

# 岩石抗剪强度指标的概率分析

光耀华

(广西电力工业勘察设计院 南宁 530023)

**提要** 本文基于库仑准则讨论了岩石抗剪参数  $f$  与  $c$  的相关性, 并采用二维随机变量的联合分布推求该参数的可靠概率, 以与不同设计阶段的目标值进行比较, 评定岩石抗剪参数的可靠性。

**关键词** 岩石, 抗剪强度, 概率分布, 可靠性

## 1 前言

岩土工程设计中, 抗剪强度参数(摩擦系数  $f$  和凝聚力  $c$ ) 是核算建筑物抗滑稳定或用以确定地基承载力的重要指标, 该指标正确与否关系到工程的安全与经济性。 $f$ 、 $c$  值的选定, 过去是以室内或现场试验成果分别计算每组的试验值, 然后进行统计取其平均值, 有时参考类似工程经验作适当修正提供设计应用, 这里有两个问题, 一是  $f$ 、 $c$  值是库仑包络线上的两个参变数, 按线性关系用最小二乘法求得的直线角系数与截距是一个高度相关的随机变量, 不能分别进行统计, 而应当作联合分布按工程地质单元体综合统计; 二是指标的精度问题, 即参数的可靠性未与单元体的样本数量联系起来, 同时也未和置信概率联系起来, 使用参数的人也不知道在多大程度上可以相信这些参数。至于参照工程经验进行修正虽说是必要的但又带有一定的人为任意性, 缺乏科学的论证。在这种情况下, 岩土工程的定值法设计会给工程的安全带来多大的风险, 或者安全度过高但却不经济, 都不是十分明确的。因此, 传统的定值法设计需要改进。

岩体作为基础或工程材料都有较大的变异性, 这是由于岩体内部物质成份及结构构造在水平和垂直方向上都有明显的变化, 因此引起岩体工程参数的不确定性。岩石抗剪强度的不确定性除了来源于岩石性质的因素以外, 还由于勘探或取样数量不足以及测试过程中所带来的随机误差。因此, 必须把试验数据作为随机变量进行必要的误差处理, 这就需要应用概率理论和数理统计方法。以概率论为基础的极限状态设计方法, 要求提供工程荷载和抗力(强度)参数的特征值(均值、标准差、变异系数)及概率分布类型, 并根据不同设计阶段取不同的概率分位数计算“标准值”及“设计值”, 选定适当的功能函数并采用分项系数法进行设计。它所要达到的安全度就是寻求效益最大而费用最小与可接受的风险或破坏概率的权衡问题, 因此概率设计法比传统的定值设计法前进了一大步。本文基于概率理论研究岩石抗剪强度的概率取值问题, 为此, 必须研究  $f$ 、 $c$  的联合分布可靠性取值, 研究适宜的样本容量及与置信概率的关系, 并以工程实例说明之。

1993年9月29日收到初稿, 1993年12月8日收到修改稿。

## 2 抗剪参数 $f$ 、 $c$ 的相关性

岩石抗剪(断)试验是在不同的法向应力  $P_1, P_2, P_3, \dots$  作用下得到相应的剪应力值  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ 。如果每组试件用  $k$  个试样在  $k$  个不同垂直压力作用下剪切, 当一个工程地质单元体有  $n$  组试验, 则共有  $m = n \times k$  对  $P$ 、 $\tau$  数据。在一般应力水平下, 通常假定库仑强度包络线是一条直线, 抗剪试验成果可按线性回归方程进行整理, 计算包络线上的  $f$ 、 $c$  参变量, 即:

$$\tau_i = f p_i + c + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

式中,  $\tau_i$ —在  $P_i$  正应力下的剪应力值;  $p_i$ —第  $i$  试块正应力值;  $f$ —摩擦系数;  $c$ —凝聚力;  $\varepsilon_i$ —随机扰动量, 是相对于回归直线的误差值。采用最小二乘法求解线性回归参数  $f$ 、 $c$  值要求相对于回归直线  $\varepsilon_i$  的绝对值的平方和为最小。同时, 假定  $\varepsilon_i$  相对于回归直线服从正态分布。根据线性方程相加(减)时概型不变的原理,  $c$  及  $f$  的概率分布函数也应是正态分布。因此, 采用此种方法计算  $c$ 、 $f$  值可不再进行概型检验, 即认为  $f$ 、 $c$  的随机变量均服从正态分布。

