

格点定模 $SU(2)$ -Higgs 模型的解析计算*

郑希特 陈洪¹⁾ 卢昭 何原

(成都科技大学物理系 成都 610065)

1993-11-20 收稿

摘 要

对格点上基础表示的定模 Higgs 场与 $SU(2)$ 规范场耦合系统的相图进行解析计算至累积展开的第四级, 用扫描确定变分参数的方法, 得到与 Monte Carlo 模拟很好符合的相图. 计算了 $N_\tau = 1$ 的有限温度情形下 $SU(2)$ -Higgs 系统和纯 $SU(2)$ 模型的 Polyakov 线 $\langle L \rangle$, 对后者得到迄今最佳的近似解析结果 β_c .

关键词 $SU(2)$ -Higgs, 累积展开, 格点, 相图, 定模.

1 引 言

对格点上基础表示的定模 Higgs 场与 $SU(2)$ 规范场耦合系统的一系列研究、理论分析^[1]与 Monte Carlo 模拟^[2-4], 都指出存在着解析连通的禁闭相与 Higgs 相, 用变分-累积展开方法首次解析地得到了与 Monte Carlo 模拟相符合的相图^[5]. 那里累积展开自由能至第三级, 变分参数采用二级近似的自由能 F_2 对变分参数变分极小条件确定. 在拉氏形式变分法中^[6], 变分参数是用一级近似自由能 F_1 的变分极小条件来确定的. 由于 Jensen 不等式的存在, 这一条件可以给出自由能的上界, 理论上是严格成立的. 可是二级变分极小条件却没有理论上的保证, 因而只是一种等效近似. 在考虑更高级的累积展开时, 我们曾尝试用三级近似的 F_3 的变分极小条件, 结果不理想. 所以, 用逐级近似 F_i 的变分极小来定参数不是一个系统可行的办法.

为使累积展开方法能给出较可靠的定量结果, 作高级展开是必要而且是很 有希望的. 这时需要系统地确定变分参数的方法. “聚点”法提出通过扫描观察各级扫描曲线的交点——“聚点”, 在“聚点”处各级结果有最快的收敛行为^[7]. 然而, “聚点”只较明显地存在于弱耦合区, 这使得 Kerler 和 Metz^[7] 认为累积展开方法只适用于弱耦合区. 正如 $U(1)$ 在 $N_\tau = 1$ 时的高阶展开研究所表明的^[8]: 不适用的只是找各级汇聚一点的“聚

* 国家自然科学基金资助.

1) 现在四川重庆西南师范大学物理系, 630715.

点”方法本身而不是累积展开方法。对有的物理量,例如 Polyakov 线 $\langle L \rangle$, 最快的收敛性在弱耦合区表现为“聚点”,而在中间耦合区则表现为修正越来越小的一种渐近行为上。扫描方法必须对不同的模型及不同的物理量独自进行,因之对 $SU(2)$ -Higgs 模型进行扫描考察对了解累积展开在这个系统处理中的收敛性和确定高阶展开的变分参数都是有意义的。

本工作是[5]的继续,一方面把自由能的累积展开 F_i 推高一级,另一方面考察扫描定参数的方法。计算的结果与 Monte Carlo 模拟的相变线有很好的符合。还计算了这个模型在高温 ($N_t = 1$) 下的相变行为。由于在定模情况下的 $SU(2)$ -Higgs 模型与纯规范 $SU(2)$ 模型在进行累积展开时的结构十分接近,顺便对 $N_t = 1$ 的 $SU(2)$ 规范模型的温度解除相变进行了研究,得到了与 Monte Carlo 模拟很好符合的结果,是迄今最好的近似解析结果。

