

# 三点弯曲蠕变试验中裂缝扩展的有限元计算分析

金丰年 浦奎英

(南京工程兵工程学院 南京 210007)

**提要** 应用破坏接近度的概念, 将压应力作用下的非线性粘弹性模型扩张成了拉应力作用下的岩石力学模型, 应用该模型, 对三点弯曲蠕变试验中裂缝的扩展过程进行了有限元计算, 发现裂缝扩展随时间的变化与应力—应变曲线的形状, 尤其是强度破坏点以后的曲线形状密切相关。

**关键词** 蠕变, 裂缝扩展, 有限元计算

## 1 引言

对于岩石力学中的裂缝扩展问题, 基于弹塑性和粘弹性理论的研究已进行得比较多。但是弹塑性理论的研究结果无法说明裂缝扩展的全过程, 考虑时间效应的研究, 则较多利用了线性粘弹性模型。而根据最近的实验结果<sup>[1-5]</sup>, 岩石具有较强的非线性特性这一点, 已越来越明确。

Okubo 等<sup>[1]</sup>通过岩石的压缩试验, 得出了岩石强度随载荷速度增加而增加, 强度与载荷速度的  $1/(n+1)$  次方成正比的结果; 并在综合分析载荷速度效应、卸载、蠕变和应力松弛等试验结果的基础上, 提出了非线性粘弹性本构方程式, 即

$$\epsilon = \lambda \sigma$$

$$d\lambda/dt = a \sigma^m \lambda^n \quad (2)$$

式中,  $\lambda$  称作可变模量, 简称模量,  $a$  为常数,  $n$  为表示载荷速度效应的参数,  $m$  表示应力应变曲线形状的参数。该模型能够较好地描述压应力作用下岩石的变形破坏特征。文[6]应用该模型对圆形隧洞的有限元计算结果, 则较好地反映了隧洞围岩的变形破坏特征。

由岩石三点弯曲载荷速度效应的试验结果可以知道, 断裂韧性  $K_{max}$  和断裂模量  $\sigma_b$  随加载位移速度增加而增加, 与位移速度的  $1/(n+1)$  次方成正比, 基于此试验结果提出的裂缝扩展力学模型表示如下<sup>[4]</sup>:

$$d(\Delta a)/dt = K^n/A \quad (3)$$

式中,  $\Delta a$  为裂缝扩展,  $K$  为应力强度因子,  $A$  为与  $\Delta a$  有关的系数。

Fukui 等<sup>[5]</sup>在三点弯曲蠕变试验的基础上, 研究了不同蠕变应力水平下裂缝扩展和裂缝扩展速度随时间的变化规律, 得出了与式(3)相类似的描述裂缝扩展的表达式, 即

$$d(\Delta a)/dt = K^n [C_1(\Delta a)^{-m} + C_2] \tag{4}$$

式中,  $C_1, C_2$  为常数。

笔者则在单轴拉伸试验的基础上, 得出了非弹性应变  $\epsilon$  与应力  $\sigma$  之间的相互关系<sup>[8]</sup>, 即

$$d\epsilon/dt = \sigma^m [C_1\epsilon^m + C_2] \tag{5}$$

上式关系与式(4)非常相似。这说明非弹性应变的增加与受拉裂缝的扩展密切相关, 并具有十分相似的规律性。

上述模型在解释试验现象和试验结果时, 均有较高的理论价值, 但若要应用于描述岩石裂缝扩展的有限元计算分析, 尚有一定的困难。为此, 本文应用破坏接近度的概念, 将压应力作用下的本构方程式(1)和(2)扩张成了拉应力作用下的岩石力学模型。应用该模型对三点弯曲蠕变试验中裂缝的扩展过程进行了有限元计算, 分析了裂缝扩展随时间的变化, 并与试验结果相比较进行了讨论。该本构模型, 假定应力作用下的岩石模量随时间的增长而逐渐增长, 其主要特点是能够较好地描述岩石破坏后的特征。计算所需参数为以下 6 个: 单轴压缩强度  $C_0$ , 单轴拉伸强度  $T_0$ , 初始模量  $\lambda_0$ , 泊松比  $\nu_0$ , 表示载荷速度效应的参数  $n$ , 以及表示应力—应变曲线形状的参数  $m$ 。上述参数通常可以由单轴压缩试验和单轴拉伸试验确定<sup>[1, 3]</sup>。

