭 与光谱反转



# FWM光学相位共轲

在零色散点、连续波泵浦和无损情况下：

$$B_3 = A_3 e^{2j\gamma(P_1+P_2)z} \quad B_4 = A_4^* e^{-2j\gamma(P_1+P_2)z}$$
$$\frac{dB_3}{dz} = -j\kappa B_4 e^{-2j\delta z} \quad \frac{dB_4}{dz} = j\kappa B_3 e^{2j\delta z}$$

在  $|B_4| \ll |B_3|$  的情况下可得：

$$B_3(z, T) \approx B_3(0, T) \quad B_4(z, T) = \kappa B_3(0, T) (1 - e^{2j\delta z}) / 2\delta$$

$$A_4(z, T) = \kappa A_3^*(0, T) e^{-4j\gamma(P_1+P_2)z} (1 - e^{-2j\delta z}) / 2\delta = \eta(z) A_3^*(0, T)$$

上式表明，四波混频输出是输入信号脉冲的相位共轲脉冲



# FWM光谱反转

四波混频信号的输出中心频率为：

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$$

因此在频域上，输入信号中  $\omega_3 - \delta\omega$  的频率分量所产生的四波混频信号的频率成份为  $\omega_4 + \delta\omega$ ，即相对于各自的中心频率而言，与输入信号相比，混频信号的光谱发生了反转

FWM光谱反转与FWM光学相位共轭在物理本源上是一致的，相位共轭表示脉冲啁啾性质的符号发生了改变，使得输信号中相对于中心频率的蓝移分量与混频信号中的红移分量对应，因此导致了光谱反转的发生

四波混频光学相位共轭与光谱反转曾被用于单波长高速光纤传输系统中的色散补偿

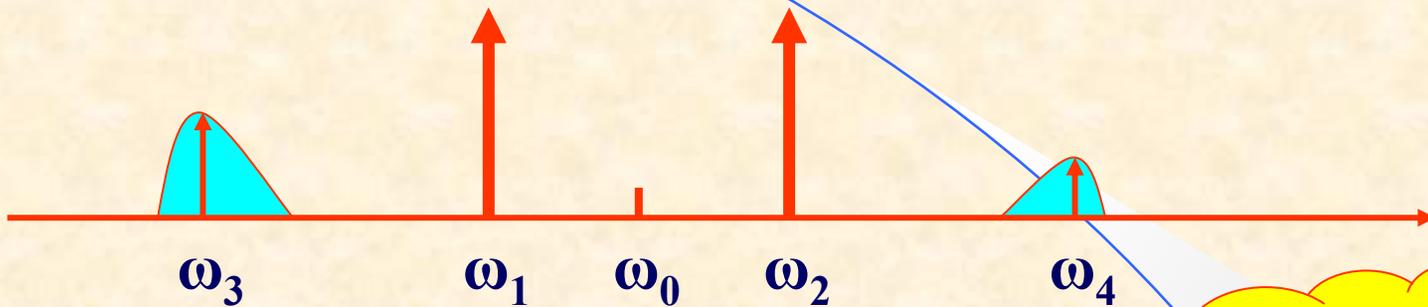


# 色散的影响 与四波混频带宽

# 色散单模光纤中的相位失配

Beijing Jiaotong University

北京交通大学



在  $\omega_0$  附近，光纤传输常数展开为：

$$\beta_n = \left. \frac{d^n \beta(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=\omega_0}$$

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \beta_2(\omega - \omega_0)^2 / 2$$

$$\Delta\beta = \beta(\omega_1) + \beta(\omega_2) - \beta(\omega_3) - \beta(\omega_4) = \beta_2 \Omega (\Omega + \Delta\omega)$$

$$\Omega = \omega_1 - \omega_3 = \omega_4 - \omega_2 \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

采用部分简并四波混频方式  $\Delta\omega = 0$ ，有利于FWM相位匹配



# 四波混频带宽

当  $\Delta\beta z = \pi$  时，非线性极化将与四波混频信号反相，开始削弱混频信号。定义FWM相干长度：

$$L_{coh} = \frac{\pi}{|\Delta\beta|}$$

在简并四波混频情形，对于给定的光纤长度  $L$ ，有效的四波混频被限制在下述频率范围内：

$$\Omega = \sqrt{\frac{\pi}{|\beta_2| L}}$$

上述有效FWM频率范围常被称为所设置的FWM实验系统的四波混频带宽



# 光脉冲的四波混频相互作用

四波混频将引起零色散点附近多波长光信号在传输过程中的相互耦合，造成不同波长通道间的串扰

对于频率为  $\omega_j$  的脉冲信号并考虑到光纤损耗，应当在FWM耦合方程中作替换：

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial A_j}{\partial z} + \beta_{j1} \frac{\partial A_j}{\partial t} - j \frac{\beta_{j2}}{2} \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A_j$$

$$\beta_{jn} = \left. \frac{d^n \beta}{d\omega^n} \right|_{\omega=\omega_j}$$

并应用分步Fourier方法对FWM耦合方程组进行求解

事实上，四波混频问题也可以通过给出适当的输入波形表达式，只求解一个非线性传输方程进行分析，例如：

$$A(0, t) = \sum_i A_i(0, t) e^{j\Delta\omega_i t} \quad \Delta\omega_i = \omega_i - \omega_0$$