2 零温度时的相图

考虑 $d = 4$ 维超立方格子上的定模基础表示的 Higgs 场与 $SU(2)$ 规范场耦合系统,其作用量可写为^[2,5]

$$S = S_G + \kappa \sum_l \text{tr} U_l \quad (1)$$

$$S_G = \beta \sum_p \text{tr} U_p \quad (2)$$

S_G 是 Wilson 作用量, $\beta = \frac{2}{g^2}$, κ 为耦合常数,不加说明符号的意义皆与[5]中所用相同。按变分-累积展开方法^[9]引入试探作用量

$$S_0 = J \sum_l \text{tr} U_l \quad (3)$$

系统 i 级近似的单位格点自由能 F_i 可表示为

$$F_i = F_0 - \frac{1}{M} \sum_{n=1}^i \frac{1}{n!} K_n \quad (4)$$

$$K_n = \left\langle \left[S_G + (\kappa - J) \sum_l \text{tr} U_l \right]^n \right\rangle_c \quad (5)$$

$$F_0 = -d \cdot \ln \left(\frac{I_1(2J)}{J} \right) \quad (6)$$

$\langle \dots \rangle_c$ 是累积平均。本文计算到 4 级展开 F_4 , 虽然第 4 级的计算要复杂很多,但无原则困难,故技术细节不在此一一给出。

考察一下定参数 J 的问题。给定 β, κ , 把 $F_i(\beta, \kappa, J)$ 对 J 进行扫描,典型的扫描图如图 1 所示。

当 $\beta = 1.0$ 时,系统处于强耦合区, F_i 收敛于对应着 $J \approx 0$ 的强耦合近似值; $\beta = 2.5$ 时, F_2, F_3, F_4 相交在 $J^* \approx 4.6$ 附近的一个小区域内,近似地是一个“聚点”, F_i 的

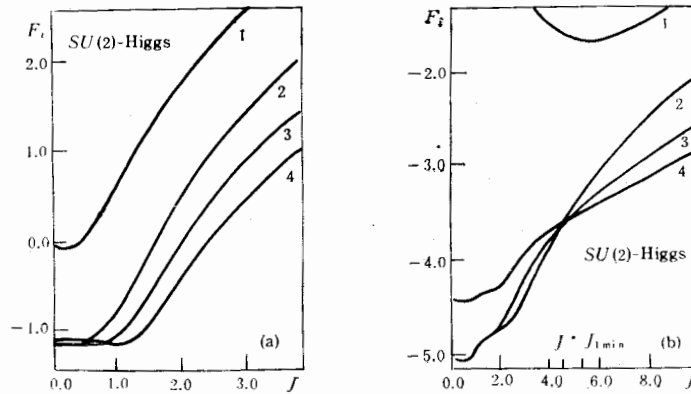


图 1 自由能 $F_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 对 J 的扫描图
(a) 固定 $\kappa = 0.4, \beta = 1.0$; (b) 固定 $\kappa = 0.4, \beta = 2.5$.

值显示了很好的收敛性。 F_1 有一个明确的极小值位于 J_{\min} , 它与 J^* 相距不远, 这正表明用 F_1 的变分条件下 J_{\min} 后逐级代入 F_i 可以得到逐级改善的结果, 只是收敛得较慢, 而扫描的优点在于一下子看到了收敛最快的 J^* 和对应的 $F_i(\beta, \kappa, J^*)$ 值, 对确定的 κ , 改变 β 就给出 $F \approx F_i(\beta)$, 它对 β 一次导数不连续的地方给出一级相变点。随 κ 的增大, 这一级相变逐渐减弱以致消失。所得相图如图 2, 与虚线所示的 Monte Carlo 模拟^[3]有很好的符合。

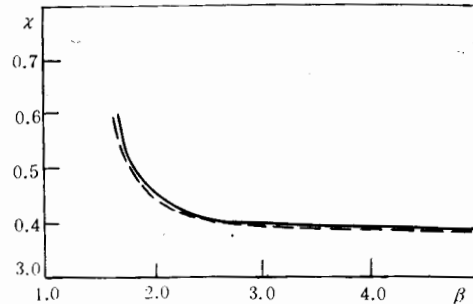


图 2 定模 $SU(2)$ -Higgs 模型在零温时的相图
虚线为 Monte Carlo 结果^[3].