## 2 岩石的力学模型

### 2.1 破坏接近度

如果将任意应力状态与破坏应力状态的接近程度, 称作破坏接近度则在单轴应力作用下的破坏接近度就等于应力与强度之比。在多轴应力状态下, 计算方法则各不相同。

本文采用的是众所周知的 Fairhurst<sup>[7]</sup>基于莫尔抛物型包络线破坏准则所提出的二维应力状态下的破坏接近度, 参照图 1 所示, 简单叙述如下:

若假定破坏条件为抛物型包络线

$$\tau^2 = \beta T_0 (T_0 - \sigma) \tag{6}$$

式中,  $\beta$  为无量纲常数,  $T_0$  为单轴拉伸强度。于是, 与任意应力状态  $(\sigma_1, \sigma_2)$  的应力圆相切的抛物线可写成

$$\tau^2 = \beta T (T - \sigma) \tag{7}$$

定义破坏接近度为

$$S = \frac{T}{T_0} \tag{8}$$

其中,  $T$  为主应力  $\sigma_1, \sigma_2$  以及参数  $\beta$  的函数。

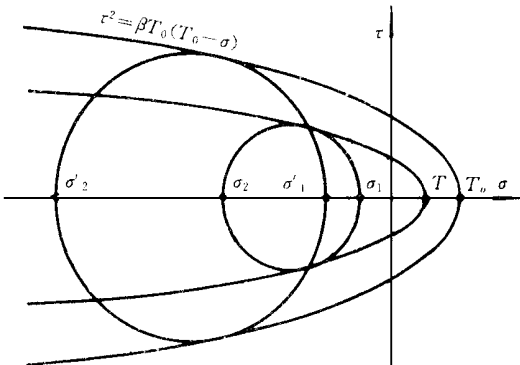


图 1 莫尔应力圆和抛物型包络线

Fig 1 Mohr's stress circle and parabola envelope

当  $(\beta - 1)\sigma_1 + \sigma_2 = 0$  时, 压缩破坏

$$T = \frac{1}{\beta - 4} [(\sigma_1 + \sigma_2) + \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{4}{\beta} (\sigma_1 - \sigma_2)^2}] \quad (9)$$

当  $(\beta - 1)\sigma_1 + \sigma_2 > 0$  时, 拉伸破坏

$$T = \sigma_1 \quad (10)$$

其中,

$$\beta = \frac{C_o}{T_o} + 2 - 2\sqrt{\frac{C_o}{T_o} + 1} \quad (11)$$

式中,  $C_o$  为单轴压缩强度。

## 2.2 本构方程式

压应力作用下的岩石力学模型, 即式(1)与式(2), 在三维应力状态下的具体应用已在文献[6]中进行了讨论。以下则考虑适用于拉应力作用下的本构模型。假定模量  $\lambda$  的增加速度与破坏接近度  $S$  的  $n$  次方成正比, 并随着  $\lambda$  的增加, 与  $\lambda$  的  $m$  次方成比例地加速增大。其基本方程式给出如下:

$$\dot{\epsilon}^* = \lambda^* \dot{\sigma}^* \quad (12)$$

$$d\lambda^*/dt = a s^n \lambda^{*m} \quad (13)$$

$$a = \frac{1}{t_o} \left( \frac{-m}{n+1} \right)^{m/(n-m+1)}$$

其中,  $\lambda^*$ 、 $\sigma^*$  和  $\epsilon^*$  分别为对初始模量  $\lambda$ 、强度  $T_o$  和破坏应变无量纲化的模量、应力和应变。 $t_o$  为定应变速度试验中, 达到强度破坏所需要的时间, 这里将  $t_o = 120$  s 作为标准值。 $S$  则为破坏接近度, 其定义如式(8)。

另外, 大多数岩石的试验结果表明, 泊松比  $\nu$  随着变形破坏的进行而增加, 本文采用下式模拟该现象<sup>[6]</sup>:

$$\nu = 0.5 - \frac{0.5 - \nu_o}{\lambda^*} \quad (14)$$

## 2.3 说明

由式(12)微分可得

$$\frac{d\dot{\epsilon}^*}{dt} = \lambda^* \frac{d\dot{\sigma}^*}{dt} + \dot{\sigma}^* \frac{d\lambda^*}{dt} \quad (15)$$

将式(13)代入上式即得

$$\frac{d\dot{\epsilon}^*}{dt} = \lambda^* \frac{d\dot{\sigma}^*}{dt} + \dot{\sigma}^* a s^n \lambda^{*m} \quad (16)$$

