

节理岩体自适应有限元分析方法 及其工程应用

邓建辉* 熊文林** 葛修润*

* (中国科学院武汉岩土力学研究所 武汉 430071)

** (武汉水利电力大学水电系 武汉 430072)

提要 基于 Goodman 节理单元的应力精度分析, 本文提出了一种将节理视为内部应力边界的节理岩体自适应有限元分析方法, 并且使用四边形单元和网格再生法, 实现了承受压剪作用的单一裂纹试件和一边坡工程问题的网格加密型 (h 型) 自适应分析。

关键词 节理岩体, 自适应有限元, h 型自适应分析, 四边形网格, 网格再生法

1 引言

有限元法计算误差包括离散误差、模型误差、舍入误差等。自适应有限元法的任务就是在定量评价离散误差的基础上, 将误差信息反馈到网格参数中去, 通过网格的不断调控优化, 经济有效地获得给定的计算精度。自适应算法最初由 A. Brandt^[1]于 70 年代提出。Babuska^[2,3]和 Zienkiewicz、Zhu^[4]等人在误差估计方面卓有成效的工作有力地推进了该方法的发展。目前自适应有限元法已成功用于固体力学、流体力学、空气动力学等问题的自适应分析, 但在岩土力学中的应用才刚刚起步, 所解决的问题也限于连续介质力学问题。实际上, 由于断层、节理等的存在, 破坏了岩体的连续性, 如何利用自适应有限元的理论和方法解决这种非连续介质力学问题, 还是一个尚未开拓的新领域。本文基于 Goodman 节理单元的应力精度分析, 提出了一种将节理视为内部应力边界的节理岩体网格加密型 (h 型) 自适应有限元分析方法, 并且使用四边形单元和网格再生法实现了承受压剪作用的单一裂纹试件和某边坡工程问题的自适应分析。计算结果验证了该方法的适用性。

2 后验误差估计方法与自适应策略

2.1 后验误差估计方法

对于线弹性力学问题, 其基本方程及边界条件可用如下公式表征。

$$Lu + f = S^T D S u + f = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (1)$$

1994 年 10 月 13 日收到初稿, 1994 年 12 月 13 日收到修改稿。

$$n^T \sigma = \bar{T} \quad \text{在 } S\sigma \text{ 上} \quad (2)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{在 } Su \text{ 上} \quad (3)$$

式中 S 为应变导数矩阵； D 为弹性系数矩阵； f 为体积力矢量； L 为算子矩阵， $L = S^T D S$ ； n 为 S_s 的外法线方向余弦矢量； \bar{u} 和 \bar{T} 为位移约束值和边界分布力值。

上述方程的应力理论解 σ 和有限元解 $\hat{\sigma}$ 可表示为：

$$\sigma = D S u \quad \hat{\sigma} = D S \hat{u} \quad (4)$$

式中 \hat{u} 为位移有限元解。

定义位移和应力局部误差

$$e_u = u - \hat{u} \quad e_\sigma = \sigma - \hat{\sigma} \quad (5)$$

能量范数误差定义为

$$\|e\| = \left[\int_n e_\sigma^T L e_\sigma d\Omega \right]^{1/2} = \left[\int_n e_\sigma^T D^{-1} e_\sigma d\Omega \right]^{1/2} \quad (6)$$

误差也可用等价的 L_2 范数定义

$$\|e\|_{L_2} = \left[\int_n e_\sigma^T e_\sigma d\Omega \right]^{1/2} \quad (7)$$

除了简单的问题外，理论应力 σ 一般无法精确解出，使用应力改进值 σ^* 近似计算范数误差：

$$\|e^*\| = \left[\int_n (\sigma^* - \hat{\sigma})^T D^{-1} (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{1/2} \quad (8)$$

$$\|e^*\|_{L_2} = \left[\int_n (\sigma^* - \hat{\sigma})^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{1/2} \quad (9)$$

相对误差定义为：

$$\eta = \frac{\|e^*\|}{\left[\|\sigma\|^2 + \|e^*\|^2 \right]^{1/2}} \quad (10)$$

