

非均匀分布纵向耦合束不稳定性的研究

王兰法 张 闯 王书鸿 国智元

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

摘要 利用 Vlasov 方程研究了非均匀分布情形下的纵向多束团不稳定性. 当束团均匀分布时, 由该方法所得到的结果与 ZAP 程序给出的结果一致; 对于非均匀分布的情形, 由该分析解得到的结果与模拟跟踪方法所得到的结果接近.

关键词 耦合束不稳定性 Vlasov 方程 非均匀分布

1 引言

曾有许多文章研究了单一束团或均匀分布多束团情形下的相干不稳定性^[1-3], 但是, 大多数加速器特别是同步辐射加速器都运行于非均匀分布的模式. 在同步辐射方案中, 在长束团串之后留有足够距离的间隔, 以减小离子俘获效应. 许多对撞机由于采用束团串对撞(如 CESR)或其它原因(如 BEPC 的多束团改进提高方案 BEPCII^[4]), 束团沿环不均匀分布. 因此研究一般情形下的多束团不稳定性, 有着非常重要的意义.

2 纵向运动方程

在束流激发的电磁场作用下, 线性同步振荡方程为

$$\ddot{\tau} + \omega_{s0}^2 \tau = \frac{\alpha}{P_0} \frac{dP_{//}}{dt} = F = \frac{\alpha}{P_0} e[\mathbf{E}_{//}(t, \theta) + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})_{//}(t, \theta)], \quad (1)$$

上式右边为束团受到束流激发的电磁场的纵向作用力, τ 为相对于同步粒子的纵向位移, ω_{s0} 是不考虑尾场时同步粒子的纵向振荡频率, α 为动量压缩因子, P_0 为同步粒子的能量, 下标“//”指纵向分量. 为了得到该作用力, 需求解带边界条件的麦克斯韦方程. 当知道束流的环境(从而元件的阻抗)时, 只需知道电荷在空间和时间的分布, 就可通过阻抗得到束团所受的作用力

$$2\pi R(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})_{//}(t, \theta) = - \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{//}(\omega) I(\omega, \theta) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2)$$

其中 $Z_{//}(\omega)$ 是纵向阻抗, $I(\omega, \theta)$ 是束流纵向频谱. 纵向阻抗中对多束团影响较大的是高频腔的窄带阻抗. 宽带阻抗由于作用距离短, 不引起多束团之间的耦合.

3 纵向束流频谱

考虑一个带单位电荷的作纵向同步振荡的粒子,其纵向电流信号为:

$$I(t, \theta) = e \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta\left(t - kT - \tau \cos(\omega_{s0} kT + \varphi_0) - \frac{\theta}{\omega_0}\right), \quad (3)$$

这里 θ 为纵向 pick up 在环上的位置, T 为回旋周期, τ 为纵向振荡幅度, ω_0 为回旋频率, φ_0 为初始相位.

设粒子在某束团的归一化相空间有分布 $\psi(\varphi_0, \hat{\tau}, t)$, 其中 $\int \psi dV = 0$. 分布函数可以写成一个稳态分布加上一个扰动

$$\begin{aligned} \psi(\varphi_0, \hat{\tau}, t) &= g_0(\hat{\tau}) + \Delta\psi, \\ \Delta\psi &= \sum_m g_m(\hat{\tau}) e^{-jm\varphi_0} e^{j(\omega_c - m\omega_{s0})t} \quad (m = 1, \dots). \end{aligned} \quad (4)$$

将上面单一粒子的束流信号在整个相空间对分布函数积分,就可得到整个束团的信号

$$I_{//}(t, \theta) = N \int_{\varphi_0=0}^{\varphi_0=2\pi} \int_{\hat{\tau}=0}^{\hat{\tau}=\infty} \psi(\varphi_0, \hat{\tau}, t) I(t, \theta) \hat{\tau} d\hat{\tau} d\varphi_0, \quad (5)$$

整个束团的纵向频谱可由 $I_{//}(\omega, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} I_{//}(t, \theta) e^{-j\omega t} dt$ 得到.