式中, 破坏接近度  $S$ , 由其定义可知, 为应力的函数。因而当  $n > 1$  时, 上式中的应变速度与应力成明显的非线性关系, 故由式(12)和(13)所构成的本构模型, 称作为非线性粘弹性本构模型。

本文模型能较好地描述岩石强度的载荷速度效应, 强度与载荷速度的  $1/(n+1)$  次方成正比。该结果在单轴压缩<sup>[1]</sup>、三轴压缩<sup>[2]</sup>、单轴拉伸<sup>[3]</sup>、压裂受拉<sup>[3]</sup>和三点弯曲试验<sup>[4]</sup>中均已得到了较好的证实。其次, 该模型能反映蠕变寿命与蠕变应力的  $n$  次方成反比的关系, 这一点在岩石的蠕变试验中也已得到证实。另外, 如图 2 所示, 当本构方程式中的参

数  $n$  为一定, 而  $m$  增大时, 强度破坏点以后的应力下降变为加快, 即  $m$  值能较好地表现强度破坏点以后岩石的破坏特性。

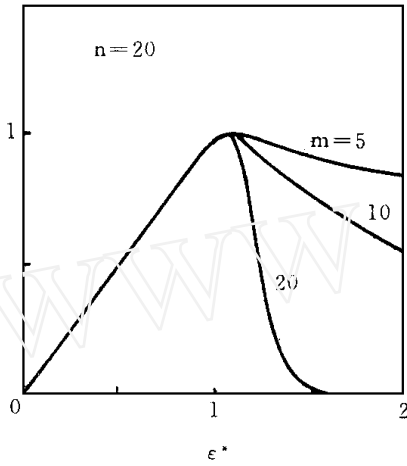


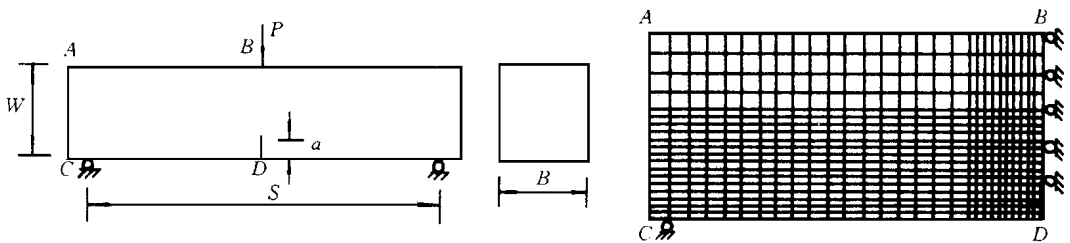
图 2 由不同  $m$  值计算得到的单轴拉伸试验的应力—应变曲线

Fig 2 Calculated stress-strain curves in uniaxial tension for different  $m$

### 3 有限元计算

计算模型如图 3(a) 所示, 断面为正方形的梁, 长 225 mm、高和宽均为 48 mm, 梁下侧中央部位有一加工裂缝, 长  $a=15$  mm。该梁在一集中力  $P=0.6$  kN 作用下进行蠕变试验。因梁模型左右对称, 故可取左端部分  $ABCD$  作为计算对象, 单元划分示意如图 3(b)。该模型与三点弯曲蠕变试验<sup>[5]</sup>的试件基本相近, 只是试验中加工裂缝的先端为曲率半径为 0.2 mm 的圆孤, 从而减少了应力在裂缝先端的高度集中。计算模型先端则无圆孤连接, 为一直角平头。计算所用参数与试验所用安山岩的材料参数相同<sup>[5]</sup>。单轴压缩强度  $C_o = 89$  MPa, 单轴拉伸强度  $T_o = 4.94$  MPa, 杨氏模量  $E = 1/\lambda = 21.0$  GPa, 泊松比  $\nu = 0.13$ 。另外, 根据安山岩的载荷速度效应试验结果<sup>[1-4]</sup>, 载荷速度效应参数  $n$  为 35, 应力—应变曲线形状参数  $m$  为 20。

此外, 根据安山岩的载荷速度效应试验结果<sup>[1-4]</sup>, 载荷速度效应参数  $n$  为 35, 应力—应变曲线形状参数  $m$  为 20。



(a) 梁的模型示意

(b) 单元划分示意

图 3 三点弯曲蠕变试验梁的计算模型

Fig 3 Calculating model of specimen in three-point-bending creep test

有限元计算过程, 可分为以下四步:

第一步, 输入数据, 给各单元赋予参数的初值  $C_o, T_o, \lambda, \nu, n, m$ ;