经过线性回归方程运算后可得出如下各值:

(1) 回归方程标准差  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\tau_i - f P_i - c)^2}{m - 2}} \quad (2)$$

(2)  $\tau$  与  $P$  的相关系数  $\gamma_{\tau, P}$ :

$$\gamma_{\tau, P} = \frac{m \sum \tau_i P_i - \sum \tau_i \sum P_i}{\sqrt{[m \sum \tau_i^2 - (\sum \tau_i)^2] \cdot [m \sum P_i^2 - (\sum P_i)^2]}} \quad (3)$$

(3) 摩擦系数  $f$  及凝聚力  $c$  的均值:

$$\bar{f} = (m \sum \tau_i p_i - \sum \tau_i \sum P_i) / \Delta \quad (4)$$

$$\bar{c} = (\sum \tau_i \sum P_i^2 - \sum P_i \cdot \sum \tau_i P_i) / \Delta \quad (5)$$

式中,  $\Delta = m \sum P_i^2 - (\sum P_i)^2$ ;  $m$ —试件总数。

(4)  $f$  及  $c$  的标准差:

$$\sigma_f = \sigma \sqrt{(m/\Delta)} \quad (6)$$

$$\sigma_c = \sigma \sqrt{(\sum P_i^2)/\Delta} \quad (7)$$

(5)  $f$  与  $c$  的协方差  $CoV(f, c)$ :

$$CoV(f, c) = -\bar{P} \left( \frac{\sigma^2}{\Delta} \right) \quad (8)$$

式中,  $\bar{P}$ —正应力的均值。

(6)  $f$  与  $c$  的相关系数  $\gamma_{f,c}$ :

$$\gamma_{f,c} = \frac{CoV(f,c)}{\sigma_f \cdot \sigma_c} \quad (9)$$

显然,  $f$  与  $c$  是一对呈负相关的变量, 它与  $f$ 、 $c$  的协方差成正比, 而与它们各自的标准差成反比。从工程实践中也认识到, 往往是  $c$  值大而  $f$  值减小, 反之  $c$  值小, 而  $f$  会增大。 $\gamma_{f,c}$  就是用以衡量它们相关的密切程度。据统计资料, 坝基混凝土与岩石抗剪断试验  $f'$  与  $c'$  的相关系数一般都在 0.85 以上。

### 3 $f$ 、 $c$ 的联合分布及概率取值

对于一对相关的变量, 我们可以用二元随机变量的联合分布来拟合试验数据。前已述及,  $f$ 、 $c$  是一组抗剪试验数据经库仑方程整理出来的具有高度相关性的两个参数, 而它的数值都是在一定的区间  $[a, b]$  范围内, 因此用  $\beta$  分布进行拟合较为合适。 $\beta$  分布的概率密度函数为:

$$f_{u,v}(u,v) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 3)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\gamma + 1)} \cdot u^\alpha v^\beta (1 - u - v)^\gamma \quad (10)$$

$$(u, v \geq 0, \quad 0 \leq u + v \leq 1, \quad \alpha, \beta, \gamma > -1)$$

式中,  $u$  和  $v$  是相应于变量  $c$ 、 $f$  的无量纲参数, 即  $c$ 、 $f$  的标准化变量;  $\Gamma(\cdot)$  为  $\Gamma$  函数;  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  为尺度参数。其计算式为:

$$\alpha = (\beta + 1)(\bar{u}/\bar{v}) - 1 \quad (11)$$

$$\beta = -[uv^2/(\gamma_{u,v} \cdot \sigma_u \cdot \sigma_v)] - \bar{v} - 1 \quad (12)$$

$$\gamma = (\beta + 1)/\bar{v} - (\alpha + \beta + 3) \quad (13)$$

式中,

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \frac{\bar{C} - C_{\min}}{C_{\max} - C_{\min}}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2} \frac{\bar{f} - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\sigma_c^2}{4(C_{\max} - C_{\min})}}$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sigma_f^2}{4(f_{\max} - f_{\min})}}$$