当环上有 M 个束团分布时, 设第 n 个束团在环上的初位置为 θ_n , 并设 $\theta_1 = 0$, 则第 n 个束团中的单粒子纵向电流信号为

$$I_n(t, \theta) = e \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta\left(t - kT - \hat{\tau} \cos(\omega_{s0} kT + \phi_0) - \frac{\theta}{\omega_0} - \frac{\theta_n}{\omega_0}\right). \quad (6)$$

束团之间的相对运动可用 M 个相干模 $\mu = 0, 1, \dots, M-1$ 来表示:

$$\tau_n = \tau_k \exp\left(j2\pi \frac{\mu(n-k)}{M}\right),$$

于是第 n 个束团的相空间分布为

$$\begin{aligned} \psi_n(\varphi_0, \hat{\tau}, t) &= g_0(\hat{\tau}) + \Delta\psi_n, \\ \Delta\psi_n &= \sum_m g_m(\hat{\tau}) e^{-jm\varphi_0} e^{j(\omega_c - m\omega_{s0})t} e^{j2\pi \frac{\mu(n-1)}{M}} \quad (m \neq 0, \mu = 0, 1, \dots, M-1). \end{aligned} \quad (8)$$

由式(5), (8)就可得到每个束团的信号与频谱, 束团受到的电磁场作用就可通过阻抗由式(2)得到.

4 稳定分布的影响

首先看稳定分布对束团的影响. 当环中只有一个束团且处于稳态分布时, 利用式(1)–(3), (5)可得束团受到的尾场作用力为:

$$F = \frac{2\pi I \omega_{s0}^2}{\omega_0 V_0 h \cos\phi_{s0}} \sum_p Z_{//}(p\omega_0) \sigma_0(p) e^{jp\omega_0 \tau} =$$

$$\frac{2\pi I \omega_{s0}^2}{\omega_0 V_0 h \cos \phi_{s0}} \sum_p Z_{//} (p \omega_0) \sigma_0(p) \left\{ 1 + j p \omega_0 \tau - \frac{p^2 \omega_0^2 \tau^2}{2} + \dots \right\}, \quad (9)$$

这里

$$\omega_{s0}^2 = \frac{-\alpha \omega_0 V_0 h \cos \phi_s}{TE_0}, \quad (10)$$

$$\sigma_0(p) = \int_0^\infty J_0(p \omega_0 \hat{\tau}) g_0(\hat{\tau}) \hat{\tau} d\hat{\tau}, \quad (11)$$

其中,括号中第一项引起同步相移

$$\Delta \phi_s = h \omega_0 \Delta \tau = \frac{2\pi I}{V_0 \cos \phi_{s0}} \sum_p \operatorname{Re}(Z_{//}(p \omega_0)) \sigma_0(p); \quad (12)$$

第二项给出了势井扰动引起的非相干频移

$$\omega_s^2 = \omega_{s0}^2 \left(1 - \frac{2\pi I}{V_0 h \cos \phi_s} \sum_p j Z_{//}(p \omega_0) p \sigma_0(p) \right); \quad (13)$$

括号中第三项是非线性项,引起频散.在以后讨论扰动的影响时,将束团的振荡频率由 ω_{s0} 改为 ω_s ,同步相位由改 ϕ_{s0} 为 ϕ_s .