$\omega_0$  为整个频率体系的中心频率



# 光脉冲走离 (walk-off effects)

在色散光纤中，除相位匹配问题外，光脉冲之间的FWM相互作用还受到脉冲之间群速度不同所导致的脉冲走离的影响

例如在简并四波混频情形，对于脉冲宽度为 $T_0$ 的泵浦光与信号光脉冲，走离距离为：

$$L_{\text{walk-off}} = \frac{T_0}{|\beta_{11} - \beta_{31}|}$$

用 $\omega_1$ 点处的色散表示为：

$$\beta_2 = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_1} \approx \frac{\beta_{31} - \beta_{11}}{\omega_3 - \omega_1} \quad \longrightarrow \quad L_{\text{walk-off}} = \frac{T_0}{|\beta_2(\omega_3 - \omega_1)|}$$



# 相位匹配技术



# 单模光纤中的准相位匹配技术

任意三个输入频率将在下述九个频率上产生四波混频输出

$$\omega_{112}, \omega_{113}, \omega_{221}, \omega_{223}, \omega_{331}, \omega_{332}, \omega_{123}, \omega_{312}, \omega_{231}$$

$$\omega_{ijk} = \omega_i + \omega_j - \omega_k$$

传播常数在中心频率上展开：

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \beta_2(\omega - \omega_0)^2 / 2$$

相位失配：

$$\Delta\beta_{ijk} = \beta(\omega_i) + \beta(\omega_j) - \beta(\omega_k) - \beta(\omega_{ijk}) = \beta_2\Omega(\Omega + \Delta\omega)$$

$$\Omega = \omega_i - \omega_k = \omega_{ijk} - \omega_j \quad \Delta\omega = \omega_j - \omega_i$$



# 四波混频效率

$$A_{ijk}(z, T) = \kappa A_k^*(0, T) e^{-4j\gamma(P_i + P_j)z} \left(1 - e^{-2j\delta_{ijk}z}\right) / 2\delta_{ijk}$$

$$\kappa = 2\gamma\sqrt{P_i P_j} \quad \delta_{ijk} = \frac{1}{2} \left[ \Delta\beta_{ijk} + \gamma(P_i + P_j + P_k) \right]$$

如果忽略交叉相位调制的影响：

$$\delta_{ijk} = \Delta\beta_{ijk} / 2$$

四波混频光场的输出光功率：

$$P_{ijk} \propto \gamma^2 P_i P_j P_k \sin^2(\Delta\beta_{ijk} z / 2) / \Delta\beta_{ijk}^2$$

$$\Delta\beta_{ijk} = \beta_2 \Omega (\Omega + \Delta\omega)$$



# 多模光纤相位匹配技术

在多模或少模光纤中可利用不同模式具有不同特性曲线的特点  
通过适当安排三个入射波所处所在的光纤模式可以实现相位匹配

$$\Delta\beta_{ijk} = \beta^{(1)}(\omega_i) + \beta^{(2)}(\omega_j) - \beta^{(3)}(\omega_k) - \beta^{(4)}(\omega_{ijk}) \approx 0$$

括号上标表示各波所在的模式序号



# 偏振保持光纤相位匹配技术

在偏振保持光纤中可利用不同偏振态模式具有不同传输特性的特点，通过适当安排三个入射波的偏振态实现相位匹配

$$\Delta\beta_{ijk} = \beta^{(\eta)}(\omega_i) + \beta^{(\sigma)}(\omega_j) - \beta^{(\xi)}(\omega_k) - \beta^{(\zeta)}(\omega_{ijk}) \approx 0$$

$$\beta^{(\xi)}(\omega) = n^{(\xi)}\omega/c \quad \eta, \sigma, \xi, \zeta = x, y$$

如果忽略 $n^{(\xi)}$ 随频率的变化，则：

$$\Delta\beta_{ijk} = \left[ n^{(\eta)}\omega_i + n^{(\sigma)}\omega_j - n^{(\xi)}\omega_k - n^{(\zeta)}\omega_{ijk} \right] / c$$

$$\omega_{ijk} = \left[ n^{(\eta)}\omega_i + n^{(\sigma)}\omega_j - n^{(\xi)}\omega_k \right] / n^{(\zeta)}$$



# Summary and Comments



# Summary

- 四波混频的实质是四个光子参与的光子散射过程
- 有效的四波混频应当满足相位匹配条件
- 光信号可以通过FWM过程进行放大，但同时产生空闲波
- FWM可产生输入信号的相位共轭脉冲并实现光谱反转
- FWM的相干长度与色散绝对值与FWM频移的平方成反比
- 四波混频带宽与所使用光纤的长度与色散的平方根成正比
- 色散所引起的脉冲走离可以有效地抑制FWM的产生



# 四波混频的应用

- **FWM波长转换技术**
- **FWM光谱反转色散补偿技术**
- **FWM OTDM解复用技术**
- **FWM光学相位共轭**