3 有限温度情形 ($N_\tau=1$)

格点对有限温度的 $SU(2)$ -Higgs 模型的变分-累积展开计算曾对 $N_\tau = 2$ 的变模情形作过^[10]. 这里计算 $N_\tau = 1$ 的情形. 和前面一样, 变分参数的选定改为扫描办法, 由类时链上的 U_τ 定义的 Polyakov 线

$$L = \frac{1}{2} \text{tr} U_\tau(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

的统计平均值 $\langle L \rangle$ 能起到指示解除禁闭相变的作用^[1]。引入相应的试探作用量

$$S_0 = J \sum_{\sigma} \text{tr} U_{\sigma} + Q \sum_{\tau} \text{tr} U_{\tau} \quad (8)$$

求和分别对类空与类时链进行。到第 i 级近似:

$$\langle L \rangle \cong \langle L \rangle_i = \langle L \rangle_0 + \sum_{n=1}^i \frac{1}{n!} \langle L(S - S_0)^n \rangle_c \quad (9)$$

由于 $N_{\tau} = 1$ 时在类时方向的周期性条件, 到3级展开 ($i = 3$) 时, 类似于 $U(1)$ 模型^[6], 所有含类空元格或与单纯类空链的关联图形的 $\langle \dots \rangle_c$ 均为零, 因此至3级近似有

$$\langle L \rangle \cong \langle L \rangle_3 = \langle L \rangle_0 + \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n!} \langle L [S_0 + (\kappa - Q) \sum_{\tau} \text{tr} U_{\tau}]^n \rangle_c \quad (10)$$

$\langle L \rangle_i (i \leq 3)$ 将只依赖于 β, κ 和 Q 。对固定的 β, κ 作 Q 的扫描以确定各级 $\langle L \rangle_i$ 的最快收敛点。

先看 $\kappa = 0$ 的纯 $SU(2)$ 规范模型。它们的扫描图和 $U(1)$ 群的情况类似^[7]。见图3。变分参数选为 $\langle L \rangle_i$ 与 $\langle L \rangle_0$ 扫描线的交点 Q_i^* 。在强耦合区,

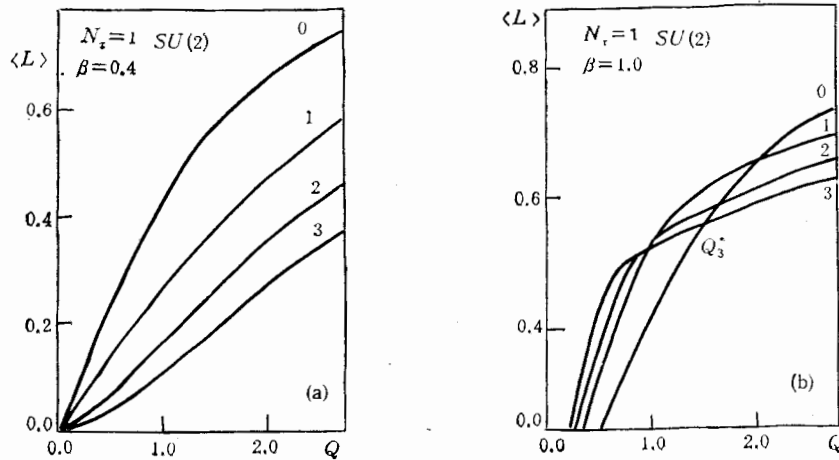


图3 Polyakov 线 $\langle L \rangle_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 对 Q 的扫描图

(a) $N_{\tau} = 1, \beta = 0.4$, 纯 $SU(2)$ 模型。 (b) $N_{\tau} = 1, \beta = 1.0$, 纯 $SU(2)$ 模型。

