

基于显式垂直比例因子的显式 分形插值地震数据重建

李信富^{1,2}, 李小凡²

(1. 地下信息探测技术与仪器教育部重点实验室(中国地质大学,北京),北京 100083;

2. 中国科学院地质与地球物理研究所,岩石圈演化国家重点实验室,北京 100029)

摘 要 在前人工作的基础上对分形插值方法作了详细的探讨,给出了分形插值函数的显式表达方式.在量纲分析的基础上给出了垂直比例因子的局部显式表达式,旨在提高地震道插值重建的精度及突出局部信息,并从单道地震图的角度分析其在地震道插值重建中的应用效果.研究了垂直比例因子的变化对分形插值精度的影响.数值实验表明,随着垂直比例因子的增大,分形垂直的误差逐渐增大,二者之间呈现出指数增长的趋势.该法克服了随机分形插值方法必须进行多步迭代的弱点,提高了计算效率.通过对理论地震道插值重建的分析,说明了本文分形插值方法的高精度和高效率.本文提出的显式分形插值方法既能够突出地震道数据的局部信息,又较好地保持了地震道数据的总体变化趋势.

关键词 迭代函数系统,仿射变换,显式分形插值,垂直比例因子,地震数据重建

中图分类号 P315

文献标识码 A

文章编号 1004-2903(2008)04-1085-07

Seismic data reconstruction by explicit fractal interpolation based on explicit vertical scaling factors

LI Xin-fu^{1,2}, LI Xiao-fan²

(1. Key Laboratory of Geo-detection (China University of Geosciences, Beijing), Ministry of Education, 100083, China;

2. State Key Laboratory of Lithospheric Evolution, Institute of Geology and Geophysics,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)

Abstract In order to improve the accuracy of the reconstructed seismic data, this paper makes a detailed study into the fractal interpolation method on the basis of the former work. The explicit expression of the fractal interpolation function is applied and the locally explicit expression for the vertical scaling factors is put forward on the basis of dimension analysis. At the same time the interpolating accuracy is analyzed from the single trace seismographs. The influence of the vertical scaling factors on the precision of the fractal interpolation has been investigated. The numerical experiments demonstrate that the interpolating residual is in proportion to the exponent function with increasing vertical scaling factors. This explicit fractal interpolation method avoids the iteration that is inevitable in the traditional interpolation method, and then it improves the computational efficiency. By analyzing the theoretical seismograms and the reconstructed seismograms and the differences between them, the numerical results demonstrate that the fractal interpolation method put forward here has high accuracy. The method not only makes the local information obvious but also preserves the overall characteristics well of the seismic data.

Keywords Iterated Function Systems (IFS), affine transform, fractal interpolation, vertical scaling factors, seismic data reconstruction

收稿日期 2007-12-10; 修回日期 2008-03-20.

基金项目 地下信息探测技术与仪器教育部重点实验室开放课题(No. GDL0709)和国家自然科学基金重点项目(项目编号:40437018)联合资助.

作者简介 李信富,男,1976年生,汉族,山东潍坊人,博士,主要从事天然地震层析成像、复杂介质地震波场数值模拟及非线性插值方法的研究.(E-mail: xinfu@cugb.edu.cn)

