

有限温度格点 $U(1)$ 及定模 $U(1)$ -Higgs 模型 Symanzik 作用量的解析研究*

任学藻¹⁾ 朱允伦 陈莹

(北京大学物理系 北京 100871)

摘要 用变分累积展开方法(VCE)解析研究了 Symanzik 作用量形式的有限温度格点 $U(1)$ 及定模 $U(1)$ -Higgs 规范模型,并计算了序参量 Polyakov 线 $\langle L \rangle$ 及临界指数 β . 结果表明,采用 Symanzik 作用量的变分累积展开比 Wilson 作用量收敛快.

关键词 格点规范理论 累积展开法 Symanzik 作用量

1 引言

格点规范理论表述的一个重要问题是寻找拉氏作用量的正确形式,它必须满足定域规范不变性,并在格距 $a \rightarrow 0$ 时过渡到连续场表述. 满足这两个条件的作用量原则上可以有无穷多个,例如 Wilson^[1] 作用量, Manton 作用量^[2], Villain 作用量^[3] 等. 用不同的作用量得到的非微扰效应结果应当是相同的,但进入标度区的位置是不同的,因此,选择合适的作用量可以较快地趋于连续极限,从而有可能减小数值计算的计算量. Symanzik 作用量^[4] 就是在仅考虑作用量连续极限行为的一级改进时对 Wilson 作用量的改进作用量,已有文献对 $SU(2)$ LGT 的 Symanzik 作用量的零温^[5,6] 和有限温^[7] 的相结构及标度行为作了研究.

采用变分累积展开方法^[8],用 Symanzik 作用量,计算了有限温度格点 ($N_f = 1$) $U(1)$ 规范模型及 $U(1)$ 规范-Higgs 场耦合系统的序参量 Polyakov 线 $\langle L \rangle$ 和 $U(1)$ 规范模型的临界指数 β .

2 有限温度 $U(1)$ 格点规范理论

$U(1)$ 模型的群元素 $U_\mu(x) = e^{i\theta_\mu(x)}$ ($\theta_\mu(x) \in [-\pi, \pi]$) 定义在链上,其 Symanzik 作用量可表示为:

1997-05-21收稿

* 国家自然科学基金资助

1) 通讯地址:西昌师范专科学校物理系,四川西昌 615021

$$S_G = \beta_g \left(\frac{5}{3} \sum_{p_o} \cos \theta_{p_o} - \frac{1}{12} \sum_{p'_o} \cos \theta_{p'_o} \right) + \beta_g \left(\frac{5}{3} \sum_{p_t} \cos \theta_{p_t} - \frac{1}{12} \sum_{p'_t} \cos \theta_{p'_t} \right) \quad (1)$$

其中 Σ_{p_o} 为对所有四链类空格的求和; Σ_{p_t} 为对所有四链类时元格的求和; $\Sigma_{p'_o}$ 为对所有六链类空格子的求和; $\Sigma_{p'_t}$ 为对所有六链类时格子的求和; β_g 为无量纲耦合常数.

按照变分累积展开方法, 引入试探作用量 S_0 :

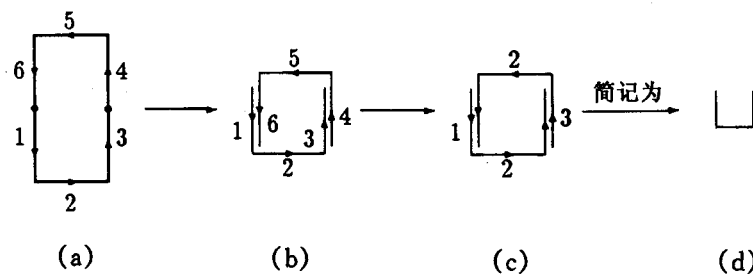
$$S_0 = J \sum_{l_o} \cos \theta_{l_o} + K \sum_{l_t} \cos \theta_{l_t} \quad (2)$$

求和分别对所有类空链 l_o 和类时链 l_t 进行, J, K 为相应的变分参数.

采用与文献 [8] 相同的图形符号, 例如, Polyakov 线在 $N_t = 1$ 时为

$$L = \cos \theta_t = \langle | \rangle \quad (3)$$

但是, 由于 Symanzik 作用量中存在 1×2 的六链格子, 当长度为 2 的格子沿类时方向时, 图形符号将有所变化, 例如, 在 $N_t = 1$ 时, 由于周期性边界条件



其中图 (c) 的数学表达式为:

$$\cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_3 - \theta_2 - \theta_1 - \theta_1) = \cos(2\theta_3 - 2\theta_1) \quad (4)$$

因此,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 5 \\ \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \end{array} \end{array} \\ \hline \end{array} = \cos \theta_1 \cos(2\theta_3 - 2\theta_1) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \end{array}$$

期望值 $\langle L \rangle$ 用累积展开^[8] 可表示为

$$\langle L \rangle = \langle L \rangle_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle L(S_G - S_0)^n \rangle_c, \quad (5)$$

这里 $\langle \dots \rangle_0$ 是以 S_0 为作用量的辅助系统所求的平均值. $\langle \dots \rangle_c$ 是以 S_0 为作用量的辅助系

统所求的累积展开值.