5 扰动的影响

当环上有 M 个束团分布时,只考虑分布扰动的影响,利用式(1),(2),(6),(8),(10)可得到第 n 个束团对第一个束团的作用力

$$F_{n1} = \frac{2\pi \omega_s^2}{\omega_0 V_0 h \cos \phi_s} e^{j\omega_c t} \sum_p Z_{//}(\omega_p) e^{j p \omega_0 \tau} \sum_m \sigma_m(p) a_{\mu m}(p), \quad (14)$$

这里,

$$\omega_p = p \omega_0 + \omega_c, \quad (15)$$

$$\sigma_m(p) = j^{-m} \int_0^\infty J_m(p \omega_0 \hat{\tau}) g_m(\hat{\tau}) \hat{\tau} d\hat{\tau}, \quad (16)$$

$$a_{\mu m}(p) = I_n \exp\left(j\left(-p\theta_n + 2\pi \frac{n-1}{M} \mu\right)\right). \quad (17)$$

第一个束团受到的所有束团的作用力为

$$F_{\text{total}} = \sum_{i=1}^M F_{i1} = \frac{2\pi \omega_s^2}{\omega_0 V h \cos \phi_s} e^{j\omega_c t} \sum_p Z_{//}(\omega_p) e^{j p \omega_0 \tau} \sum_m \sigma_m(p) a_\mu(p), \quad (18)$$

这里 $a_\mu(p) = \sum_{k=1}^M a_{\mu k}(p)$.

对第一个束团,其分布满足 Vlasov 方程 $\frac{d\psi}{dt} = 0$,

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial g_0}{\partial \tau} + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \tau} \right) \frac{d\hat{\tau}}{dt} + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \phi_0} \frac{d\phi_0}{dt} \quad (19)$$

略去高阶项,得一次近似

$$j e^{j\omega_c t} \sum_m (\omega_c - m \omega_s) g_m(\hat{\tau}) e^{-j m \varphi} = - \frac{\partial g_0}{\partial \tau} \frac{d\hat{\tau}}{dt}, \quad (20)$$

这里 $\varphi = \omega_s t + \phi_0$.

由粒子的纵向运动方程得:

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\tau^2 + \frac{\dot{\tau}^2}{\omega_s^2} \right)^{1/2} = - \frac{F_{\text{total}}}{\omega_s} \sin\varphi. \quad (21)$$

将式(21),(18)代入式(20)得:

$$\hat{\tau} \frac{\partial g_0}{\partial \hat{\tau}} \frac{d\hat{\tau}}{dt} = - \frac{2\pi\omega_s e^{i\omega_c t}}{\omega_0^2 V h \cos\phi_s} \frac{\partial g_0}{\partial \hat{\tau}} \sum_{p,\tau} \frac{Z_{//}(\omega_p)}{p} j^r e^{-i r \varphi} J_r(p\omega_0 \hat{\tau}) \sum_k \sigma_k(p) a_\mu(p). \quad (22)$$

从平均效果讲,上式右边 g_m 项是 $r=m$ 项扰动的贡献,整理后

$$j(\omega_c - m\omega_s) j^{-m} \hat{\tau} g_m = \frac{2\pi m \omega_s}{\omega_0^2 V h \cos\phi_s} \frac{\partial g_0}{\partial \hat{\tau}} \sum_p \frac{Z_{//}(\omega_p)}{p} J_m(p\omega_0 \hat{\tau}) \sigma(p), \quad (23)$$

这里 $\sigma(p) = \sum_m \sigma_m(p)$. 理论上讲,因为分布有两个自由度 $\hat{\tau}$ 和 φ ,因此,扰动也应用两个模数 m 和 g 来表示. 式(23)仅考虑了单一模 m ,没有考虑模之间的耦合. 式(23)两边同乘 $\frac{1}{j^{-m} \hat{\tau} g_m}$,并对 τ 积分

$$j(\omega_c - m\omega_s) = \frac{2\pi m \omega_s}{\omega_0^2 V h \cos\phi_s} \frac{\sum_p \frac{Z_{//}(\omega_p)}{p} \sigma_m^2 a_\mu(p)}{\int_0^\infty \frac{g_m^2(\hat{\tau}) \hat{\tau} d\hat{\tau}}{\frac{1}{\hat{\tau}} \frac{\partial g_0}{\partial \hat{\tau}}}}, \quad (24)$$

这是一般情形下的纵向多束团相干频移. 如知道稳态分布 g_0 可求出扰动 g_m 对面相干频移.

