粘弹性围岩力学参数反分析的一种数值法*

朱浮声[1] 薛 琳[2] 李 宏[1] 李国辉[1]
([1]东北大学土木系 沈阳 110006) ([2]青岛建筑工程学院 青岛 266033)

摘要 依据蠕变柔量和广义蠕变柔量概念, 提出了由实测位移反演原岩应力场与粘弹性力学参数的边界元算法, 实现了粘弹性围岩力学参数反演的半解析化。

关键词 蠕变柔量, 广义蠕变柔量, 位移反分析, 边界元法

1 前言

为了研究软弱地层中岩土工程围岩的时变特性, 可以采用粘弹性力学模型。在正确进行岩土工程分析和设计前, 必须首先确定合理的围岩力学参数和原岩应力场。以现场量测信息为基础发展起来的反分析方法是提供这些实用参数的重要手段。

由于岩土工程问题的复杂性, 反分析方法使用的主要工具是工程数值方法。自从Sakurai提出弹性岩体等效弹性模量和原岩应力场的有限单元位移反分析算法以来[1], 位移反分析在弹塑性、粘弹性和粘弹塑性岩体力学参数反演计算中取得了显著进展[2～4], 并对反演建模、模型识别、模型可信度与检验理论等进行了广泛研究[5～7]。对于粘弹性反分析问题, 王芝银等提出了一种有限元算法[3], 李云鹏等则给出了基于“综合模量”概念的边界元算法[8]。

作者发现, 在上述边界元位移反分析法中, 由于“综合模量”反映的是各粘弹性参数的综合特征, 为了得到给定力学模型的粘弹性参数, 必须采用参数回归或参数优化等分离方法进行优化计算。这样不仅增加了计算工作量(机时)和计算机源程序的复杂性, 而且, 产生了新的计算误差。事实上, 如果将粘弹性边界元法的基本解表示为蠕变柔量和广义蠕变柔量的函数, 由此构成的位移反分析边界元法不仅可大大提高计算精度, 减少编程困难, 并且可以直接用于应力反分析法中。

2 粘弹性边值问题的蠕变柔量边界元法

考虑平面应变问题。本文作者提出的粘弹性边值问题的蠕变柔量边界元的实质是, 将粘弹性平面问题的基本解表示为蠕变柔量和广义蠕变柔量的解析函数, 对于几种常见简化粘弹性力学模型, 由于基本解已表达为含有时间项的显式关系式, 边值问题的数值解不必采用通常的Laplace(拉普拉斯)反演, 具有明显优点。

1996年4月26日收到初稿, 1996年10月8日收到修改稿。
* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 49372153)。

位移基本解可以表示为[9]

$$U_{ki} = A_1(x,\ y)J_1(t) + A_2(x,\ y)J_2(t),\quad k,\ i = x,\ y \tag{1}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned} A_1(x,\ y) &= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r}\delta_{ki} + r_{,k}r_{,i}\right) \\ A_2(x,\ y) &= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r}\delta_{ki} + r_{,k}r_{,i}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

在式(1)和(2)中, x 为力点, y 为场点, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_{,i} = (y_k - x_k)/r$, δ_{ki} 为狄拉克函数。$J_1(t)$ 是粘弹性材料的蠕变柔量, 表示瞬时单位力引起的沿力的作用方向伸长量; $J_2(t)$ 则反映此时粘弹性介质的横向变形特征, 称之为广义蠕变柔量。常见 $J_1(t)$ 和 $J_2(t)$ 的解析表达式见文[9]。

类似地, 位移基本解对应的应力表达式为

$$P_{ki} = B_1(x,\ y)C_1(t) + B_2(x,\ y)C_2(t) \tag{3}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned} B_1(x,\ y) &= -\frac{1}{\pi r}\left[n_j r_j\delta_{ki} + \frac{2}{3}n_j r_j r_k r_{,i} - (n_i r_k - n_k r_{,i})\right] \\ B_2(x,\ y) &= -\frac{1}{\pi r}n_j r_j r_k r_{,i} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式(4)中与 $J_1(t)$ 和 $J_2(t)$ 对应的松弛函数 $C_1(t)$ 和广义松弛函数 $C_2(t)$ 也列于文献[9]中。

