

岩体等效变形参数及侧压系数的 非线性最小二乘法估计*

刘保国

(山东矿业学院 泰安 271019)

提要 从系统控制角度出发,在位移等效的原则下将复杂岩体中开掘的圆形隧洞简化为连续、均匀、各向同性介质中相同半径的隧洞等效模型,然后利用等效模型的理论解和实测不同方向洞周收敛计和伸长计的位移测值,通过非线性最小二乘原理确定等效模型的变形参数及侧压系数的最优估计。

关键词 岩体,等效变形,参数,非线性最小二乘法

1 引言

由于岩体介质的复杂性和区域变化的随机性,如何正确给定岩体的力学参数通常是一个比较棘手的问题。目前在确定岩体力学参数上大体有三种方法:一是科学试验(包括室内岩块试验和现场大型原位试验);二是经验方法,即在统计的基础上,把岩体力学参数与岩体工程分类中的质量指标(比如 Bieniawski 分类法中的 RMR 指标)联系起来;三是自七十年代末发展起来的位移反分析,即通过实测有限点处的位移反求岩体力学参数的方法。本文所述的方法属反分析的范畴。首先是把实际岩体中开掘的圆形隧洞,在位移等效的原则下,简化成连续、均匀、各向同性介质中的隧洞等效模型,定义简化后介质的变形参数为原介质的等效变形参数;然后在实测洞周各个方向收敛计和伸长计位移测值的基础上,利用非线性最小二乘法确定等效变形参数的最优估计。

2 模型建立

首先假定在深度为 H 的岩体中开掘一条设计半径为 a 的圆形隧洞,该隧洞穿过的岩体中不包含大的控制性结构面(比如大的断层)。设监测断面设置在距开挖面 S 处,考虑开挖面的空间效应,由释放荷载引起监测断面周边各质点位移可分成两个部分:一是从断面掘出到开始观测期间由释放荷载 $P(S)$ 引起的位移 u_i ,二是从开始观测到释放荷载达到初始地应力 P_0 由剩余释放荷载 $P_0 - P(S)$ 引起的位移 u_i 。如图 1a 所示,最终使洞周由设计的实线位置变形到虚线位置。今在位移等效的原则下,将图 1a 中的实际模型用图 1b 连续

1995年5月21日收到初稿,1995年10月19日收到修改稿。

* 国家自然科学基金与兖州矿业集团公司联合资助项目

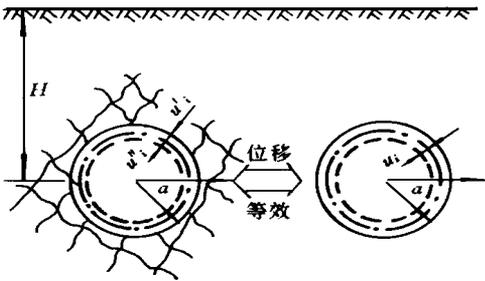


图 1 等效模型示意图

Fig 1 Sketch for equivalent model

均匀、各向同性介质中相同半径和边界条件的隧洞计算模型代替，假定该均匀介质的参数和侧压系数分别为 E_e, μ_e, λ_e ，称之为原型介质的等效参数，记为 $x = (E_e, \mu_e, \lambda_e)^T$ 。变形参数和侧压系数分别为 E_e, μ_e, λ_e ，称之为原型介质的等效参数，记为 $X = (E_e, \mu_e, \lambda_e)^T$ 。

由于实际观测中测到的位移为 u_i ，对于计算模型相应部分位移（即由释放荷载 $P_o - P(S)$ 引起的部分）的理论计算值为：

$$u_i = f(X, \theta) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

若实际观测中得到洞周不同方向的精确位移就是 u_i ，则根据位移等效原则有：

$$u_i = u_i = f(X, \theta) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

解此方程组可求得等效参数 X 的精确解，但实际很难求得这一精确值，主要原因是：一方面当取洞周不同方向若干组实测精确位移时，由方程组 (1) 所确定的等效参数不相同，即没有唯一解；另一方面由于实测过程中若干随机因素的干扰，很难测得洞周的位移精确值，通常的实测位移与精确位移之间存在一个残差 e_i ，假定通常的实测位移为 U_i ，则：

$$e_i = U_i - u_i = U_i - f(X, \theta) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

根据最小二乘原理，上式中 X 的最优估计 $\hat{X} = (\hat{E}_e, \hat{\mu}_e, \hat{\lambda}_e)^T$ 应使下面的目标函数取极小值：

$$J(X) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [U_i - f(X, \theta)]^2 \quad (2)$$