式中,  $\bar{c}$ 、 $\bar{f}$  为  $c$ 、 $f$  指标的均值;  $C_{\max}$ 、 $C_{\min}$ 、 $f_{\max}$ 、 $f_{\min}$  分别为  $c$ 、 $f$  指标的上限和下限

值;  $\gamma_{u,v} = \gamma_{c,f}$  为  $c$  与  $f$  的相关系数。

在求得联合  $\beta$  分布的概率密度函数之后, 可利用累积联合分布计算某一置信水平的  $u_0$  和  $v_0$  的估值, 或在指定了估值  $u_0$  和  $v_0$  之后可计算随机变量  $u$  和  $v$  小于  $u_0$  和  $v_0$  的概率, 即:

$$F_{u,v}(u_0, v_0) = P[u \leq u_0, v \leq v_0]$$

其值定义为

$$F_{u,v}(u_0, v_0) = \int_{u_{\min}}^{u_0} \int_{v_{\min}}^{v_0} f_{u,v}(u, v) du dv \tag{14}$$

这是一个非常重要的公式, 累积联合分布可用于同步计算抗剪强度  $c$ 、 $f$  指标的可靠性取值。例如, 在一个工程地质单元体内有若干组现场抗剪断试验结果, 按最小二乘法进行综合统计, 得出  $c$ 、 $f$  的均值  $\bar{c}$ 、 $\bar{f}$  作为  $u_0$  和  $v_0$  的估值代入以上诸式计算, 求得累积联合分布  $F_{u,v}(u_0, v_0)$ , 它表示随机变量  $u$  和  $v$  小于  $u_0$  和  $v_0$  的概率, 称为超越概率或风险概率, 它以  $P_f$  表示, 定义可靠度  $p_r = 1 - P_f$ , 则:

$$p_r = 1 - F_{u,v}(u_0, v_0) \tag{15}$$

如果计算的可靠度  $p_r$  值太低, 达不到规定的目标值 ( $P_s$ ), 则可以降低  $c$  和  $f$  值, 例如将均值减去一定倍数的标准差得出“标准值”作为新的  $u_0$  和  $v_0$  的估值重复上述计算。计算结果如  $p_r > P_s$ , 则计算终止; 如  $p_r < P_s$ , 则可改变  $a$  取值重新计算。直到满足工程上按不同设计阶段对单项参数目标可靠度指标的要求, 此时的  $c$ 、 $f$  值即为所求, 它具有明确的概率含义。标准值按下式计算:

$$c_k = \bar{c} - k_p \cdot \sigma_c \tag{16}$$

$$f_k = \bar{f} - k_p \cdot \sigma_f \tag{17}$$

式中,  $k_p$ —与概率有关的系数, 如取显著性水平  $\alpha = 0.20$  分位数时, 则  $k_p = 0.842$ ; 如取  $\alpha = 0.15$ , 则  $k_p = 1.036$ 。

### 4 适宜的样本容量与置信概率

岩土工程实际抗剪强度的真值是难以确知的, 因为它们在各种因素影响下是随机变量, 我们只能在工程地质单元体中抽取样本进行试验, 根据样本信息推断总体。样本或称之为“试验组数”究竟多少比较合适, 目前尚无明确标准。样本愈多, 指标精度愈高是显而易见的, 但试验费用大, 耗时长。样本少, 数据可靠性差, 可能会影响到工程的安全。因此, 要研究一定精度要求下的最小样本容量。从数理统计角度看, 30 组以上称为大子样, 才具有统计意义。这对岩土工程来说往往难于满足要求, 特别是现场岩石抗剪断试验耗资大、时间长。但是, 样本容量与岩体变异性、置信水平和精度要求有关, 可用下式确定最小样本容量  $N$ :

$$N \geq (\delta_x \cdot t_a / \rho)^2 \tag{18}$$

式中,  $\delta_x$ —岩体单元抗剪强度的变异系数, 反映岩体非均质特性和随机误差;  $t_a$ —可信指标, 根据置信水平  $\alpha$  查表得出;  $\rho$ —精度指标 (相对偏差率),  $\alpha$  与  $\rho$  是根据设计阶段、工程

