

# (2 + 1)维 SU(2)真空波函数 五级近似的解析计算

惠 萍

(广东教育学院物理系 广州 510303)

**摘要** 采用截断本征方程的方法,利用么模条件,合理选取图形,由一至四阶图推出五阶图,计算出五级真空波函数的 $\mu_0$ 和 $\mu_2$ 与四级真空波的 $\mu_0$ 和 $\mu_2$ 有较大的差别,初步看到该方法的收敛性不能令人满意,并有待于进一步研究.

**关键词** 格点规范 解析计算 真空波函数

## 1 引言

文献[1—4]利用截断本征方程的方法计算真空波函数和胶球质量的三级和四级结果,此结果与 Monte Carlo 方法计算的结果接近,在弱耦合区表现出良好的标度行为.但这种方法是否收敛是我们一直关心的问题,本文将四阶图和五阶图的结果进行比较,初步看到,此方法的收敛性不能令人满意.

在五阶图的计算过程中,我们把四阶图中的四个“特殊”图形(见图1):



图 1

通过么模条件:  $\text{Tr}A \cdot \text{Tr}B = \text{Tr}A \cdot B^+ + \text{Tr}A \cdot B$  变换成(见图2):



图 2

这种选择对四级计算没有什么影响,但对于五级图的计算影响很大,因为五阶图是由四阶以下图形推算出来的,例如:由对易关系  $[E_i^a, \square][E_j^a, \square]$  产生的五阶图与对易关系  $[E_i^a, \square][E_j^a, \square]$  产生的五阶图不同,前者会丢掉很多“信息”,采用后者更合理.另外,在选择独立图时,利用么模条件,在四阶图中把  $\square\square$  变换成  $\square\square$ ,在五阶图中,如采用  $\square\square\square$ ,而不采用  $\square\square\square$ ,使计算结果更好.总之,由于么模条件

的存在,使得选择独立图有任意性,目前还不能确定到底哪种选择最好,初步看到对称图形会给出较好的结果.

在长波极限下,波函数为

$$\psi_0(U) = \exp \left[ -\mu_0 \int d^2x \text{Tr} F^2(x) - \mu_2 \int d^2x \text{Tr} (D_i F(x)^2) \right],$$

$$\text{其中 } D_i = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} F \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial x_2} F \right)^2.$$

Monte Carlo 模拟方法<sup>[5]</sup>得到:

$$\mu_0 = (0.91 \pm 0.02) / e^2;$$

$$\mu_2 = -(0.19 \pm 0.05) / e^6.$$

$e$  是不变荷,  $g$  为无量纲的耦合常数,两者之间的关系为  $g^2 = e^2 a$ .

## 2 哈密顿量、本征方程和真空波函数

LGT 的哈密顿量为:

$$H = \frac{g^2}{2a} = \left[ \sum_l E_l^2 - \frac{2}{g^4} \sum_p (\text{Tr} U_p + \text{Tr} U_p^+) \right],$$

对于  $SU(2)$  群,  $\text{Tr} U_p = \text{Tr} U_p^+$  则:

$$H = \frac{g^2}{2a} \left( \sum_l E_l^2 - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p \right).$$

真空波函数:  $|\Omega\rangle = e^{R(U)} |0\rangle$ ,

其中,  $R(U)$  由 Wilson 圈组成,  $|0\rangle$  满足  $E|0\rangle = 0$ .

本征方程:  $H|\Omega\rangle = H \cdot e^{R(U)} |0\rangle = e^{R(U)} e^{-R(U)} H \cdot e^{R(U)} |0\rangle = \varepsilon_0 |\Omega\rangle$ .

利用公式:

$$e^{-R} H e^R = H - [R, H] + \frac{1}{2!} [R, [R, H]] + \dots,$$

$$[E_l^\alpha(x), U(y, j)] = \lambda^\alpha U(x, j) \delta_{xy} \delta_{ij},$$

$$[E_l^\alpha(x), U^+(y, j)] = -U^+(x, j) \lambda^\alpha \delta_{xy} \delta_{ij},$$

得本征方程为:

$$\sum_l ([E_l^\alpha, [E_l^\alpha, R]] + [E_l^\alpha, R][E_l^\alpha, R]) - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr}(U_p) = \text{const.} \quad (1)$$

真空波函数中  $R$  可按图的阶展开:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + \dots \quad (2)$$

方程(1)中的高阶图是由低阶图经对易关系产生的:

$$[E^\alpha, [E^\alpha, R_n]] \in R_n + \text{低阶图}, \quad (3)$$

$$[E^\alpha, R_n][E^\alpha, R_{n'}] \in R_{n+n'} + \text{低阶图}. \quad (4)$$

$$\text{设 } R_1 = X(4)\square, \quad (5)$$

(5)式中的  $X(4)$  是待定系数. 由(3)–(5)式可以推导出图  $R_2, R_3, R_4, R_5$  (因篇幅太多、略), 其中  $R_2$  有 3 个图,  $R_3$  有 9 个图,  $R_4$  有 56 个图,  $R_5$  有 319 个图, 以上 388 个独立图形是利用么模条件得到的.