$Q_i^* = 0$ 给出 $\langle L \rangle = 0$ (图 3a), 离开强耦合区, Q_i^* 沿 $\langle L \rangle_0$ 逐级减小 (图 3b)。在 Q_i^* 点

$$\Delta_i \langle L \rangle \equiv \langle L \rangle_i |_{Q=Q_i^*} - \langle L \rangle_0 |_{Q=Q_i^*} = \sum_{n=1}^i \frac{1}{n!} \langle L(S - S_0)^n \rangle_c = 0 \quad (11)$$

这时对 $\langle L \rangle_0$ 的 i 级修正为零。于是

$$\langle L \rangle(\beta) \cong \langle L \rangle_i(\beta) |_{Q=Q_i^*} \quad (12)$$

这样得到的 $\langle L \rangle$ - β 关系如图 4 所示。逐级的修正越来越小, 显示了展开的收敛性。从 $\langle L \rangle = 0$ 到最早出现 $\langle L \rangle \neq 0$ 的 β_{ci} 给出 i 级近似下解除禁闭的相变点。它们的值和

其它方法得到的结果列于表 1 中。注意到计算的一级近似结果与平均场结果很接近, 这是自然的, 因为用最早的变分方案(累积展开的一级近似并用 F_1 变分条件定参数)结合平均场思想即可导出平均场方程^[12]。随展开级别的升高, β_c 很好地收敛趋于 Monte Carlo 模拟值, 这是迄今近似解析方法给出的最好结果。同时也显示强耦合结果确实偏大了, 其原因可能在于强耦合展开方法本身^[13]。

现在看 $\kappa \neq 0$ 的情形。由于 Higgs 场的进入, 在强耦合区, 各级 $\langle L \rangle_i$ 的扫描曲线不再汇聚于 $Q = 0$ 一点, 但是按(11)式定变分参数, 在整个耦合常数区间, 展开仍显示了良好的收敛行为。例如, 图 5(a) 就显示 $\beta = 0$ 的扫描结果, 对应收敛情形的参数值在小 Q 处, 且 $\langle L \rangle|_{Q=Q^*} \neq 0$ 。对若干 κ 值的结果示于图 5(b) 中。它们与 $N_r = 2$ 时的行为极为相似^[10]。对 $\kappa \neq 0$, 没有相变发生。这里没有 Monte Carlo 结果可供比较。

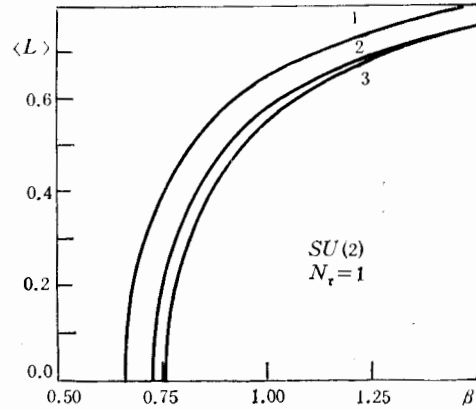


图 4 Polyakov 线 $\langle L \rangle$ - β 一至三级近似

表 1

	变分-累积展开			平均场	强耦合展开	Monte Carlo
	一级近似	二级近似	三级近似			
β_c	0.66666	0.73029	0.75964	0.68 ^[11] 0.676 ^[12]	0.96 ^[13]	0.75 ^[14]

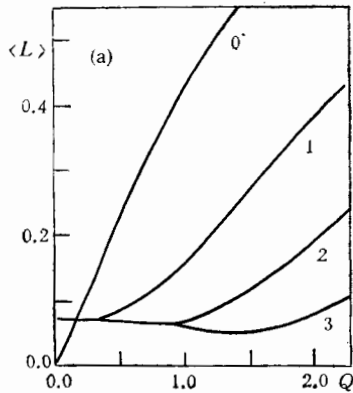


图 5(a) 定模 $SU(2)$ -Higgs 模型 Polyakov 线 $\langle L \rangle_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 对 Q 的扫描图
($N_r = 1, \beta = 0.0, \kappa = 0.15$)