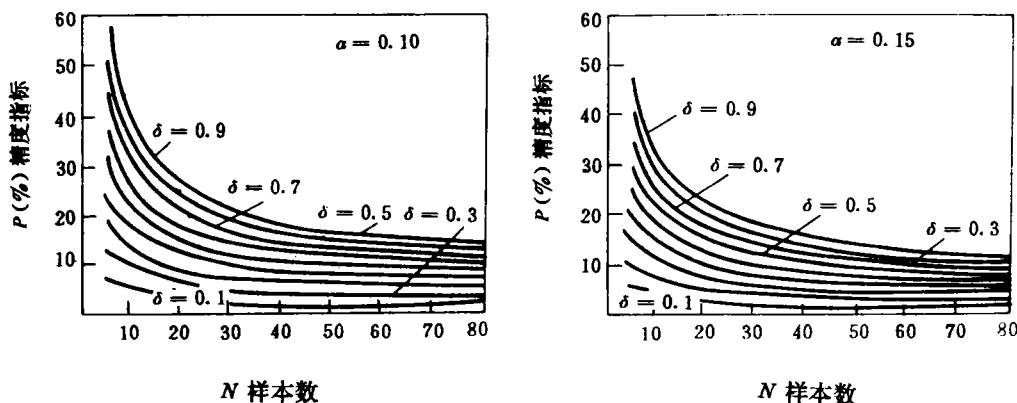


图 1 样本容量与精度指标的关系

Fig. 1 The relation between content of samples and index of accuracy

表 1 初设阶段抗剪试验所需最小样本容量

Table 1 The requisite minimal content of samples for shear tests in preliminary design

变异系数 $\delta_s$	0.10		0.20		0.30		0.40	
精度指标 $\sigma(\%)$	5		10		10		15	
置信水平 $\alpha$	0.15	0.10	0.15	0.10	0.15	0.10	0.15	0.10
样本容量 $N$	6	7	8	9	12	15	17	25

等级等提出的期望值。据 (12) 式绘制成图 1 的一组双曲线。从该图可以看出,  $N > 30$  曲线明显变缓,  $\rho$  趋于一定值, 它表明即使样本再增加, 但精度提高有限。而  $N = 20 \sim 30$  是一个过渡区,  $\rho \sim N$  曲线的曲率也比较平缓, 所以, 对岩石抗剪强度试验而言, 大子样可定为  $N \geq 20$ 。基于岩体变异系数、可信概率及精度指标, 拟定初步设计阶段岩石抗剪强度试验最小样本容量列于表 1。

现在, 我们进一步研究样本容量 ( $N$ ) 与可靠度 ( $P_r$ ) 和置信概率 ( $C$ ) 的关系。根据统计理论, 要求总体包括在样本的最大、最小值之内的百分比不少于  $C$  的概率为  $P_r$  时, 所需样本容量  $N$  由下式确定:

$$C = 1 - \exp(N \cdot l_n P_r) \quad (19)$$

据 (19) 式绘制成图 2 的诺谟图。从此图可以看出, 在  $N = 10 \sim 30$  的情况下, 可以满足工程上

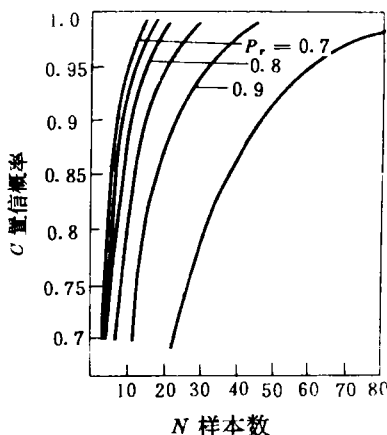


图 2 置信概率与样本容量的关系

Fig. 2 The relation between content of samples and credible probability

的不同精度要求。据此，本文提出岩土工程不同设计阶段抗剪强度指标概率取值的各项目标值列于表2。从概率理论分析，用样本期望值逼近总体期望值也取决于样本容量，因为样本标准差与总体标准差是不一样的。根据 $\chi^2$ 检验原理，考虑0.95的置信区间，总体标准差 $\bar{\sigma}$ 与样本标准 $\sigma$ 的关系如下式：

$$\sqrt{\frac{N-1}{\chi_{0.95}^2}}\sigma > \bar{\sigma} > \sqrt{\frac{N-1}{\chi_{0.05}^2}}\sigma \quad (20)$$