式(6)至式(10)的误差定义中，若积分域为整个离散域，那么计算出的误差为离散系统的误差；若积分域为单个单元，那么计算出的误差为单元误差。

Zienkiewica-Zhu^[4]基于如下物理直觉，提出了误差估计方法：对于一般的 C_0 阶位移有限元逼近，应力解在区域内是不连续的。若通过应力光滑，使应力在区域内具有与位移相同的连续性，那么光滑后的应力值 σ^* 比应力解精度高。

设改进后的应力 σ^* 可用与位移相同的形函数表示，即：

$$\sigma^* = N \bar{\sigma}^* \quad (11)$$

式中 N ， $\bar{\sigma}^*$ 分别为插值形函数矩阵和改进的节点应力矢量。

使用最小二乘法建立如下方程，即可求出结点应力改进值。

$$\int_n N^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega = 0 \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}^* = A^{-1} \int_n N^T \hat{\sigma} d\Omega \quad (13)$$

$$A = \int_n N^T N d\Omega$$

Zienkiewicz-Zhu 公式的正确性已由 Ainsworth^[5]等人给出理论证明。数值试验证明这

种误差估计方法对弹性力学问题十分有效，但是其改进应力仍然不能满足应力边界条件。若能使改进应力满足应力边界条件，那么误差估计的精度将提高^[6,7]。限于篇幅，这里仅列出边界应力计算公式。

$$[G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda \delta_{i,j} u_{k,k}] n_j = T_i \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \tag{15}$$

式中 G, λ 为拉梅常数； $\delta_{i,j}$ 为 Kronecker delta, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$; T_i 为边界应力分量； ξ_j, x_k 为局部和整体坐标。

平面应力问题式(14), 式(15)共四个未知量, 四个方程；空间问题九个未知量, 九个方程, 因此 $u_{i,j}$ 可唯一解出。代入弹性力学基本方程, 即可求出应力改进值 σ_{ij} 。

2.2 自适应策略

设 η_0 为自适应分析目标(η_0 取值根据问题而定, 一般 5~10%), 若系统的离散误差满足条件

$$\eta \leq \eta_0 \tag{16}$$

那么自适应分析结束；若 $\eta > \eta_0$, 那么网格需要进一步加密。需要加密的单元由单元加密指数 ξ_i 确定。

$$\xi_i = \eta_i / \eta_0 \tag{17}$$

η 为单元 i 的相对误差。

若 $\xi_i > 1$, 单元需要加密；若 $\xi_i < 1$, 单元尺寸可适当放大。自适应分析要求每个单元的精度或误差相等, 因此下一次自适应分析单元 i 的允许误差

$$\|e\|_{\text{允许}} = \eta_0 \left[\frac{\|e^*\|^2 + \|\hat{\sigma}\|^2}{NE} \right]^{1/2} \tag{18}$$

$$\text{式中 } \|e^*\|^2 = \sum_{i=1}^{NE} \|e^*\|^2_i$$

$$\|\hat{\sigma}\|^2 = \sum_{i=1}^{NE} \|\hat{\sigma}\|^2_i$$

NE 为系统中单元总数。

根据有限元理论

$$\|e\| \propto h^{\min(P, \lambda)} \tag{19}$$

式中 h 为单元尺寸； P 为插值形函数完全多项式阶数； λ 为待解问题的奇异性指数, $\lambda = 0.50 \sim 0.711$ ^[10]。

若问题不存在奇异性, 那么下次自适应分析的单元尺寸

$$h = \xi_i^{-1/P} h_i \tag{20}$$

若问题存在奇异性, 那么异点附近的单元尺寸

$$h = \xi_i^{-1/\lambda} h_i \tag{21}$$

为计算方便 λ 可取值 0.5。

3 Goodman 元应力精度分析与节理岩体自适应有限元分析方法

3.1 Goodman 单元应力精度分析

Goodman^[8]单元以节理上下两边的相对位移作为节理面应力计算的基础。对于图1所示的四节点节理单元,其应力计算公式

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = [\lambda][M]\{\delta^e\} \quad (22)$$