第二步, 通过有限单元法, 计算各单元的应力和应变;

第三步, 计算  $T, S$ , 然后代入式(13) 计算时间间隔  $\Delta t = 1$  s 内模量  $\lambda^*$  的变化量  $\Delta \lambda^*$ ,

由  $\lambda^* = \lambda^* + \frac{d\lambda^*}{dt} \Delta t$  求得新的  $\lambda^*$  值, 并赋值各单元。同时由式(14) 计算新的泊松比  $\nu$ , 并

赋值各单元;

第四步, 输出计算结果, 并令  $\Delta t = 1.1\Delta t$ , 然后返回第二步。以下只需循环计算, 直到满足计算要求。

图 3 所示的试验梁, 在集中力  $P$  的作用下, 由于初始加工裂缝的存在, 在裂缝先端将造成应力集中, 从而导致该初始裂缝的扩展, 并在其先端近旁产生新的微裂缝, 形成裂缝扩展损伤区域, 该区域的模量  $\lambda$  将明显增大。若将  $\lambda$  增加至 10 倍  $\lambda$  以上的区域称之为裂缝扩展损伤区域, 则该区域随时间变化的计算结果如图 4 所示, 其中  $n = 35, m = 5$ , 区域边界由损伤单元光滑连接而成。另外, 为了清晰起见, 该图仅取梁中央部分(长 20 mm × 高 48 mm)来标出裂缝扩展损伤区域, 初始裂缝居中, 左右各为 10 mm。需要说明的是, 由于初始裂缝开口的变形, 其量不超过  $100 \mu\text{m}$ , 故在图中没有明显标出, 这将在下面具体给出。由图 4 可见, 裂缝扩展损伤区域表现为, 其长度和面积随时间的增长而扩大。在图 5 中, 则给出了不同  $m$  值情况下的计算结果, 图中尺寸与图 4 相同。 $m$  值越大, 表示岩石的脆性程度越高。从图 5 可以看出,  $m$  值大的裂缝扩展损伤区域比  $m$  值小的损伤区域小。 $m = 20$  时, 相对脆性的岩石(如安山岩), 裂缝扩展损伤区域的幅宽为数  $d\text{mm}$ , 而  $m = 10$  时, 相对延性的岩石, 损伤区域的幅宽则达到  $10 d\text{mm}$  以上。

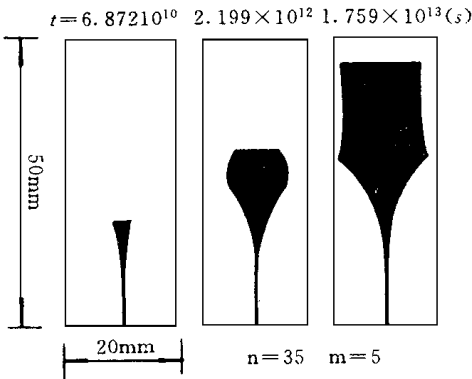


图 4 裂缝扩展损伤区域随时间变化的计算结果

Fig 4 Calculated failure region of crack extension with time

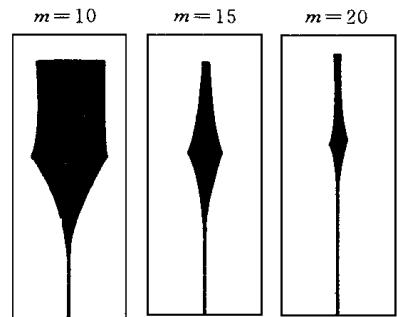


图 5 由不同  $m$  值计算得出的裂缝扩展损伤区域

Fig 5 Calculated failure region of crack extension for different  $m$

图 6 为裂缝开口变形随时间变化的计算结果, 横轴取时间  $t$  的对数。开口变形最初缓慢增加, 经一定时间后速度逐渐加快而导致最终的破坏。图 7 则在两对数坐标中给出了裂缝开口变形速度  $\delta$  与时间  $t$  的关系。梁承载以后的一段时间内, 开口变形速度为逐渐减小。经过一定时间后,  $\delta-t$  曲线逐趋水平, 当  $\delta$  在某一时刻达到最小以后, 则开始迅速增加, 以致破坏。由图 6 和图 7 可以看出, 裂缝开口变形随时间的变化也与  $m$  值有关, 也即与岩石达到强度破坏点以后的特性, 或者说应力—应变曲线的形状直接相关。 $m$  值较大时, 裂缝开口变形的速度较快, 达到破坏的时间较短。