表2 岩石抗剪强度指标概率取值的目标值

Table 2 The values of probability of shear strength of rocks

项 目	可行性研究	初步设计	技术设计
目标可靠度 $P_r$	$\geq 0.80$	$\geq 0.85$	$\geq 0.90$
置信概率 $C$	0.85	0.90	0.95
最小样本 $N$	8	14	30
精度指标 $\rho(\%)$	15 ~ 20	10 ~ 15	5 ~ 10

表3  $\bar{\sigma}$ 与 $\sigma$ 的数值关系

Table 3 The numerical relation of  $\bar{\sigma} \sim \sigma$

$N$	$\sqrt{\frac{N-1}{\chi_{0.95}^2}}$	$\sqrt{\frac{N-1}{\chi_{0.05}^2}}$
10	1.65	0.73
20	1.37	0.80
40	1.23	0.85
60	1.18	0.87
80	1.15	0.886
100	1.13	0.897

将 $N$ 系列值及相应的 $\chi^2$ 值列于表3。例如，样本容量为40时，需要把求得的样本标准差 $\sigma$ 加大23%左右才比较可靠。

## 5 工程实例

若干电站坝基混凝土与岩石现场抗剪断试验成果按 $f$ 、 $c$ 联合分布的分析方法进行整理，首先用最小二乘法计算工程地质单元体的摩擦系数和凝聚力的统计均值 $\bar{X}$ 、标准差 $\sigma_x$ 、变异系数 $\delta_x$ 及相关系数 $\gamma_{f,c}$ ，然后求 $f$ 、 $c$ 的联合分布概率密度函数，并以 $\bar{f}$ 、 $\bar{c}$ 作为 $u_0$ 、 $v_0$ 的估值计算随机变量 $u$ 和 $v$ 小于 $u_0$ 、 $v_0$ 的概率 $P_f$ 及可靠度 $P_{r1}$ 、置信概率 $c_1$ ，计算结果列于表4。从表中可以看出，7个电站的坝基混凝土与岩石抗剪断均值的可靠度 $P_{r1}$ 均小于0.80，这说明统计的均值偏大，不能用于设计。因此，适当降低均值，如采用标准值计算 $P_{r2}$ 及 $C_2$ ，此时各工程可靠度 $P_{r2}$ 均超过0.80，有些超过了0.85，但置信概率 $C_2$ 却降低了。这是因为置信概率 $C$ 是与 $P_r$ 成反比而与 $N$ 成正比，尽管 $P_r$ 值提高，但样本容量

表 4 若干水电站坝基混凝土与岩石抗剪断参数  
Table 4 Concrete of dam bases in some hydroelectric power stations parameters of shear strength of rocks

工程	坝基岩石	试验组数 $N$	统计值									标准值			
			$F'$			$C'$			相关系数 $\gamma_{f,c}$	可靠度 $P_{r1}$	置信概率 $C_1$	摩擦系数 $f_1$	凝聚力 $c_1$	可靠度 $P_{r2}$	置信概率 $C_2$
			均值 $f'$	标准差 $\sigma_{f'}$	变异系数 $\delta_{f'}$	均值 $C'$	标准差 $\sigma_{C'}$	变异系数 $\delta_{C'}$							
岩滩	辉绿岩	10	1.11	0.19	0.17	1.10	0.32	0.29	-0.86	0.70	0.97	0.95	0.83	0.85	0.81
水口	花岗岩	25	1.47	0.29	0.20	1.18	0.36	0.31	-0.82	0.70	0.99	1.23	0.88	0.80	0.99
长洲	花岗岩	7	1.04	0.15	0.14	0.77	0.13	0.17	-0.89	0.79	0.81	0.91	0.66	0.87	0.61
马骊滩	石灰岩	8	0.93	0.06	0.06	1.73	0.22	0.13	-0.92	0.69	0.95	0.88	1.54	0.86	0.70
安康	千枚岩	9	0.92	0.23	0.25	1.37	0.38	0.28	-0.86	0.75	0.92	0.73	1.05	0.87	0.71
紫荆关	花岗岩	7	1.15	0.11	0.10	0.99	0.18	0.18	-0.77	0.66	0.95	1.06	0.84	0.86	0.65
潘家口	石英片岩	14	1.71	0.17	0.10	0.62	0.22	0.35	-0.91	0.68	0.99	1.56	0.44	0.83	0.93