参考文献[1]的推导,式(24)相干频移为

$$\Delta\omega_{//,m}^{\mu} = j \frac{m\omega_s}{m+1} \frac{1}{3B_0^3 V h \cos\phi_s} \frac{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{//}(\omega_p)}{\omega_p / \omega_0} h_m(\omega_p) a_\mu(p)}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} h_m(\omega_p)}, \quad (25)$$

这里 $\omega_p = p\omega_0 + m\omega_s$, $B_0 = \frac{\omega_0 L}{2\pi}$, L 为束长, $m=1,2,\dots$, h_m 与束流形状有关,对抛物束

$$h_m(\omega) = (m+1)^2 \frac{1 + (-1)^m \cos\left(\omega \frac{L}{\beta c}\right)}{\left(\frac{\omega L}{\beta c}\right)^2 - (m+1)^2}, \quad (26)$$

这里 $L = 2\sqrt{\pi}\sigma_l$, 对于高斯束

$$h_m(\omega) = \left(\frac{\omega\sigma_l}{\beta c}\right)^{2m} \exp\left[-\left(\frac{\omega\sigma_l}{\beta c}\right)^2\right], \quad (27)$$

这时 $L = 2\sqrt{2}\sigma_l$. 上面两式的实部给出束团的相干频移,虚部给出不稳定性增长率.

6 与 ZAP 程序^[5]的比较

当束团均匀分布时,式(25)就与文献[1,5]的相同(束团均匀分布)

$$\Delta\omega_{//,m}^{\mu} = j \frac{m\omega_s}{m+1} \frac{I}{3B_0^3 V h \cos\phi_s} \frac{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{//}(\omega_p)}{\omega_p/\omega_0} h_m(\omega_p)}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} h_m(\omega_p)}, \quad (28)$$

式中 $\omega_p = (pM + \mu)\omega_0 + m\omega_s$, 表明一般性结论是可以退化到均匀分布的情形的, 有力地证明了式(25)的普适性

7 分析解与模拟跟踪的比较

表 1 给出了 4 种非均匀分布情形下, 由 SCBI 程序^[6]得到的模拟结果与分析解的比较. 比较两种方法所得到的结果, 可看出两种方法所得结果相当接近.

表 1 模拟解与分析解的比较

非均匀分布情形	$\tau_{\text{模拟跟踪}}/s$	$\tau_{\text{分析}}/s$	非均匀分布情形	$\tau_{\text{模拟跟踪}}/s$	$\tau_{\text{分析}}/s$
1	5.0×10^{-3}	3.8×10^{-3}	3	4.8×10^{-3}	3.7×10^{-3}
2	4.4×10^{-3}	3.9×10^{-3}	4	4.4×10^{-3}	4.1×10^{-3}

表 2 是 BEPC 环上高频腔的高次模参数. 对于 BEPC II, 每束有 6 个束团, 单束流强为 25.25mA, 高频谐波数为 160, 因此 6 个束团在环上不均匀分布, 束团之间的间隔依次为 27, 27, 27, 27, 26, 26 个高频波长. 由上面的公式给出对撞模式的纵向多束团不稳定性增长时间为 $\tau_{//} = 3.38 \times 10^{-4}$ (s). 由模拟跟踪的方法得到的增长时间为 $\tau_{//} = 6.81 \times 10^{-4}$ (s). 可见, 两种方法所得结果接近.