0 引言

上世纪70年代 Mandelbrot 在文献[1]中首次提出分形的概念,而分形概念的提出正是从自然界的无规则方面提出来的,因此用分形来研究自然界形态就成为可能. 1986年美国数学家 M. F. Barnsley 在文献[2]中首先提出分形插值的概念,这给出了拟合数据的一种新思想,在地震学研究和地震数据处理中显示了新的应用前景. 在文献[3~5]中可以见到分形的随机生成方法的研究. 但是,用随机方法生成的分形通常不能满足实际研究工作的需要. 在实际工作中,往往已知研究对象的部分信息,需要通过这些部分信息和特征,拟合出研究对象的局部形态,从而对研究对象的局部细节进行研究,这就需要用到分形插值的理论和方法. 地震学的数据由于各种原因,往往出现道缺失或数据异常的现象,如何根据有用信息来恢复缺失的信息一直是困扰勘探地震工作者的一个问题. 前人曾提出了多种数据重建方法^[6~12],但这些方法有的需要对同相轴进行静校正,有的需要在频率域进行,有的计算量太大,耗费计算资源太严重等,然而分形插值方法给出了一种更高精度和更高效率的解决方案. 在文献[13~18]中可以看到分形插值的具体实现及其应用的研究. 但在此类研究中,通常用随机方法生成的分形,由于垂直比例因子为一常数,对局部信息不甚敏感,因而插值精度颇受局限,局部信息损失较大. 本文从一个新的角度给出了分形插值函数的显式表达并根据量纲分析的方法给出了垂直比例因子的显式表达形式,旨在提高地震道插值重建的精度及突出局部信息,并从单道地震图的角度分析其在地震道插值重建中的应用效果. 同时定性研究了垂直比例因子的变化对分形插值精度的影响.

1 分形插值的理论基础

我们称具有如下形式的点集为数据集

$$\{(x_i, F_i) \in R^2; i = 0, 1, 2, \dots, N\}, \quad (1)$$

其中 $x_0 < \dots < x_N$; 相应于此数据集的插值函数是一个满足插值条件 $f(x_i) = F_i, i = 0, \dots, N$ 的连续函数 $f: [x_0, x_N] \rightarrow R$. 点 $(x_i, F_i) \in R^2$ 叫做插值点,我们说函数 f 插值于这些数据.

我们知道, R^2 上迭代函数系统 IFS 的吸引子通常是分形,从而我们可以构造一个 R^2 上的迭代函数系统,使其吸引子恰为插值于给定数据集 $\{(x_i, F_i); i = 0, 1, \dots, N\}$ 的连续函数

$f: [x_0, x_N] \rightarrow R$ 的图像.

本文提出的显式分形插值是基于迭代函数系统 (Iterative Function Systems, IFS) 理论而实现的. 迭代函数系统的构造方法如下^[19]:

给定闭区间 $\Omega = [x_0, x_N] \subset R$, 令 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq b$ 是 Ω 的一个划分,其中 $N \geq 2$. 令 y_1, y_2, \dots, y_N 是任意一组实数,数据集 $\{(x_n, y_n) \in \Omega \times R, n = 0, 1, 2, \dots, N\}$.

记 $\Omega_n = [x_{n-1}, x_n], K = \Omega \times [a, b], (-\infty < a < b < \infty)$, 令 $L_n: \Omega \rightarrow \Omega_n$ 是一个压缩同胚,满足条件

$$L_n(x_0) = x_{n-1}, L_n(x_N) = x_n. \quad (2)$$

并且对某个 $0 < l_n < 1$, 有

$$|L_n(c_1) - L_n(c_2)| \leq l_n |c_1 - c_2|, c_1, c_2 \in \Omega \quad (3)$$

连续函数 $F_n: K \rightarrow [a, b], n \in \{1, 2, \dots, N\}$ 满足条件

$$F_n(x_0, y_0) = y_{n-1}, F_n(x_N, y_N) = y_n \quad (4)$$

并且对某个 $0 < q_n < 1$, 有

$$|F_n(c, c_1) - F_n(c, c_2)| \leq q_n |c_1 - c_2|, \quad c \in \Omega; c_1, c_2 \in [a, b] \quad (5)$$

定义映射 $\omega_n: K \rightarrow K$ 为

$$\omega_n \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_n(x) \\ F_n(x, y) \end{pmatrix}, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (6)$$

则 $\{K; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ 构成一个迭代函数系统.

若存在 Ω 上的连续函数 f , 使得 f 的图像

$$G = Graph(f) = \{(x, f(x)) | x \in \Omega\}$$

是迭代函数系统 $\{K; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ 的不变集,即 $G = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(G)$, 并且有 $f(x_n) = y_n, n = 1, 2, \dots, N$. 我们称这样的函数 f 是对应于 $\{K; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ 的分形插值函数 (Fractal Interpolation Function, 简称 FIF).