式中

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} K_t & 0 \\ 0 & K_n \end{pmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & -\frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & -\frac{1}{2}(1+\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) \end{bmatrix}$$

$$\{\delta^e\} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\}^T$$

K_n, K_t 分别为节理的法向和切向刚度系数;
 ξ 为局部坐标, $\xi = 2x/l, -1 \leq \xi \leq 1$ 。

根据式(22), Goodman 单元的应力是位移的线性函数,即节理单元的应力有限元解与位移有限元解具有相等的精度。由式(4)知,实体单元应力有限元解比位移有限元解精度低一阶。由此可得出结论:节理单元应力解精度比实体单元应力解精度高一阶。

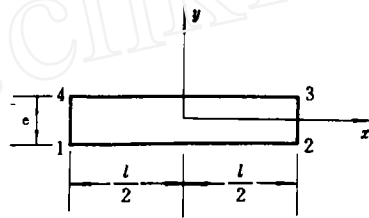


图1 Goodman 节理单元

Fig.1 Goodman joint element

3.2 节理岩体自适应有限元分析方法

根据上述分析,本文建议如下节理岩体自适应有限元分析方法。

- (1) 假定节理单元的应力改进解与应力有限元解精度相当;
- (2) 将节理视为内部应力边界;
- (3) 实体单元作为连续介质进行自适应分析。

节理单元的应力精度假定(1)是相对实体单元的应力精度而言的,并不意味着节理单元的应力解精度与理论解精度相当。根据假定(1),节理单元的误差为零。节理单元的加密取决于节理上下两边实体单元加密所提出的网格协调要求。由于节理单元的应力精度较

高,可以利用节理构成的内部应力边界上的应力改善节理上下两边的节点应力精度。对于平面问题,将式(14),式(15)展开所得出的方程组可写为

$$[A]\{u'\} = \{F\} \tag{23}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} n_2 & -n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 & -n_1 \\ n_1^2 D_0 + n_2^2 D_0 \mu & 2n_1 n_2 G & 2n_1 n_2 G & n_1^2 D_0 \mu + n_2^2 D_0 \\ n_1 n_2 D_0 (1 - \mu) & (n_2^2 - n_1^2) G & (n_2^2 - n_1^2) G & -n_1 n_2 D_0 (1 - \mu) \end{bmatrix}$$

$$\{u'\} = \{u, u_x, v, v_x\}^T$$

$$\{F\} = \left\{ \frac{u_2 - u_1}{L}, \frac{v_2 - v_1}{L}, \sigma_n, \tau, \right\}^T$$

u_1, u_2, v_1, v_2, L 分别为内部应力边界上任一相邻两点的位移和距离; n_1, n_2 为内部应力边界的外法线方向余弦。

$$D_0 = E / (1 - \mu^2)$$

平面应变问题,使用置换公式

$$E \rightarrow E / (1 - \mu^2) \quad \mu \rightarrow \mu / (1 - \mu)$$

4 自适应实现

4.1 自适应实现

本文使用网格再生法和四边形单元实现节理岩体的 h 型(网格加密型)自适应分析。自适应分格步骤如下:

- (1) 准备初始背景网格和背景网格参数(即单元尺寸);
- (2) 在区域内自动生成四边形网格,并进行有限元计算;
- (3) 估计有限元的计算精度
达到精度, Goto (5)
未达到精度, Goto (4);
- (4) 以本次计算网格作为背景网格,并且利用式(20)、(21)重新计算背景网格参数,
Goto 4.1.2;
- (5) 自适应分析结束。

背景网格是一套三角形网格,在网格生成过程中的作用是插值计算区域内任意一点的相邻单元尺寸,因此(4)中用计算网格作背景网格需要删除节理单元,并且根据最大内角原则将每个四边形单元剖分为两个三角形单元。有关节理岩体网格全自动生成问题详见文献[7,9],此处从略。

4.2 算例 压剪作用下的单一裂纹试件

图 2a 所示的方形裂纹试件,尺寸 $20 \times 20\text{cm}$,裂纹长度 6cm ,与水平方向夹角 30° 。试件上下两端承受 0.1MPa 的分布压力。计算参数,岩块 $E = 150\text{MPa}$, $\mu = 0.23$; 裂纹 $K_n = 0.25\text{KPa/cm}$, $K_s = 0.1\text{MPa/cm}$ 。平面应力问题,不计岩块自重。自适应分析的目标是取