通常, 间接边界元法可以表达为

$$u_i(y) = \int U_{ik}(y,\ x)P_k(x)\,\mathrm{d}S_x \tag{5}$$

式中: P_k 是物体表面 s 上的虚拟力。

因此, 对于任意边界单元 i, 式(5)可以离散化为以 $J_1(t)$ 和 $J_2(t)$ 表达的代数方程组:

$$\left.\begin{aligned} u_s^i &= \sum_{j=1}^{N}\left[(A_1^{ij})_{ss}(J_1P_s^j) + (A_2^{ij})_{ss}(J_2P_s^j)\right] + \sum_{j=1}^{N}\left[(A_1^{ij})_{sn}(J_1P_n^j) + (A_2^{ij})_{sn}(J_2P_n^j)\right] \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^{N}\left[(A_1^{ij})_{ns}(J_1P_s^j) + (A_2^{ij})_{ns}(J_2P_s^j)\right] + \sum_{j=1}^{N}\left[(A_1^{ij})_{nn}(J_1P_n^j) + (A_2^{ij})_{nn}(J_2P_n^j)\right] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

上式也可以简记为

$$\{u_i\} = [A]\{J\}\qquad i = s,\ n,\ j = 1,\ 2 \tag{7}$$

式中的 $\{J\}$ 包含蠕变柔量与虚拟力乘积作为待定未知量。

3　粘弹性力学参数与 $J_1(t)$ 和 $J_2(t)$ 的关系

一般地, $J_1(t)$ 和 $J_2(t)$ 可以用通式表示为

$$J_i(t) = x_i[1 - y_i w_i(t)]\qquad i = 1,\ 2 \tag{8}$$

式中: x_i 和 y_i 是弹性常数代数表达式, w_i 为

$$w_i(t) = \exp(-\beta_i t) \tag{9}$$

式中: β_i 是粘弹性常数代数表达式。

若由时刻 $t_o > 0$ 开始位移量测, 时间间隔 $\tau_i = t_i - t_o\ (i = 1, 2, \cdots)$。令 $t_i = (i + 1)t_o$,

则有

$$\left.\begin{aligned} J_i(t_1) &= x_i[1 - w_i^2(t_o)] \\ J_i(t_2) &= x_i[1 - w_i^3(t_o)] \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式(10)对 w_i 求解，在时刻 t_o 有

$$w_i(t_o) = J_i(\tau_2)/J_i(\tau_1) - 1 \quad i = 1,\ 2 \tag{11}$$

中间参量

$$Z_i = J_i(\tau_1)/[1 - w_i(t_o)]w_i(t_o) \quad i = 1,\ 2 \tag{12}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} J_i(\tau_1) &= J_i(t_1) - J_i(t_0) \\ J_i(\tau_2) &= J_i(t_2) - J_i(t_0) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

利用定义(8)，(9)及式(12)，不难得到粘弹性简化力学模型的参数与 $J_1(t)$ 和 $J_2(t)$ 的关系式。略去繁复的推演过程，有

Maxwell 模型：

$$\left.\begin{aligned} E_m &= \mu_o/(1 - 4\mu_o)J_2(\infty) \\ \nu_m &= (1 - 6\mu_o)/2(1 - 4\mu_o) \\ \eta_m &= \tau_1/J_1(\tau_1) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式中：

$$\mu_o = \frac{1}{2}[J_2(t_o)\ln w_2(t_o)/J_1(t_o)w_2(t_o)(w_2(t_o) - 1)]^{1/2} \tag{15}$$

$$J_2(\infty) = \frac{1}{2}[J_1(\tau_1)J_2(\tau_1)/w_2(t_o)\ln w_2(t_o)(w_2(t_o) - 1)]^{1/2} \tag{16}$$