对 Abel 理论, 在 $N_t = 1$ 时, 由于在类时方向的周期性边界条件, 在累积展开中所有的类空格子和类空元格与类时格子和类时元格完全退耦, 因此在 $\langle L \rangle$ 的第 i 级展开中, $\langle L_i \rangle$ 仅依赖于 β_g 和 K . 例如

$$\begin{aligned}
 \left\langle \begin{array}{c} 7 \quad 6 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 4 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\rangle_0 &= \langle \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_2 - \theta_1 - \theta_4) \cos(\theta_1 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) \rangle_0 = \\
 &= \langle \cos(\theta_3 - \theta_4) \cos(\theta_1 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) \rangle_0 = \\
 &= \langle \cos(\theta_3 - \theta_4) \rangle_0 \langle \cos(\theta_1 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) \rangle_0 = \\
 &= \langle [\dots] \rangle_0 \langle \text{parallelogram} \rangle_0
 \end{aligned}$$

本文对 $\langle L \rangle$ 的累积展开计算到第三级修正, 第一、二、三级修正的连接图形分别有 3, 19, 130 个. 在附录中给出了到二级的计算结果.

为便于与 Wilson 作用量结果比较, 引入^[5]

$$\beta'_g = \frac{5}{3} \beta_g, \quad (6)$$

变分参数 K 是用聚点法^[9] 确定的, 具体方法^[10] 是用 $\langle L_i \rangle$ 与 $\langle L_0 \rangle$ 扫描线的交点 K_i^* 来确定. 结果发现, 在强耦合区 $K_i^* = 0$, 给出 $\langle L \rangle = 0$, 离开强耦合区, $K_i^* \neq 0$, 在 K_i^* 处:

$$\begin{aligned}
 \Delta_i \langle L \rangle &\equiv \langle L_i \rangle|_{K=K_i^*} - \langle L_0 \rangle|_{K=K_i^*} = \\
 &= \sum_{n=1}^i \frac{1}{n!} \langle (S_n - S_0)^n \rangle_c = 0.
 \end{aligned} \quad (7)$$

这时对 $\langle L_0 \rangle$ 的第 i 级修正为零, 于是

$$\langle L \rangle(\beta_g) \cong \langle L_0 \rangle(\beta_g)|_{K=K_i^*} \quad (8)$$

通过扫描发现, 在 K_i^* 处各级 $\langle L_i \rangle$ 相差很小, 序参量 $\langle L \rangle$ 有最快的收敛行为^[10].

当 $d = 4$ 时, $\langle L \rangle \sim \beta_g$ 的关系见图 1. 在 $\beta_{g_c} = 0.2449$ 处, 有一个二级相变发生, 这个相变点相当于用 Wilson 作用量的 $\beta'_g = 0.4081$, 这与 Monte Carlo 的结果 ($\beta'_{g_c} = 0.41$)^[11] 符合甚好, 与文献 [12] 计算到四级的结果几乎完全一致.

在相变点 β_{g_c} , Polyakov 线的临界行为可以用临界指数 β 来描述:

$$\langle L \rangle = A(\beta_g - \beta_{g_c})^\beta \quad \text{当 } \beta_g \rightarrow \beta_{g_c} \text{ 时}, \quad (9)$$

$$\ln \langle L \rangle = \beta \ln(\beta_g - \beta_{g_c}) + \ln A. \quad (10)$$

为了确定临界指数 β , 可在相变点附近取一组 β_g 值, 扫描与其对应的 $\langle L \rangle$ 值, 结果如

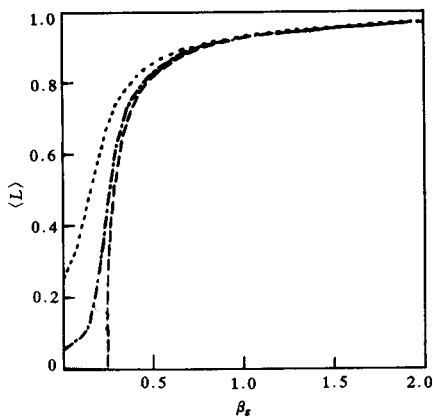


图1 $\langle L \rangle$ 与 β_g 的关系

--- $h=0.5$; - · - $h=0.1$; ··· $h=0$.