图 8 中, 给出了裂缝长度  $a$  随时间变化的计算结果。裂缝长度  $a$  随时间的增长而增加, 其变化趋势与裂缝开口变形  $\delta$  基本相似, 最初较缓慢, 随后则迅速增加而至最终破坏。裂缝长度  $a$  随时间的变化也同样与  $m$  值密切相关。其影响结果与裂缝开口变形  $\delta$  的情形基本

一致。

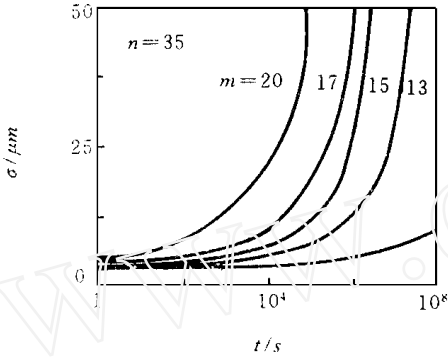


图 6 裂缝开口变形随时间变化的计算结果  
 Fig 6 Calculated increase of crack opening with time

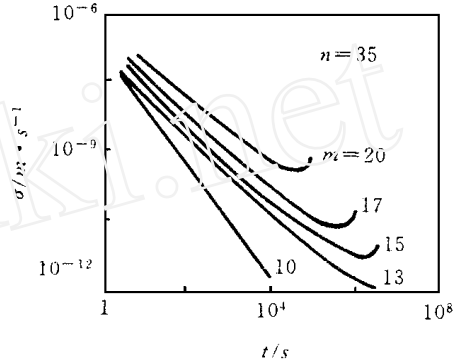


图 7 裂缝开口变形速度随时间的变化  
 Fig 7 Calculated increase rate of crack opening with time

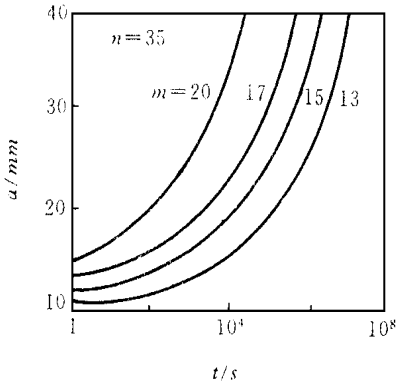


图 8 裂缝长度随时间变化的计算结果  
 Fig 8 Calculated increase of crack length with time

### 4 与试验结果的比较

图 9~ 11 为安山岩三点弯曲的蠕变试验结果<sup>[5]</sup>。图 9 为裂缝开口变形随时间的变化，图中 4 条曲线分别由 4 个试件的试验而测得。图 10 为裂缝开口变形速度随时间变化的结果。图 11 则为裂缝长度随时间的变化。

由试验结果与计算结果的比较可知，裂缝开口变形和裂缝长度随时间的变化趋势，计算结果与试验结果基本一致。这说明本文方法在再现裂缝扩展过程的应用上具有相对的合理性和可行性。不过，就定量角度来看，计算所得曲线与试验曲线并不完全吻合。究其原因，主要有以下三点：(1) 计算模型中的加工裂缝，如上节所述，与试验用试件的加工裂缝有所不同，

计算模型裂缝先端为一直角平头，容易形成较高的应力集中，并因此造成应力分布情况的不同，从而导致计算与试验之间的差异。(2) 供试验所用的岩石试件，除含加工裂缝之外，其本身实际上还含有许多微裂隙，并非理想的均质各向同性的连续介质。但在计算中则没有考虑该方面的影响，从而也导致了差异的存在。(3) 误差来自本构模型和破坏准则。拉应力作用下岩石的本构模型和破坏准则尚未完善，本文提出和应用破坏接近度的概念来模拟拉应力作用下岩石的变形破坏特性，是一种新的尝试，今后仍有待于进一步的研究和探讨。