一般情况下,我们取 $L_n(x)$ 和 $F_n(x, y)$ 为线性函数,此时映射(6)可取为仿射变换的形式

$$\omega_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

此时有

$$L_n(x) = a_n x + e_n,$$

$$F_n(x, y) = c_n x + d_n y + f_n.$$

根据(3)和(5)可知 $|a_n| < 1, |d_n| < 1$, 从而变换(7)是一个压缩变换. 系数 a_n, c_n, e_n 和 f_n 由

$\omega_n(x_0, y_0) = (x_{n-1}, y_{n-1})$ 和 $\omega_n(x_N, y_N) = (x_n, y_n)$ 确定. $|d_n| < 1$ 是自由变量,称为垂直比例因子. 此时由迭代函数系统所确定的分形插值函数,我们称之为自仿射分形插值函数.

2 分形插值成立的条件及稳定性分析

任何插值方法都必须满足一定的条件,分形插值方法也不例外. 下面就给出分形插值成立的条件^[20].

设 IFS: $\{K, \omega_n; n = 1, 2, \dots, N\}$ 及 $f(x)$ 如前定义, 那么 $G = \{(x, f(x)); x \in \Omega\}$ 是该 IFS 的唯一吸引子的充要条件为:

$$F_n(x, y) = f(L_n(x)), \tag{8}$$

对一切 $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ 成立.

假设迭代函数系统、仿射变换如前所述. 因为勘探地震学中的地震道一般都是等距的,所以这里考虑等距插值问题,即

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{N}(x_N - x_0),$$

$$n = 1, 2, \dots, N, x_0 < x_1 < \dots < x_N \tag{9}$$

设 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ 和 $(x_0, y'_0), (x_1, y'_1), (x_2, y'_2), \dots, (x_N, y'_N)$ 是两组等距插值节点,用前面方法得到的分形插值函数分别为 f 和 p ,那么我们有

$$f - p \leq \frac{1+d}{1-d} \max\{|y_n - y'_n|; n = 0, 1, 2, \dots, N\}. \tag{10}$$

从上面的叙述可以看出,当插值节点有一个小的扰动时,其对应的分形插值函数也仅仅有一小小的扰动,即分形插值是稳定的. 这个结论就是垂直比例因子变化时分形插值的稳定性条件^[21].

3 垂直比例因子的选取方法及其变化对分形插值精度的影响

为了研究垂直比例因子对分形插值精度的影响,本文以函数曲线 $y = \sin^3 x$ 和 Ricker 子波函数 $f(t) = [1 - 2(\pi gt)^2]e^{-(\pi gt)^2}$ 为实验函数,分析随垂直比例因子 d_n 的变化,分形插值误差的变化趋势. 首先看垂直比例因子取具体数值的情形.

表 1 是函数曲线 $y = \sin^3 x$ 分形插值拟合中,垂直比例因子 d_n 和相应的误差数据. 图 1 表示的是 $y = \sin^3 x$ 对应于不同垂直比例因子的分形插值拟合曲线,图 2 是拟合误差随垂直比例因子 d_n 的变化而变化的曲线.

表 1 垂直比例因子和相应的插值误差 ($y = \sin^3 x$)
Table 1 Vertical scaling factors and the corresponding interpolation errors

d_n	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.90
error(%)	0.03	0.09	0.18	0.29	0.45	0.67	1.02	1.65	3.12	4.96