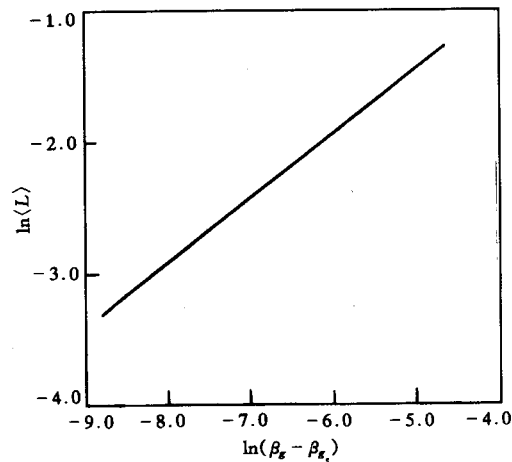


图2 临界指数 β 的线性拟合

图 2 所示. 很明显, $\ln \langle L \rangle$ 与 $\ln(\beta_g - \beta_{g_c})$ 呈线性关系, 即在相变点附近临界指数为一恒定值. 经线性拟合定出临界指数为 $\beta = 0.495$, 这个结果与文献 [12] 一致.

从对序参量 $\langle L \rangle$ 、 β_{g_c} 和临界指数 β 的计算可以看出, Symanzik 作用量有更快的收敛行为, 用较低级的展开就可得到用 Wilson 作用量展开到较高级次同样的结果. 这是由于 Symanzik 作用量中含有 1×2 的六链格子, 在较低级的累积展开中就已包括较高次的关联图形, 例如, 在三级累积展开中有图形 $\left[\begin{array}{ccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \right]$, 其关联长度为 $6a$, 而若采用 Wilson 作用量, 要累积展开到六级才会出现此图.

3 有限温度定模 $U(1)$ -Higgs 模型

在 4 维超立方格子上, 定模基础表示的 Higgs 场与 $U(1)$ 规范场的耦合系统的作用量为^[13]:

$$S = S_G + h \sum_{l_o} \cos \theta_{l_o} + h \sum_{l_t} \cos \theta_{l_t}, \quad (11)$$

其中 S_G 为 Symanzik 作用量, h 为耦合常数.

采用的试探作用量仍为

$$S_0 = J \sum_{l_o} \cos \theta_{l_o} + K \sum_{l_t} \cos \theta_{l_t}, \quad (12)$$

由于类时方向的周期性, 在 $N_t = 1$ 时, 所有含类空格子、类空元格与单纯类空链的累积平均值 $\langle \dots \rangle_c$ 均为零, 因此, 展开到三级近似有:

$$\langle L \rangle \cong \langle L \rangle_0 + \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n!} \langle L [S_G + (h - K) \sum_{l_t} \cos \theta_{l_t}]^n \rangle_c, \quad (13)$$

$\langle L \rangle$ 仅依赖于 β_g 、 h 和 K , 固定 β_g 、 h 对 K 作扫描以确定 $\langle L \rangle$ 的最快收敛点, 即聚点.

当 $h = 0$ 时, 得到有限温度 $U(1)$ 纯规范场的结果. 当 $h \neq 0$ 时, 即使在强耦合区 $\langle L \rangle$ 也不为零, 其结果如图 1 所示, 由图可见, 没有相变发生, 这与文献 [13] 用 Wilson 作用量在 $N_c = 1$ 时的结果一致.

以上结果表明, 在格点规范理论中采用不同的作用量虽然所得结果是基本一致的, 但收敛行为是不同的, Symanzik 作用量比 Wilson 作用量有更快的收敛行为, 因而可以用较少的累积展开得到较好的近似结果, 而在 Monte Carlo 模拟中, 可以用较少的数值计算时间得到较好的结果.

参 考 文 献

- [1] Wilson K G. Phys. Rev., 1974, **D10**:2445
- [2] Manton N S. Phys. Lett., 1980, **B96**:328
- [3] Villain J. J. Phys. (Paris), 1975, **36**:581
- [4] Symanzik K. Nucl. Phys., 1983, **B226**:187
- [5] Chen T L, Suo C C. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese), 1986, **10**:158
(陈天嵩, 索存川. 高能物理与核物理, 1986, **10**:158)
- [6] Li W Z, Zhang J B. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese), 1988, **12**:608
(李文铸, 张剑波. 高能物理与核物理, 1988, **12**:608)
- [7] Curci G, Tripiccion R. Phys. Lett., 1985, **B151**:145
Cella G, Curci G et al. Phys. Rev., 1984, **D49**:499
- [8] Tan C I, Zheng X T. Phys. Rev., 1989, **D39**:623
- [9] Kerler W. Phys. Rev. Lett., 1988, **60**:1906
- [10] Zheng X T, He Y, Lu Z. Commun. Theor. Phys., 1994, **22**:199
- [11] Billic N, Gansterer H, Sanielevici S. Phys. Lett., 1987, **B198**:35
- [12] Huang L X, Chen T L, Liu Y Y. Phys. Lett., 1996, **B370**:123
- [13] Ren X Z, Chen Y, Zhu Y L. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese), 1998, **4**:315
(任学藻, 陈莹, 朱允伦. 高能物理与核物理, 1998, **4**:315)