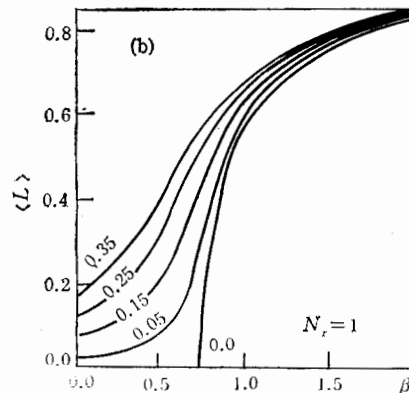


图 5(b) 三级近似的 $\langle L \rangle$ - β 关系, ($\kappa = 0, 0.05, 0.15, 0.25, 0.35, N_r = 1$)

本文结果表明,对定模基础表示的 $SU(2)$ -Higgs 系统,采用扫描定参数的(11)式,可得到在全耦合常数区间良好收敛的累积展开的 $\langle L \rangle$ 的结果。这与 $U(1)$ 系统 $\langle L \rangle$ 的计算类似,估计这对各种不同的群有普适性。正进一步研究中。

参 考 文 献

- [1] K. Osterwalder, E. Seiler, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **110** (1978) 440. E. Fradkin, S. H. Shenker, *Phys. Rev.*, **D19**(1979) 3682.
- [2] C. B. Lang, C. Rebbi, M. Virasoro, *Phys. Lett.*, **104B** (1981) 294.
- [3] H. Kuhnelt, C. B. Lang, C. Vones, *Nucl. Phys.*, **B230**[FS10] (1984) 16.
- [4] M. Tomiya T. Hattori, *Phys. Lett.*, **140B**(1984) 370. I. Montavay, *Phys. Lett.*, **150B** (1985)441.
- [5] 郑希特、刘备书,高能物理与核物理,**14**(1990)36.
- [6] X. T. Zheng, C. -I Tan, T. L. Chen, *Phys. Rev.*, **D26**(1982)2843.
- [7] W. Kerler, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988) 1906. L. Schulke, *Phys. Lett.*, **B208** (1988) 495; W. Kerler, T. Metz, *Phys. Rev.*, **D44**(1991)1263.
- [8] X. T. Zheng, Y. L. Li, C. H. Lei, *Chinese Phys. Lett.*, **9** (1992)573.
- [9] X. T. Zheng, Z. G. Tan, J. Wang, *Nucl. Phys.*, **B287**(1987) 171.
- [10] 郑希特、刘备书,高能物理与核物理,**14**(1990)892.
- [11] P. H. Damgaard, U. M. Heller, *Nucl. Phys.*, **B294**(1987) 253. F. Green, F.Karsch, *Nucl. Phys.*, **B238**(1984)297.
- [12] M. Ogilvie, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984)1369.
- [13] F. Green, *Nucl. Phys.*, **B215**[FS7] (1983)83.
- [14] L. McLerran, B. Svetitsky, *Phys. Lett.*, **98B**(1981)195; *Phys. Rev.*, **D24**(1981)450.
- [15] 郑希特,成都科技大学校庆卅周年论文集(1984)449.

Analytical Calculation of the Fixed Length Lattice $SU(2)$ -Higgs Model

Zheng Xite Chen Hong Lu Zao He Yuan

(Department of Physics, Chengdu University of Science and Technology, Chengdu 610065)

Received 20 November 1993

Abstract

The phase diagram of the lattice system of the $SU(2)$ gauge field coupled with the fixed length Higgs field in the fundamental representation has been calculated analytically to the fourth order of the cumulant expansion. The variational parameters have been determined by the scanning method. The obtained phase diagram is in fine agreement with the Monte Carlo result. The calculation also has been made for the Polyakov line $\langle L \rangle$ of the $SU(2)$ -Higgs and the pure $SU(2)$ models at finite temperature ($N_\tau = 1$). The best up to now approximate analytical result β_c for the pure $SU(2)$ model is obtained.

Key words $SU(2)$ -Higgs, cumulant expansion, lattice, phase diagram, fixed length.