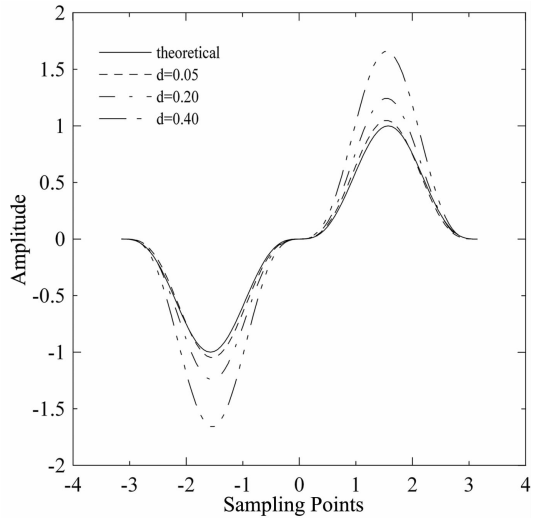


图 1 不同垂直比例因子对应的分形插值拟合曲线 ($y = \sin^3 x$)

Fig. 1 Fractal interpolated fitting curves corresponding to different vertical scaling factors ($y = \sin^3 x$)

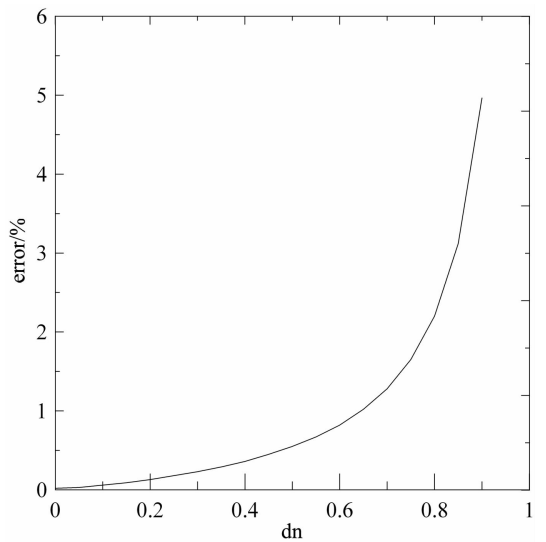


图 2 拟合误差随垂直比例因子的变化

Fig. 2 Variations of fitting errors with the vertical scaling factors

表 2 是 Ricker 子波函数曲线 $f(t) = [1 - 2(\pi gt)^2]e^{-(\pi gt)^2}$

分形插值拟合中,垂直比例因子 d_n 和相应的误差数据.图3表示的是 Ricker 子波函数对应于不同垂直比例因子 d_n 的分形插值拟合曲线,图4是拟合误差随垂直比例因子 d_n 的变化而变化的曲线.

表2 垂直比例因子和相应的插值误差(Ricker函数)

Table 2 Vertical scaling factors and the corresponding interpolation errors

d_n	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.90
error(%)	0.016	0.06	0.12	0.20	0.30	0.46	0.70	1.13	2.14	3.41

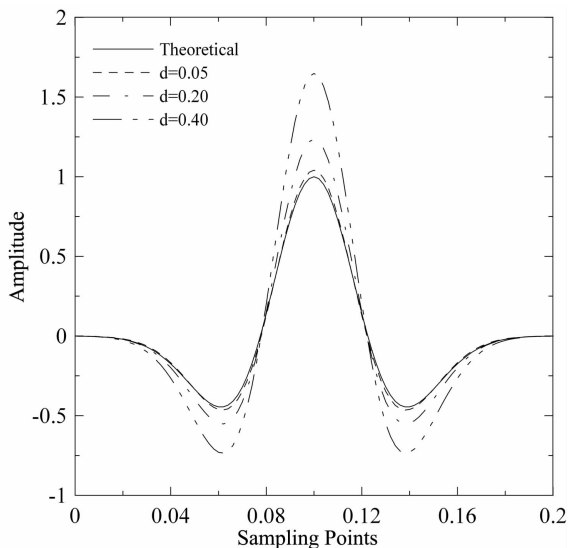


图3 Ricker子波不同垂直比例因子对应的分形插值拟合曲线

Fig. 3 Fractal interpolated fitting curves of Ricker wavelet corresponding to different vertical scaling factors