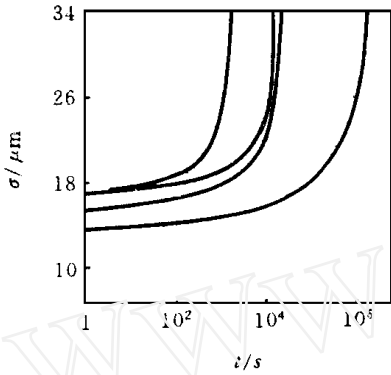


图 9 裂缝开口变形随时间变化的试验结果

Fig 9 Measured increase of crack opening with time

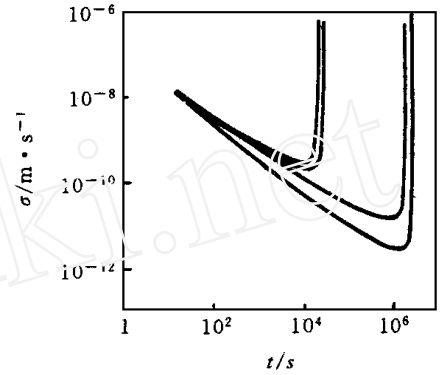


图 10 裂缝开口变形速度随时间的变化

Fig 10 Measured increase rate of crack opening with time

### 参 考 文 献

- 1 Okubo S, He C, Nishimatsu Y. Time dependent behaviour in uniaxial compression. Journal of the Mining and Metallurgical Institute of Japan, 1987, 103: 177-181
- 2 Yamaguchi T, Okubo S, Nishimatsu Y, Koizumi S. The effect of strain rate on the triaxial strength of Sanjome Andesite. Journal of the Mining and Metallurgical Institute of Japan, 1987, 99: 87-92
- 3 Okubo S, Jin F, Akiyama M. Loading-rate dependency of uniaxial and indirect tensile strength. Journal of the Mining and Materials Processing Institute of Japan, 1993, 109(11): 865-869
- 4 Okubo S, Shin K, Nishimatsu Y. Mathematical model of crack growth for Sanjome Andesite. Journal Society of Materials Science Japan. 1984, 33(370): 96-101
- 5 Fukui K, Okubo S, Nishimatsu Y. Creep Behaviour of Sanjome Andesite in three-point-bending. Journal of the Mining and Materials Processing Institute of Japan, 1991, 107(7): 416-421
- 6 Okubo S, Jin F. Simulation of rock behaviour around circular roadway by non-linear rheological model. Journal of the mining and Materials Processing Institute of Japan, 1993, 109(3): 209-214
- 7 Fairhurst C. On the validity of the brazilian test for brittle materials. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 1964, 1: 535-546
- 8 金丰年. 岩石的时间效应. 同济大学博士学位论文, 1993

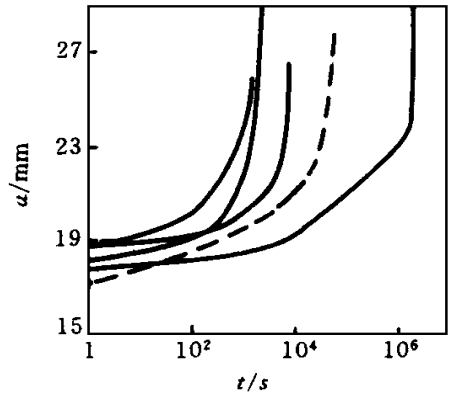


图 11 裂缝长度随时间变化的试验结果

Fig 11 Measured increase of crack length with time

## SMULATION OF CRACK EXTENSION IN THREE-POINT-BENDING CREEP TEST

Jin Fengnian Fu Kuiying

(Nanjing Engineering Institute, Nanjing 210007)

**Abstract** Crack extension is related to time-dependent behaviour, and is one of the basic problems in the field of rock mechanics. In this paper, by using failure severity concept, a non-linear rheological model in compression is developed into new model in tension. This model has been applied to simulate the crack extension in three-point-bending creep test. By comparison with test results, discussion was carried out. It is found that crack extension with time is closely related to the shape of stress-strain curve, especially the descending curve in post failure region.

**Key words** creep, crack extension, simulation

### 中国岩石力学与工程学会(国际岩石力学学会中国国家小组) 申办第十届国际岩石力学大会

根据国际岩石力学学会的章程,国际岩石力学学会中国国家小组申办 2003 年在北京召开第十届国际岩石力学大会,这是进入信息时代的 21 世纪的第一次国际岩石力学大会。

近年来,中国经济建设持续稳步发展,诸如三峡水利水电工程和南水北调工程这样的巨大型岩石工程已经成功在建,大会前后将组织代表们实地考察这些工程,以便与会代表不仅从会议论文集,也能从工程现场观察到与重大工程相关的许多棘手的岩石力学问题。此外,北京是著名的旅游城市,与会代表可以在此观光和领略典型的东方文化。

这次大会的主题为“21 世纪岩石力学与岩石工程的机遇和挑战”。

(摘译自中国岩石力学与工程学会申办该国际会议的报告)