于是由实测洞周收敛计和伸长计的位移测值确定岩体等效变形参数和侧压系数的问题转化为求式 (2) 取极小值的 X 问题。

3 等效参数的最优估计

在式 (2) 中， U_i 是实测的位移值， $f(X, \theta)$ 是与假定的模型有关的洞周位移理论计算值，对假定模型较复杂情况， $f(X, \theta)$ 只能借助数值计算来确定（如有限元法）。本文将复杂岩体假定为均匀连续各向同性介质中的线弹性模型，根据弹性力学的解答，基于这一假设下开掘的任何断面洞室均可通过复变函数和保角变换得到洞周位移的解析解。在本文中只就最简单的圆形断面洞室介绍其求解过程。

如前所述，由于开挖面空间效应的影响，在滞后开挖面 S 处设置的监测断面周边各质点在剩余释放荷载 $P_o - P(S)$ 作用下产生的不同方向径向位移的理论解为（假定观测期间未支护）：

$$u_i = \frac{1 + \mu_e}{2E_e} [P_o - P(S)] [(1 + \lambda_e) - 3(1 - \lambda_e) \cos 2\theta + 4\mu_e(1 - \lambda_e) \cos 2\theta] a_j \quad (3)$$

式中 E_e, μ_e, λ_e 函义同前；

P_o —— 垂直方向初始地应力， $P_o = H \gamma$ ；

$P(S)$ —— 从掘出断面到开始观测期间释放掉的荷载，根据文献 [4] 研究结果

$P(S) = P_o(1 - Q 7e^{-\frac{3.15S}{D}})$, 式中 D 为洞径;

θ ——不同测点径向与水平方向夹角;

a_j ——观测点距洞中心的距离。

将 $P(S)$ 及 P_o 代入式(3)得:

$$u_i = \frac{a_j(1 + \mu_e)}{2E_e} H \gamma e^{-\frac{3.15S}{D}} [(1 + \lambda) - 3(1 - \lambda) \cos 2\theta + 4\mu_e(1 - \lambda) \cos 2\theta] a_j \quad (4)$$

从式(4)可以看出, u_i 是待估参数 E_e 、 μ_e 、 λ 的非线性函数, 若将其代入式(2)并按多元函数求极值的方法, 即令 $\frac{\partial L}{\partial X} = 0$, 则将得到一个复杂的非线性方程组, 难以求解。关于求解这种非线性最小二乘法问题有许多方法, 本文利用最简单的迭代法, 即 Gauss-Newton 法求解式(2)。

设给定 X 一个初估值 $X^{(0)} = (E_e^{(0)}, \mu_e^{(0)}, \lambda^{(0)})^T$, 并令 $\Delta = X - X^{(0)} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)^T$, 于是确定 X 的问题转化成确定修正值 Δ_i 的问题, 现将 $f(X, \theta)$ 在 $X^{(0)}$ 处展开为泰勒级数, 并略去 Δ_i 二次以上的项, 得以下近似关系式:

$$f(X, \theta) \doteq f(X^{(0)}, \theta) + \frac{\partial f_i}{\partial E_e} \Delta_1 + \frac{\partial f_i}{\partial \mu_e} \Delta_2 + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \Delta_3 \quad (5)$$

式中 $\frac{\partial f_i}{\partial E_e} = \frac{\partial f}{\partial E_e} \Big|_{x=x^{(0)}, \theta}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \mu_e} = \frac{\partial f}{\partial \mu_e} \Big|_{x=x^{(0)}, \theta}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Big|_{x=x^{(0)}, \theta}$, $\frac{\partial f}{\partial E_e}$, $\frac{\partial f}{\partial \mu_e}$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ 可由式(4)方便求出。

将式(5)代入式(2)得:

$$J(X) = \sum_{i=1}^n [U_i - f(X^{(0)}, \theta) - \frac{\partial f_i}{\partial E_e} \Delta_1 - \frac{\partial f_i}{\partial \mu_e} \Delta_2 - \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \Delta_3]^2$$

令 $\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial L}{\partial \Delta} = 0$, 得以下方程组:

$$A^T A \Delta = A^T (U - f) \quad (6)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial E_e} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu_e} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial E_e} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu_e} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial E_e} & \frac{\partial f_n}{\partial \mu_e} & \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$$

$$U = [U_1 U_2 U_3 \dots U_n]^T$$

$$f = [f(x^{(0)}, \theta) \quad f(x^{(0)}, \theta) \quad \dots \quad f(x^{(0)}, \theta)]^T$$