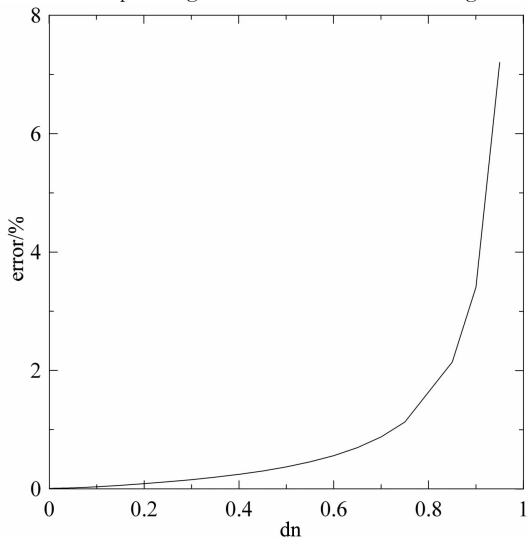


图4 拟合误差随垂直比例因子的变化

Fig. 4 Variations of fitting errors with the vertical scaling factors

从上面图1和图3中可以看出,随着垂直比例因子的逐渐增大,分形插值拟合曲线逐渐远离理论曲线,说明随着垂直比例因子的增大,分形插值拟和误差逐渐增大,其插值的精度逐渐降低.图2和图4清晰地说明了这一点.从图2和图4可以看出,分形插值的误差随垂直比例因子的增大而近似呈现出指数增长的规律.

为了考察垂直比例因子对实验函数局部的细节和待插值对象整体特征的影响,我们按照量纲分析的方法选取垂直比例因子的表达式,并研究其对插值结果整体特征的影响.

$$d_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{\epsilon \cdot \sqrt{(y_{\max} - y_{\min})^2 + (y_n - y_{n-1})^2}}, \quad (11)$$

其中 y_{\max}, y_{\min} 是以待插值点为中心前后各扩展 n_0 个点得到的区间中的最大和最小值.即,如果待插值点编号为 ip ,则有 $y_{\min}, y_{\max} \in [ip - n_0, ip + n_0]$, $\epsilon = 1.0 + \text{random}(\delta)$, $\text{random}(\delta)$ 是计算机内部的随机函数,它用于产生一个0到1之间的随机数.由 y_n, y_{n-1} 体现局部信息, y_{\max}, y_{\min} 体现全局信息,而随机数的产生保证了分形本身的性质.下面我们以 Ricker 函数为例来进行讨论.

从下面的图5和图6可以看出,虽然垂直比例因子的变化很剧烈,但是拟合精度仍然非常高,说明垂直比例因子的局部变化并不显著影响拟合数据的整体形态,而是使得局部信息更加突出.也就是说,显式垂直比例因子分形插值方法既保留了数据整体的分布信息,又突出了数据的局部信息.

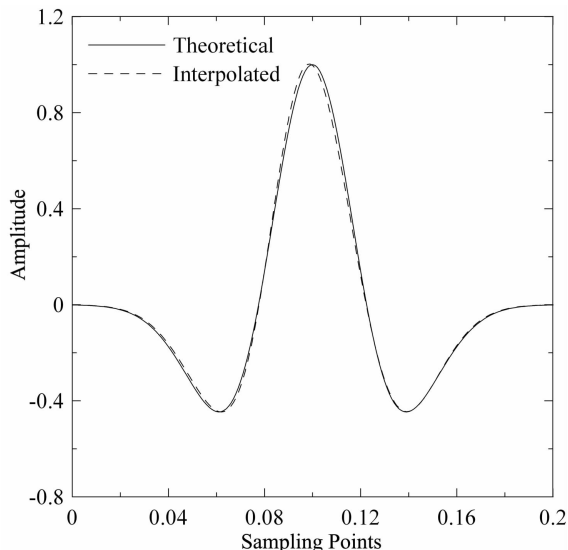


图5 显式垂直比例因子的 Ricker 函数分形插值曲线

Fig. 5 Fractal interpolated curve of Ricker wavelet with explicit vertical scaling factors