附录 累积展开到二级近似的不等价图的图形系数及累积平均值

n	i	$L_{n,i}$	$a_{n,i}$	$r_{n,i}$	$\langle L_{n,i} \rangle_c$
0	1		1	1	ξ_1
1	1	□	r	$\frac{5}{3}\beta$	$\xi_1\xi'_1$
1	2	□□	r	$-\frac{1}{12}\beta$	$\xi_1\xi'_1$
1	3	□	r	$-\frac{1}{12}\beta$	$\xi_2\xi'_2$
2	1	2	r	$\frac{25}{9}\beta^2$	$\frac{1}{2}\xi_2\xi'_2 - 2\xi_1^3\xi'_1$
2	2	□□	$2rR_0$	$\frac{25}{9}\beta^2$	$\xi_1\xi_1'^2$
2	3	□ □	rR_0	$\frac{25}{9}\beta^2$	$\xi_1\xi_1''$
2	4	2	r	$\frac{1}{144}\beta^2$	$\frac{1}{2}\xi_2\xi'_2 - 2\xi_1^3\xi'_1$
2	5	□□□	$2rR_0$	$\frac{1}{144}\beta^2$	$\xi_1\xi_1'^2$
2	6	□□ □	rR_0	$\frac{1}{144}\beta^2$	$\xi_1^2\xi_1''$
2	7	2	r	$\frac{1}{144}\beta^2$	$\frac{1}{2}\xi_4\xi'_4 - 2\xi_2^3\xi'_2$
2	8	□□	$2rR_0$	$\frac{1}{144}\beta^2$	$\frac{1}{2}\xi_2\xi'_2(1 + \xi_4) - \xi_2^3\xi'_2$
2	9	□ □	rR_0	$\frac{1}{144}\beta^2$	$\frac{1}{2}\xi_2^2\xi'_4 - 2\xi_2^3\xi'_2$
2	10	□□□	r^2	$-\frac{5}{18}\beta^2$	$\xi_1\xi_1'^2$
2	11	□□□	r^2	$-\frac{5}{18}\beta^2$	$\xi_1\xi_1'^2$
2	12	□ □□	r^2	$-\frac{5}{18}\beta^2$	$\xi_1^2\xi_1''$
2	13	□□	rR_0	$-\frac{5}{18}\beta^2$	$\xi_2\xi_2'\xi_1$
2	14	□□	rR_0	$-\frac{5}{18}\beta^2$	$\xi_1\xi_2'^2$
2	15	□ □	rR_0	$-\frac{5}{18}\beta^2$	$\xi_1\xi_2\xi_2''$
2	16	□□	r	$-\frac{5}{18}\beta^2$	$\frac{1}{2}(\xi_1\xi_1' + \xi_3\xi_3') - \xi_1^2\xi_2\xi_2' - \xi_2^2\xi_1\xi_1'$
2	17	□□□	r^2	$\frac{1}{72}\beta^2$	$\xi_2\xi_2'\xi_1$
2	18	□□□	r^2	$\frac{1}{72}\beta^2$	$\xi_1\xi_2'^2$
2	19	□□ □	r^2	$\frac{1}{72}\beta^2$	$\xi_1\xi_2\xi_2''$

Analytical study of Lattice $U(1)$ and $U(1)$ -Higgs Models at Finite Temperature With Symanzik Action *

Ren Xuezhao¹⁾ Zhu Yunlun Chen Ying
(Department of Physics, Peking University, Beijing, 100871)

Abstract The lattice $U(1)$ and $U(1)$ -Higgs models with Symanzik action are analytically studied at finite temperature using variational cumulant expansion (VCE). The Polyakov lines $\langle L \rangle$ and the critical index β are calculated. The results show that VCE of system with Symanzik action converges more rapidly than that of Wilson action.

Key words lattice gauge theory, cumulant expansion, Symanzik action

Received 21 May 1997

* Supported by the National Natural Science Foundation of China

1) On leave from Xichang Normal School, Sichuan Xichang 615021