为保证该方程有解, $A^T A$ 必须为非奇异阵, 即 A 矩阵应为满秩阵, 或者说 A 矩阵三个列向量为线性无关, 用式子表示为下式成立只有 C_1, C_2, C_3 都为零。

$$C_1 \frac{\partial f_i}{\partial E_e} + C_2 \frac{\partial f_i}{\partial \mu_e} + C_3 \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

为了满足这一条件, 根据文献[5]的论证, 对圆形洞室, 要求测点不布置在同一圆周上即可。在此前提下, 对给定的初估值 $X^{(0)}$, 求解方程组(6)得到对应的修正值 $\Delta^{(0)}$, 从而得

到第一次迭代的结果为 $X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta^{(0)}$ ，然后将 $X^{(1)}$ 看成新一轮初估值重复计算，直到第 K 次求出的修正值 $\Delta^{(k)} < \epsilon$ 为止 (ϵ 为预先给定的精度)，得最后解答为：

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta^{(k)}$$

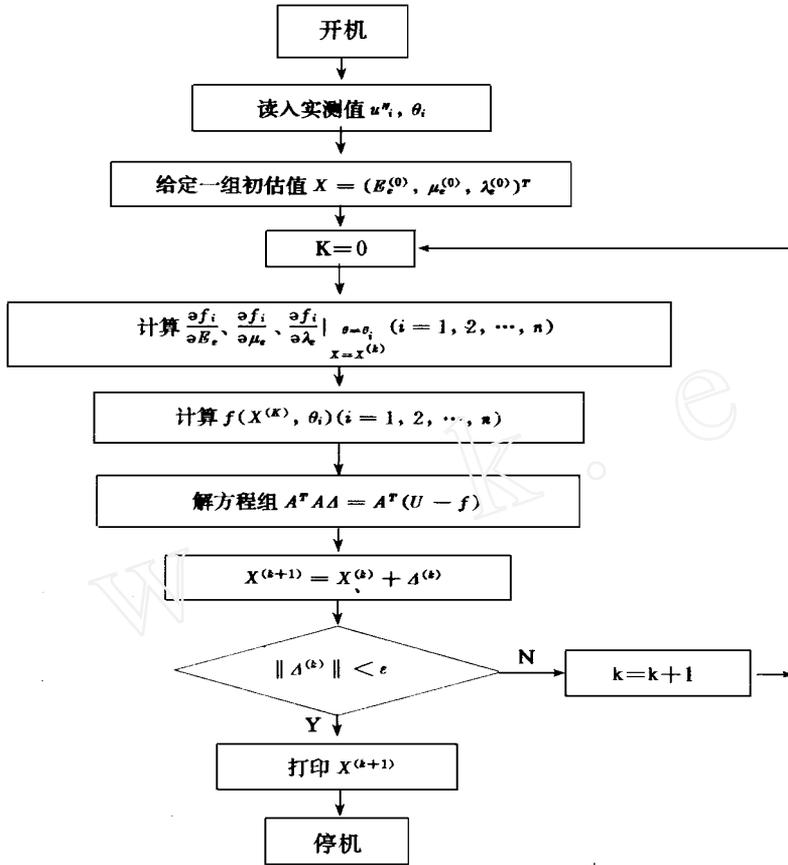


图 2 迭代法计算框图

Fig 2 Flow chart of the program for iteration method

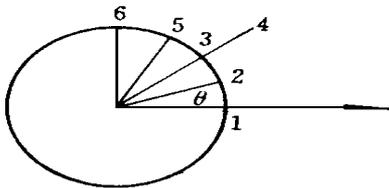


图 3 洞周测点布置

Fig 3 A rangement of measured points at adit periphery

以上计算过程框图如图 2 所示。在这里需要说明一点，若使目标函数式 (2) 达到极小的参数为 X^* ，则迭代序列 $\{X^{(k)}\}$ 是否收敛于 X^* 与初估值有直接的关系，若初估值给定接近 X^* ，则很快就会收敛，否则可能导致失败。而对任何具体工程，凭经验和岩性只知道待估参数的大体范围，因此，在实际操作过程中，需不断调整初估值以求得待估参数的最佳值。由于调整初估值较方便，且速度快，故这一点并不妨碍使用。