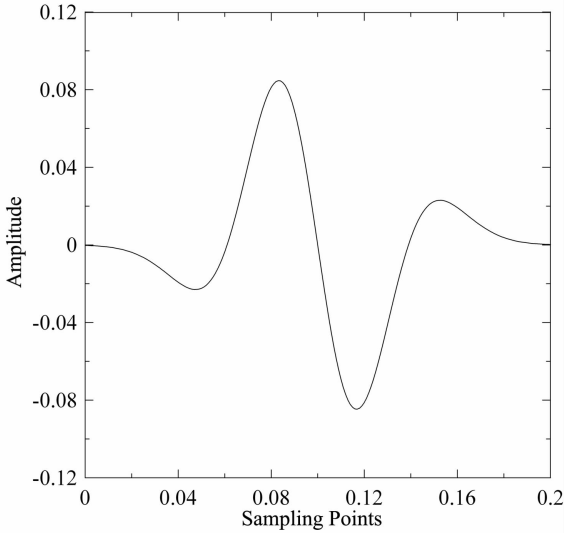


图 6 垂直比例因子随插值点的变化而变化的图形

Fig. 6 Variation curve of the vertical scaling factors with the interpolating points

4 分形插值的实现

对于如下形式的仿射变换

$$\omega_n \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n x + e_n \\ c_n x + d_n f(x) + f_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_n x + e_n \\ f(a_n x + e_n) \end{pmatrix} \quad x \in [x_{n-1}, x_n]. \quad (12)$$

根据分形插值成立的条件,将上式展开得到

$$f(x) = c_n x + d_n f(x) + f_n \text{ 即}$$

$$f(x) = \frac{c_n x + f_n}{1 - d_n}, \quad (13)$$

系数 c_n 和 f_n 的值由 $\omega_n(x_0, y_0) = (x_{n-1}, y_{n-1})$ 和 $\omega_n(x_N, y_N) = (x_n, y_n)$ 确定.

5 数值检验

为了检验我们提出的显式分形插值方法的有效性,我们对一个横向非均匀模型的合成共炮集记录进行了插值处理.图 7 是模型几何结构示意图,表 3 是相应的物理参数.我们比较了原始地震图与插值重建道的地震图之间的精度.

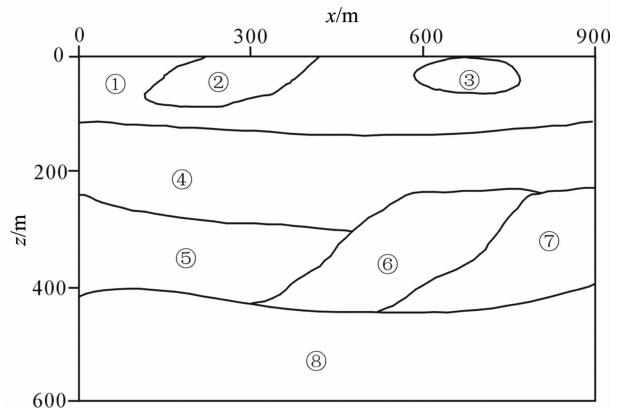


图 7 检验模型的几何结构

Fig. 7 Geometrical structure of the testing model

表 3 检验模型的物性参数

Table 3 Parameters of the testing model

介质编号	C_{11} (10^{10} Pa)	C_{13} (10^{10} Pa)	C_{33} (10^{10} Pa)	C_{55} (10^{10} Pa)	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)	ϵ	δ	ρ (kg/m^3)
①	1.8816	0.6528	1.8816	0.6144	2800	1600	0.00	0.00	2400
②	2.3489	0.7869	2.0605	0.6670	2900	1650	0.07	0.03	2450
③	2.3880	0.8282	2.1321	0.6833	2950	1670	0.06	0.03	2450
④	3.1233	0.9643	2.4025	0.8100	3100	1800	0.15	0.08	2500
⑤	4.0064	1.2295	2.8617	0.9499	3350	1930	0.20	0.10	2550
⑥	3.8322	1.3202	2.7770	0.9400	3300	1920	0.19	0.17	2550
⑦	3.5625	1.1691	2.8730	0.9734	3350	1950	0.12	0.09	2560
⑧	3.3696	1.0764	3.3696	1.1466	3600	2100	0.00	0.00	2660