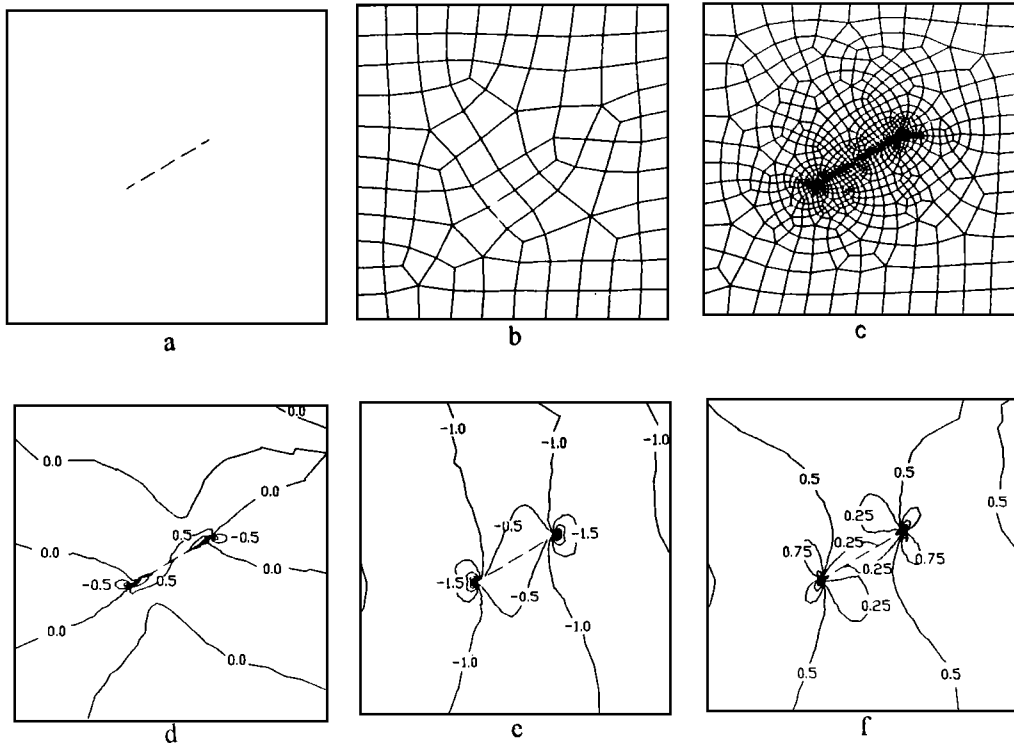


图 2 单一裂纹试件的自适应分析
 Fig. 2 Adaptive analysis of a block with a single joint

得 5% 的相对精度。

图 2b 为初始分析网格，相对误差(能量范数) $\eta = 17.39\%$ ；经过三次自适应分析生成的网格如图 2c 所示， $\eta = 4.59\%$ ，收敛于给定精度。图 2d, e, f 给出了主应力和最大剪应力等值线图。裂纹尖端存在较大的拉应力，拉应力以 X 向为主。

图 3 给出了 σ_x 拉应力等值线图及其局部放大结果。根据岩块抗拉强度低于抗压强度的特性，裂纹扩展方向应该与垂直方向基本一致。这一结论与文献[11]中扫描电镜观察结果是吻合的。

5 工程应用

图 4 为某船闸边坡剖面图。计算范围 X 向 100 米，Y 向 351 米。边坡由强风化层(A)，弱风化层(B)，花岗岩(C)，捕虏体(D)和断层(E)等五种材料构成，材料的物理力学参数如表 1 所示。除自重应力外，边坡右侧还承受梯形分布的构造应力作用， $P_L = 4.3867\text{MPa}$ ， $P_T = 8.0926\text{MPa}$ 。按平面应变问题计算，误差估计使用 L_2 范数，自适应分析的目标是取得 5% 的相对精度。图 5 为第二次自适应分析生成的网格， $\eta = 4.29\%$ ，收敛于给定精度。图 6 给出了本算例的主应力和最大剪应力等值线图。