Kelvin 模型：

$$\left.\begin{aligned} E_k &= [1 - w_1(t_o)]w_1(t_o)/J_1(\tau_1) \\ \nu_k &= (1 - 6\mu_o)/2(1 - 4\mu_o) \\ \eta_k &= - t_o w_1(t_o)[1 - w_1(t_o)]/J_1(\tau_1)\ln w_1(t_o) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

式中：

$$\mu_o = J_2(\tau_1)w_1(t_o)[1 - w_1(t_o)]/J_1(\tau_1)w_2(t_o)[1 - w_2(t_o)] \tag{18}$$

Kelvin-Voigt 与 Thomson-Poyting 模型：

$$\left.\begin{aligned} E_o &= [\ln w_2(t_o) - \ln w_1(t_o)][1 - w_1(t_o)]w_1(t_o)/(1 - \mu_o)J_1(\tau_1)\ln w_1(t_o) \\ E_f &= [\ln w_2(t_o) - \ln w_1(t_o)][1 - w_1(t_o)]w_1(t_o)/J_1(\tau_1)[\ln w_2(t_o) - \mu_o\ln w_1(t_o)] \\ \nu &= (1 - 3\mu_o)/2(1 - \mu_o) \\ \eta_k &= - t_o E_o E_f/(E_o - E_f)\ln w_1(t_o) \quad (K\text{-}V\ \text{模型}) \\ \eta_v &= t_o E_f(E_o - E_f)/E_o\ln w_1(t_o) \quad (T\text{-}P\ \text{模型}) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

式中：E_o 和 E_f 分别是粘弹性围岩瞬时与长期弹性模量，且有

$$\mu_o = [J_2(\tau_1)w_1(t_o)(1 - w_1(t_o))\ln w_2(t_o)/J_1(\tau_1)w_2(t_o)(1 - w_2(t_o))\ln w_1(t_o)]^{1/2} \tag{20}$$

4 位移反分析

由上述可知，如果 $J_1(t)$ 和 $J_2(t)$ 在给定时刻的值确定，则粘弹性围岩的力学参数可以

很方便地由式(14)～(20)算出, 然而, 方程组(7)中的未知量矢量$\{J\}$包含$J_1 \overset{j}{P}_s$, …, $J_2 \overset{j}{P}_n$的项, 显然, 必须首先确定其中的边界虚拟力$\{\overset{j}{P}_s \overset{j}{P}_n\}$。如果$t=0$时刻的实测位移$\{\bar{u}_i(0)\}$已知, 根据最小二乘法原理, 式(7)可以改写为

$$([A]^T[A])^{-1}[A]^T[T]\{J(0)\} = [T]\{\bar{u}_i(0)\} \tag{21}$$

式中: $[T]$为相对位移和绝对位移间变换矩阵, $[A]$的元素由式(1)和(2)的积分结果给出。

对于一组实测时间相关位移$\{\bar{u}_i(t)\}$, $J_1(t)$和$J_2(t)$可以由下式得到

$$([A]^T[A])^{-1}[A]^T[T]\{J(t)\} = [T]\{\bar{u}_i(t)\} \tag{22}$$

为了得到围岩初始弹性模量和原岩应力场, 可以按线弹性位移及反分析算法[10]进行, 在此不赘述。

5　计算机程序验证

依据本文提出的算法, 编写、调试了粘弹性围岩位移反分析计算机源程序VI-SOBACK, 并与理论解进行了比较。由圆形断面隧道出发, 以解析公式计算的位移值作为程序输入"实测值", 得到了3种简化模型的$J_1(t)$, $J_2(t)$和反算力学参数。结果表明, 数值解与理论解吻合较好。表1列出了Maxwell模型的数值反分析结果与理论解。

表1　Maxwell模型理论解与数值解反分析结果对比

Table 1　Comparison between theoritical and numerical results for the Maxwell model