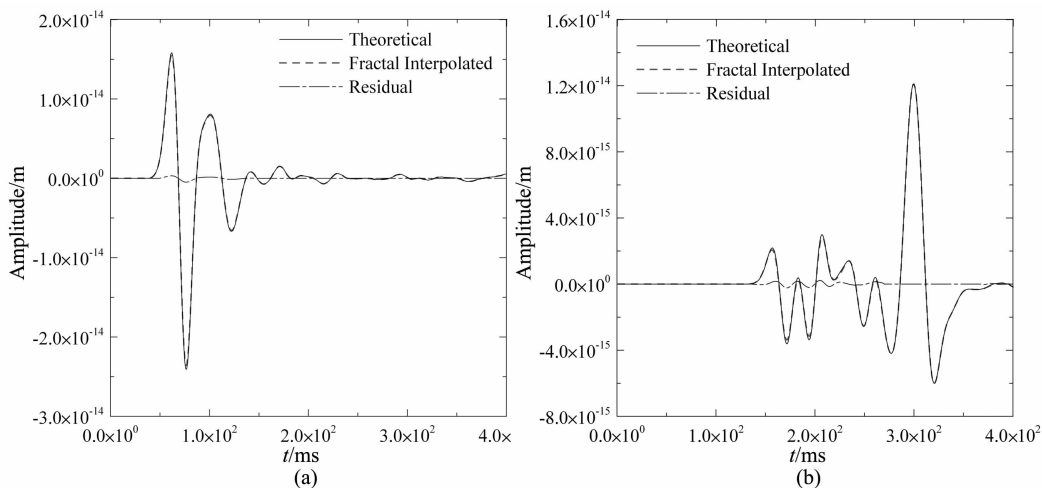


图 8 分形插值重建的地震图, (a) (b) 对应不同的偏移距

Fig. 8 Seismograms reconstructed by fractal interpolation, (a) (b) correspond to different offsets

上图(a)、(b)中黑色实线表示原始地震图,虚线表示分形插值重建的地震图,划线表示分形插值重建的残差.地震道重建中的误差主要来源于相位突变点的误差,因此对误差的考查也主要从相位突变点来考查.为了从数值上定量说明重建误差,我们利用公式 $u_{Error} = u_{theo} - u_{inter}$ 定量计算了每一道的重建误差,误差曲线如图中划线所示.从误差曲线可以看出,个别时间节点误差稍微有点大,绝大多数节点误差非常小.从计算结果可以看到,分形插值重建的地震图与理论地震图之间的节点误差非常小,从而说明我们提出的方法具有精度上的优越性.

从数值实验结果可以看出,本文提出的分形插值方法可以很好地重建地震道,由于对垂直比例因子采用了局部变化的策略,使得我们的方法在整体上精度有了较大程度的提高.虽然垂直比例因子的变化很剧烈,但是拟合精度仍然非常高,说明垂直比例因子的局部变化并不显著影响拟合数据曲线的整体形态,而是使得曲线的局部信息更加突出.也就是说,我们提出的显式表达方法既保留了数据整体的分布信息,又突出了数据的局部信息.

6 讨论和结论

(1)分形插值克服了传统的插值方法不能反映两相邻已知点之间的局部特性的局限性.本文克服了传统分形插值方法不能够得到各个插值点上具体函数值的缺点,可以得到每个插值点上具体的函数值,使得进行误差分析和优劣性评价切实可行.

(2)本文发展的显式分形插值方法,由于在每一个局部的小区间上进行计算,克服了传统分形插值

方法必须进行多步迭代的弱点,可以一步计算到位,提高了计算效率.