表 1 物理力学参数
Table 1 rock Parameters

代号	材料	容重(MN/M ³)	E (MPa)	μ	K_n (MN/M ²)	K_s (MN/M ²)
A	强风化层	0.0265	1000.0	0.30	—	—
B	弱风化层	0.0268	15000.0	0.24	—	—
C	花岗岩	0.027	40000.0	0.22	—	—
D	捕虏体	0.0268	15000.0	0.24	—	—
E	断层	—	—	—	75.0	30.0

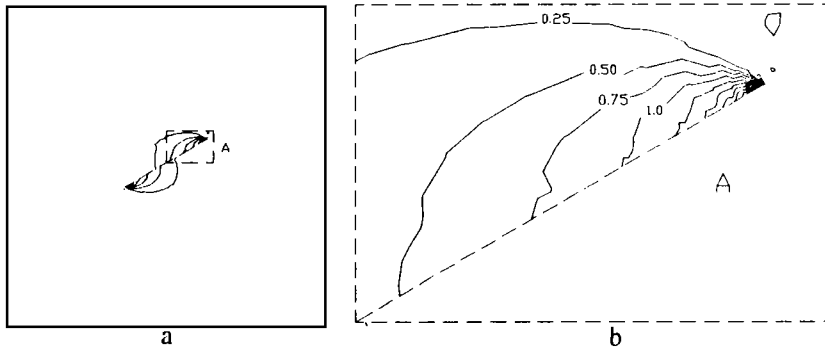


图 3 裂纹尖端拉应力分布
Fig. 3 Contour of tensile stress at the tip of joint

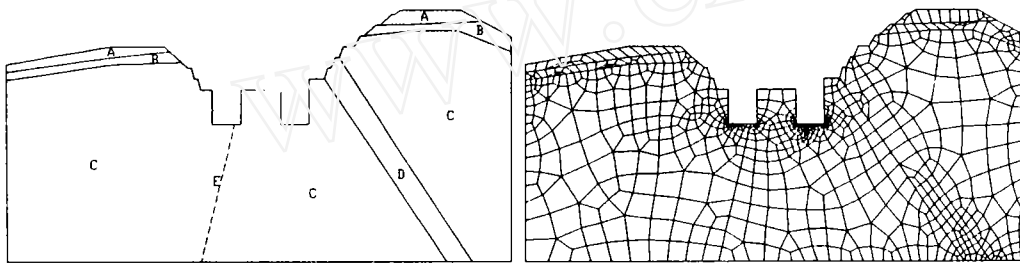


图 4 某船闸边坡剖面图
Fig. 4 Profile of a shiplock slope

图 5 第二次自适应分析网格
Fig. 5 Mesh of the second finite element analysis

6 结语

本文建议了一种基于 Goodman 单元的节理岩体网格加密型自适应有限元分析方法,其理论基础是 Goodman 单元的应力精度比实体单元的应力精度高一阶。该方法结合使用了 Zienkiewicz-Zhu 后验误差估计方法和边界应力求解公式确定实体单元的加密量,实体单元加密提出的网格协调要求又反过来加密节理单元,通过这种反复的迭代(自适应)过程