物理量	理论解	数值解	物理量	理论解	数值解
$J_1(10)/10^{-5}$MPa	4.3200	4.5620	σ^0_{yy}/MPa	7.2	7.3
$J_2(10)/10^{-6}$MPa	3.3854	3.5750	σ^0_{xy}/MPa	0.0	0.0
$J_1(15)/10^{-5}$MPa	8.6401	9.1325	E_m/GPa	0.034	0.035
$J_2(15)/10^{-6}$MPa	4.4405	4.6936	η_m/GPad	0.1157	0.1222
σ^0_{xx}/MPa	5.4	5.6	ν	0.24	0.25

6　结语

蠕变柔量和广义蠕变柔量具有明确的物理意义, 由这些概念出发, 已构造了简单断面形状地下工程位移反分析解析表达式。对于具有任意断面形状的粘弹性围岩, 本文提出的数值算法将模型力学参数表示为$J_1(t)$和$J_2(t)$的代数关系式, 通过实测位移值反算出$J_1(t)$和$J_2(t)$后, 立即可以得到岩体力学参数反分析结果, 毋需进行通常的参数优化计算, 具有快捷、准确的优点。

更重要地, 在反分析中, 通常对岩体力学模型的选取需作出主观猜测, 存在人为因素干扰。目前, 文[11]提出了基于蠕变柔量概念的力学模型判定定理, 从而利用位移反分析得到的$J_1(t)$和$J_2(t)$, 就可以较准确地进行流变模型识别, 这也是本数值算法提出的主要理由和重要优点。

参 考 文 献

1 Sakurai S, Takeuchi K. Back analysis of measured displacement of tunnel. Rock Mech. Rock Engg., 1983, 16(3): 173～180

2 郑颖人, 张德微, 高效伟. 弹塑性问题反演计算的边界元法. 见: 中国土木学会第三届年会论文集, 上海: 同济大学出版社, 1986

3 Wang Zhiyin, Liu Huaiheng. Back analysis of measured rheologic displacements of underground openings. In: Proc. 6th Conf. Num. Meth. Geomech., 1988, (4): 2291～2297

4 王芝银, 李云鹏. 地下工程围岩粘弹塑性参数反分析. 水利学报, 1990, (9): 17～21

5 袁勇. 岩土工程中的系统辨识理论及其工程应用[博士学位论文]. 上海: 同济大学, 1991

6 刘维宁. 逆问题的信息理论及其在岩土工程中的应用[博士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 1991

7 熊顺成. 拱坝监测分析系统理论及应用研究[博士学位论文]. 北京: 中国科学院地质研究所, 1992

8 李云鹏, 王芝银. 粘弹性位移反分析的边界元法. 西安矿业学院学报, 1989, (1): 89～92

9 朱浮声, 薛琳. 粘弹性边值问题的蠕变柔量边界元法. 东北大学学报, 1996, 17(1): 4～7

10 Shimizu N, Sakurai S. Application of boundary element method for back analysis associated with tunnelling problems. In: Proc, 5th Int. Conf. B. E., 1983, 645～654

11 薛琳. 岩体粘弹性力学模型的判定定理与应用. 岩土工程学报, 1994, 16(5): 1～10

A NUMERICAL METHOD FOR PARAMETER BACK ANALYSIS OF VISCOELASTIC ROCK MASS

Zhu Fusheng[1] Xue Lin[2] Li Hong[1] Li Guohui[1]

([1] *Northeastern University, Shenyang* 110006)

([2] *Qingdao Institute of Architecture and Engineering, Qingdao* 266033)

Abstract A numerical method of parameter back analysis is presented for viscoelastic rock mass based on the creep compliance and the generalized creep compliance concepts. The model can be selected by the identification theory of the viscoelastic models and the rock parameters can be calculated by the semi-analytical method proposed.

Key words creep compliance, displacement back analysis, boundary element