表 2 BEPC 腔和 SPS 腔高次模

f/MHz	$R/\text{M}\Omega$	Q	f/MHz	$R/\text{M}\Omega$	Q
259.80	9.780×10^{-3}	499	1006.38	3.477×10^{-2}	7243
427.12	4.894×10^{-3}	1288	306.00	6.624×10^{-1}	41400
479.20	6.113×10^{-3}	985	446.00	1.120×10^{-2}	1400
513.50	1.811×10^{-3}	168	540.00	3.780×10^{-2}	540
669.20	1.389×10^{-3}	817	599.00	1.008×10^{-1}	7200
680.50	6.496×10^{-3}	1015	799.00	1.430×10^{-2}	1100
809.20	4.914×10^{-3}	945	984.00	1.572×10^{-1}	26200

8 分析解与实验的比较

当束团均匀分布时, 可通过 $\omega_p = (pM + \mu)\omega_0 + m\omega_s$ 来判断某一边带对应的模式的不稳定性: 边带越强, 该模式对应的不稳定性也就越强. 当束流不均匀分布时, 需通过观测束流频谱的整体形状来判断不稳定性模式. 实验中, 通过频谱仪测得了束流频谱, 图 1 是由实验得到的纵向边带(信号强度大于零的为上边带, 小于零的为下边带). 计算表明, $m=1$ 的模式与实验观测到的频谱非常相似(如图 2 所示), 这表明束团之间存在着对应于 $m=1$ 的不稳定性, 我们的分析与实验是吻合的.

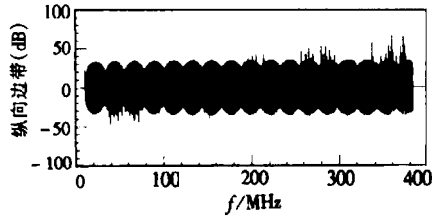


图 1 实验观测到的纵向边带频谱

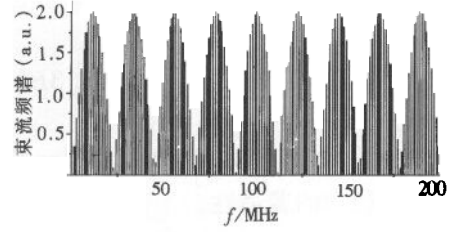


图 2 理论分析得到的频谱

9 结论

束团在环上分布的分布反映在束流谱的变化,对非均匀分布的情形,从 Vlasov 方程出发,得到了与均匀分布情形相似的表达式,当束团均匀分布时,由该方法得到的表达式与文献[5]的表达式一致. 由该方法得到的结果与模拟跟踪方法得到的结果接近,与实验结果也很好地吻合.

参考文献 (References)

- 1 Laclare J L. Bunch Beam Instabilities, Pro. Int. Conf. High Energy Accelerators, Geneva, 1980, 526—539
- 2 Laclare J L. Bunch Beam Coherent Instabilities, CERN 87-03, 1987, 1:264—326
- 3 Chao Alexander Wu. Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators. Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., 1992
- 4 WANG LanFa. BEPC Multibunch Collision and Coupled Bunch Instabilities. PH. D. thesis (in Chinese). IHEP, 1997 (王兰法. BEPC 多束团对撞与耦合束不稳定性. 博士论文. 中国科学院高能物理研究所, 1997)
- 5 Zisman M S, Chattopadhyay S, Bisognano J. ZAP Code. Lawrence Berkeley Laboratory, 1989
- 6 WANG LanFa, ZHANG Chuang, WANG ShuHong et al. HEP & NP (in Chinese), 1998, 22(12):1174 (王兰法, 张闯, 王书鸿等. 高能物理与核物理, 1998, 22(12):1174)

Study on Longitudinal Coupled Bunch Instability with Unequal Spaced Distribution

WANG LanFa ZHANG Chuang WANG ShuHong GUO ZhiYuan
(Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract The beam dynamics of longitudinal coupled bunch instability with unequal spaced bunches is studied by means of Vlasov equation method in this paper. Our formula will be the same as Samson's when bunches equally spaced and populated, and for the unequal spaced bunches, our calculation agrees well with experimental results of BEPC.

Key words coupled bunch instabilities, vlasov equation, unequal spaced distribution

Received 7 July 1999, Revised 8 October 1999