### 3 五级计算结果

由方程(1)得五阶图的截断本征方程为:

$$\sum_l \{ [E_l^\alpha, [E_l^\alpha, R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5]] + [E_l^\alpha, R_1][E_l^\alpha, R_1] + [E_l^\alpha, R_2][E_l^\alpha, R_2] + 2[E_l^\alpha, R_1][E_l^\alpha, R_2] + 2[E_l^\alpha, R_1][E_l^\alpha, R_3] + 2[E_l^\alpha, R_2][E_l^\alpha, R_3] \} - \frac{4}{g^4} \text{Tr}Up = \text{const} \quad (6)$$

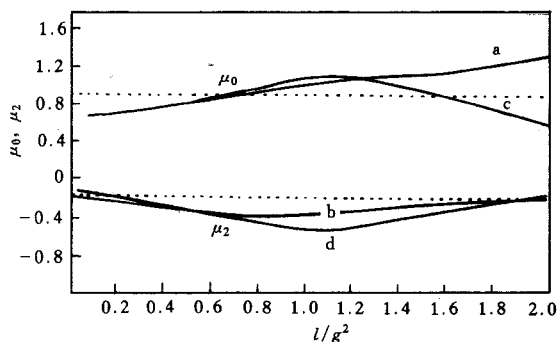


图 3

a, b: 四级真空波函数; c, d: 五级真空波函数.

把  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  代入方程(6)得到 388 个独立方程和  $\mu_0, \mu_2$  的表达式 (因篇幅太多、略), 解这 388 个方程可得到  $\mu_0$  和  $\mu_2$  的结果, 见图 3.  $1/g^2$  从 0.1 至 2.0 变化, 五阶图的  $\mu_0$  与四阶图的  $\mu_0$  有很大差别,  $\mu_2$  基本一致,  $1/g^2$  在接近 2.0 时, 四阶图的  $\mu_0$  呈上升趋势, 五阶图的  $\mu_0$  呈下降趋势, 这表明此方法的收敛性不能令人满意, 但  $1/g^2$  在 0.1~2.0 之间变化,  $\mu_0$  与  $\mu_2$  的平均值都与 Monte Carlo 的结果接近.

### 4 讨论

用截断本征方程的方法计算真空波函数, 只要利用么模条件合理选择图形, 就可得到  $\mu_0$  和  $\mu_2$  较好的标度行为, 但由于么模条件的存在, 使得选择图形具有很多可能性, 经过计算发现, 选择对称图形比非对称图形更好, 但目前没有找到一个更简捷的计算选择图形的办法, 因此计算高阶图形更加困难, 在五阶图的计算中我们还发现, 如果在推导过程中出现明显错误, 所得到的方程是无解的. 进一步的工作是计算出五阶图的胶球质量.

作者感谢中山大学陈启洲教授的有益讨论.

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Guo Shuohong, Chen Qizhou, Li Lei. Phys. Rev., 1994, **D49**(1):507—510
- [ 2 ] Chen Qizhou, Guo Shuohong, Zheng Weihong et al. Phys. Rev., 1994, **D50**(5):3564—3565
- [ 3 ] Hui Ping, Chen Qizhou. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese), 1995, **19**(9):820—825  
(惠萍, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1995, **19**(9): 820—825)
- [ 4 ] Hui Ping, Cai Pengfei, Chen Qizhou. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese) 1996, **20**(1):  
55—60  
(惠萍, 蔡鹏飞, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1996, **20**(1): 55—60)
- [ 6 ] Arisve H. Phys. Lett., 1992, **B280**:85

### Fifth Order Approximate Analytic Calculation of (2 + 1)-D SU(2) Vacuum Wavefunction

Hui Ping

(Department of Physics, Guangdong College of Education, Guangzhou 510303).

**Abstract** In this paper, the unimodular condition is used to choose the graphicses reasonably, fifth order graphicses are deduced from the first, second, third and fourth order graphicses. The fifth order results obtained are satisfactory.

**Key words** lattic gauge, analytic calculation, vacuum wavefunction