$N$  没有增加, 因此, 必然使  $C$  值有所降低。按表 2 的目标值对表 4 各工程坝基础混凝土与岩石抗剪断参数进行评定, 只有岩滩、水口、潘家口三个水电站达到了初设阶段的要求, 它们可用标准值  $f_k$ 、 $c_k$  进行设计。其它电站由于样本数量偏少, 抗剪强度指标可靠性较低。在此情况下, 可考虑适当提高概率分位数再一次降低标准值  $f_k$ 、 $c_k$ , 重新进行计算。此时, 可靠度将有所降低, 但置信概率却增大了。

## 6 结论

岩土工程抗剪强度参数  $f$ 、 $c$  宜采用联合分布以概率法取值, 但往往由于试验样本太少, 参数的可靠性较低。论证表明, 最优样本容量是与置信水平 (精度要求) 和岩体的变异性有关, 难于作出统一的规定, 表 1 的指标可作为参考。至于可靠度的目标值, 一般应由相关的规程规范来确定。但目前岩土工程的一些技术标准中多缺乏试验样本容量和精度要求的规定, 因此, 有必要进一步研究此问题。本文表 2 所列的岩石抗剪强度指标概率取值的目标值, 一般适用于大型岩石工程, 可作为编制有关的技术标准时参考。

## 7 参考文献

- 1 Ang A. H. S., Tang W. H.: 工程规划设计中的概率概念. 北京: 冶金工业出版社, 1985
- 2 张学易: 岩石抗剪断参数的统计分析方法. 岩石力学, 1992; (25)
- 3 高大钊: 土的抗剪强度指标的统计方法. 工程勘察, 1986; (4)
- 4 光耀华: 岩石力学参数概率统计的几个问题. 成都: 成都科技大学出版社, 1993
- 5 董育坚: 重力坝基础软弱夹层抗滑安全系数的概率分析. 水力发电, 1982; (2)

## THE ANALYSIS ON RELIABILITY OF INDEX OF SHEAR STRENGTH OF ROCK

Guang Yaohua

(Exploration and Design Institute of Electrical Power of Guangxi, Nanning 530023)

### Abstract

In the article the correlation is analysed between shear parameters of rock  $f$  and  $c$  in terms of Coulomb's law. The unite distribution of two dimentional random variables is used to deduct reliable probability of the parameters for comparing object values in different design stages and elevating reliablity of shear parameters of rock.

**Key words** rock, shear strength, probability distribution, reliability

## 第五届全国岩土力学数值分析 与解析方法讨论会在重庆召开

中国力学学会岩土力学专业委员会和中国岩石力学与工程学会重庆分会于 1994 年 10 月 14 日至 17 日在重庆联合召开了“第五届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会”。来自全国各地的 88 位代表参加了会议。大会特邀陆培炎教授、白世伟研究员、王泳嘉教授、郑颖人教授、陈正汉教授分别就“桩基设计方法”、“金川镍矿不良岩层稳定性研究”、“离散元法和拉格朗日元法及其在岩土力学中的应用”、“第八届国际岩土力学计算机方法与进展会议报道”和“岩土力学的公理化理论体系”的课题作了大会报告。会议还请 32 位作者在大会上作了论文报告，主要内容涉及岩土本构模型、岩土力学计算方法及岩土力学与工程分析。代表们普遍感到特邀报告与论文报告内容丰富、理论与应用并举，基本上反映了我国岩土力学学科各主要方面的进展。

会议期间还召开了岩土力学专业委员会委员会议，决定第六届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会于 1998 年第四季度在广东省召开。

(摘自第五届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会纪要)