4 考题验证

假定在深度 $H = 100\text{m}$ 岩体中开掘一条半径 $a = 2\text{m}$ 的圆形断面隧洞, 岩体的平均容重 $\gamma = 25\text{KN/m}^3$, 监测断面距开挖面距离 $x = 3\text{m}$, 若岩体变形参数和侧压系数的真值分别为 $E = 5000\text{ GPa}$, $\mu = 0.3$, $\lambda = 0.7$, 测点布置如图 3 所示。则各测点径向位移理论分析值如表 1。

表 1 测点位移

Table 1 The displacements of measured points

点号	1	2	3	4	5	6
θ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
a_j (m)	2	2	2	2.5	2	2
u_i (mm)	0.0497	0.0565	0.0729	0.0911	0.0892	0.0960

现将表 1 的数据看成为各测点的实测位移值, E 、 μ 、 λ 作为待估的岩体等效变形参数和侧压系数。根据本文上述介绍的算法, 取初估值为: $E^{(0)} = 4000\text{ GPa}$, $\mu^{(0)} = 0.35$, $\lambda^{(0)} = 0.65$, 则迭代计算的结果如表 2 所示。

表 2 迭代计算结果

Table 2 The results of iteration calculation

迭代次数	E	μ	λ
1	4636.560	0.156	0.812
2	5148.132	0.311	0.750
3	4983.683	0.293	0.703
4	4987.542	0.295	0.702
5	4989.104	0.294	0.702
6	4987.713	0.295	0.702
7	4987.230	0.295	0.702

得最终反演结果为: $E = 4987.230$, $\mu = 0.295$, $\lambda = 0.702$, 与假定真值基本符合。

5 若干问题的讨论

(1) 在本文规定的条件下, 即圆形断面隧洞, 隧洞穿过的真实岩体中不包含有大的控制性结构面, 利用本文所述方法反求岩体等效变形参数和侧压系数同数值法相比省去了大量的数据准备工作并节省了不少机时, 在实际工程中更加快速、方便和实用, 而反求的结果同线弹性有限元分析结果基本一致。

(2) 本文虽然只讨论了圆形断面的洞室, 但作为一种方法可以适应任何断面的洞室,

只是对非圆断面洞室,需用计算非圆断面洞室洞周位移的理论解,该解是待估参数更复杂的函数,求导困难的,可改用拟-Newton 算法。但该类方法的适应性较数值方法差,因为它要依赖理论解。

(3) 本文所述方法的收敛性与给定的初估值有直接的关系,若初估值接近真值,则容易达到收敛,否则较难收敛或不收敛。而对一具体工程,凭经验和岩性最多只知道各参数大体变化范围,因此实际操作中需投放多个初估值以便求得最佳反分析结果。从数学优化角度用修正的 Gauss-Newton 算法可以放宽对初估值的要求。

(4) 本文反求的是真实岩体等效变形参数,它综合了岩体中许多复杂因素(包括岩体本身固有结构和开挖后引起的破坏情况),不同于实验确定的参数有明确的物理含义,从控制角度,只是为同一模型下的正演结果与实际变形较好地吻合提供一种输入。

(5) 对于圆形断面洞室,利用本文所述方法同时反求 E 、 μ 、 λ 能有唯一的解答,需要测点不布置在同一圆周上。

参 考 文 献

- 1 刘钦圣编著:最小二乘问题计算方法 北京:北京工业大学出版社,1989
- 2 孙钧,侯学渊主编:地下结构(上).北京:科学出版社,1991
- 3 孙钧,黄伟:岩石力学参数弹性反演问题的优化方法 岩石力学与工程学报,1992;11(3):221-229
- 4 孙钧,莫海鸿:隧洞施工监控程序设计.见:第二届岩石地下工程学术会议论文集,1990;9:10-16
- 5 吕爱钟:巷道围岩参数及地应力可辨识性的探讨.岩石力学与工程学报,1988;7(2):155-164

THE ESTIMATION OF EQUIVALENT DEFORMATION PARAMETERS OF ROCK MASS AND COEFFICIENT OF LATERAL PRESSURE USING NONLINEAR LEAST SQUARES METHOD

Liu Baoguo

(Shandong Inst of Min. & Tech., Tai'an 271019)

Abstract Based on the displacement equivalent principle, the tunnel of round section in complex rock mass is simplified to the tunnel calculation model with the same radius in continuous, homogeneous and isotropic medium. Then, the optimizing estimation of equivalent deformation parameters of rock mass and coefficient of lateral pressure has been proposed by nonlinear least squares method on the basis of practical measurement value of periphery deformation and theoretical solution of the model

Key words rock mass, equivalent deformation, parameter, nonlinear least squares method