逐步探知计算解同精确解的偏离程度。从两个计算例题来看, 网格的疏密基本上反映了区域内的应力梯度大小, 证明本文建议的方法是合理的。

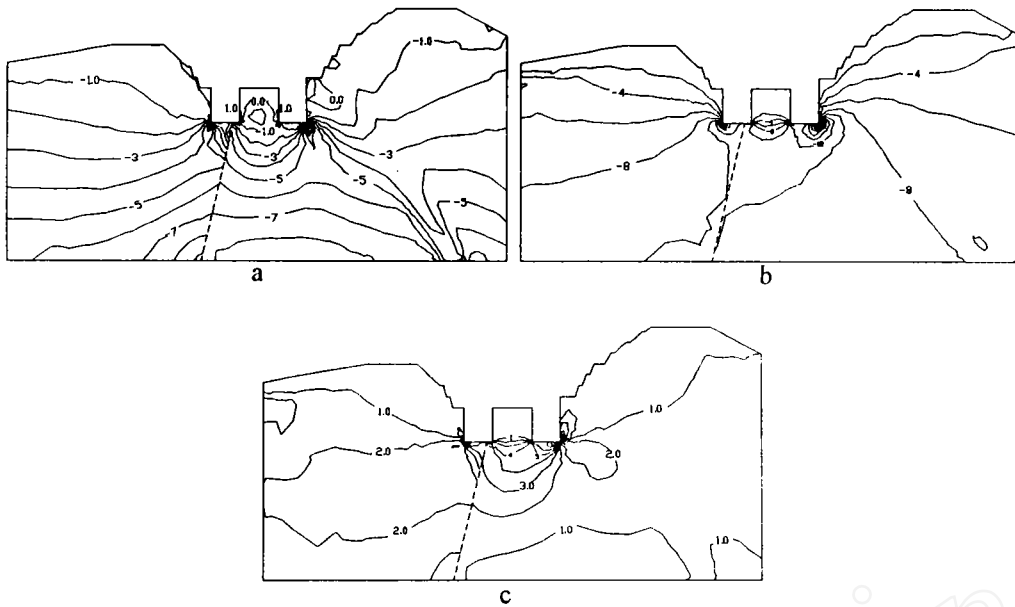


图6 边坡应力等值线图

Fig. 6 Stress contour of the slope

从另一个角度讲, 任何有限元计算都有一个重点分析区域, 在该区域内希望计算精度高一些, 非重点区域只要求达到一般精度。从这种意义上说图5所示的网格右下部和风化层精度偏高。一种兼顾计算量与计算精度的可行方案可使用分区精度法, 即将计算区域划分为若干子域, 每一子域满足不同的精度要求。

参 考 文 献

- 1 《力学词典》编辑部, 力学词典, 中国大百科全书出版社, 1990
- 2 Babuska I. and Rheinboldt W. C. : A-posteriori error estimates for the finite element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.* , 1978; 12: 1597-1615
- 3 Babuska I. and Rheinboldt W. C. : Adaptive approaches and reliability estimates in finite element analysis. *Comp. Meth. App. Eng.* , 1979; 17/18: 519-540
- 4 Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z. : A simple error estimator and adaptive procedures for practical engineering analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.* , 1987; 24: 337-357
- 5 Ainsworth M. , Zhu J. Z. , Craig A. W. and Zienkiewicz O. C. : Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a-posteriori error estimator in the finite element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.* , 1989; 28: 2161-2174
- 6 邓建辉, 郑宏, 熊文林, 葛修润: 边界应力求解技术及其在自适应有限元分析中的应用, 中国青年学者岩土工程力学

- 与应用讨论会论文集. 武汉测绘科技大学出版社, 1994;12
- 7 邓建辉: 节理岩体自适应有限元分析一方法与实现. 武汉水利电力大学博士学位论文, 1994
- 8 Goodman R. E., Taylor R. L., Brekke T.: A model for the mechanics of jointed rock. Proc. ASCE, SM3, 1968; 94
- 9 邓建辉, 熊文林, 葛修润: 复杂区域自适应三角形网格全自动生成方法. 岩土力学, 1994; 15(2)
- 10 Szabo B. A.: Estimation and control of error based on P-convergence, Chapter 3 in *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*. John Wiley and Sons, 1986; 61-73
- 11 赵永红, 黄杰藩, 王仁: 岩石微破裂发育的扫描电镜即时观测研究. 岩石力学与工程学报, 1992; 11(3): 284-294

ADAPTIVE FINITE ELEMENT ANALYSIS METHOD OF JOINTED ROCKS AND ITS APPLICATION IN ENGINEERING

Deng Jianhui* Xiong Wenlin** Ge Xiurun*

* (Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071)

** (Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, Wuhan 430072)

Abstract A method for the h-adaptive finite element analysis of jointed rocks is suggested in this paper, which is based on the precision analysis of the stress of Goodman joint element model and takes the joint as an interior stress boundary. A rock block with a single joint and subjected to compress and shear load, and an engineering slope are analyzed successfully, using the suggested method, quadrilateral element and mesh regeneration.

Key words: jointed rock, adaptive finite element, h-adaptivity, quadrilateral element, mesh regeneration