(3)由于对垂直比例因子采用了局部变化的策略,克服了传统插值方法中整个计算过程采用同一垂直比例因子的缺陷,并给出了垂直比例因子的显式表达式,使得我们的方法在整体上对理论地震图的重建精度优于传统方法.定量计算结果表明,分形插值的误差随垂直比例因子的增大大致呈指数规律增长.模型数值实验证明我们发展的显式分形插值方法既能够突出数据的局部信息,又很好地保持了原始数据的总体变化趋势.

(4)本文研究结果所影响的范围为所有与精确插值有关的研究领域,只要是该领域的研究工作,本方法都具有参考和借鉴意义.

致谢 感谢中国科学院地质与地球物理研究所李幼铭研究员和张美根副研究员的有益讨论.

参 考 文 献 (References):

- [1] Mandelbort B. B.. How long is the coastline of Britain?, Statistical self-similarity and Fractal Dimension[J]. Science, 155: 636~638.
- [2] Barsley M. F. Fractal functions and interpolation[J]. Constructive Approximation, 1986 (2);303~329.
- [3] 胡瑞安,胡纪阳,徐树公.分形的计算机图象及其应用[M].北京:中国铁道出版社,1995,61~85.
HU Rui-an, HU Ji-yang, XU Shu-gong. Computer Graphics and Applications of Fractal[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1995,61~85.
- [4] 宋万寿,杨晋吉.一种地表造型方法[J].小型微型计算机系统, 1996(3):32~36.

- Song W S, Yang J J. Modeling method for the earth's surface [J]. *Mini-Micro Systems*, 1996 (3): 32~36.
- [5] Xie H P. Fractals in rock mechanics[M]. Netherlands: A. A. Balkema Publishers, 1993, 70~78.
- [6] Larner K, Gibson B, Rothman D. Trace interpolation and the design of seismic surveys[J]. *Geophysics*, 1981, 46: 407~415.
- [7] Kabir M M N, Verschuur D J. Restoration of missing offsets by parabolic Radon Transformation [J]. *Geophys. Prosp.* 1995, 43: 347~368.
- [8] Ronen, J. Wave equation trace interpolation[J]. *Geophysics*, 1987, 52: 973~984.
- [9] Spitz S. Seismic trace interpolation in F-X domain[J]. *Geophysics*, 1991, 56: 785~794.
- [10] Porsani M J. Seismic trace interpolation using half-step prediction filters[J]. *Geophysics*, 1999, 64: 1461~1467.
- [11] 孟小红, 胡朝顺, 刘海英, 等. 利用非均匀快速傅立叶变换进行地球物理数据插值[J]. *长春科技大学学报*, 2000, 30(Suppl.): 150~153.
Meng X H, Hu C S, Liu H Y, *et al.* The application of non-uniform fast fourier transform to interpolation of geophysical data[J]. *Journal of Changchun University of Science and Technology (in Chinese)*, 2000, 30(Suppl.): 150~153.
- [12] 张红梅, 刘洪. 基于稀疏离散 τ - p 变换的非均匀地震道重建[J]. *石油物探*, 2006, 45(2): 141~145.
Zhang H M, Liu H. Sparseness discrete τ - p transform in irregular seismic trace reconstruction[J]. *Geophysical Prospecting for Petroleum*, 2006, 45(2): 141~145.
- [13] Craig M, Wittenbrink. IFS Fractal Interpolation for 2D and 3D Visualization[C]. *Proceedings of the 6th IEEE Visualization Conference (VISUALIZATION '95)*, 1995: 77~84.
- [14] 孙博文, 葛江华, 张彤. 分形插值函数及其应用[J]. *机电与控制学报*, 1996, 19(4): 540~543.
Sun B W, Ge J H, Zhang T. Fractal interpolated function and its application[J]. *Electric Machines and Control*, 1996, 19(4): 540~543.
- [15] 杨松林. 分形插值方法及其应用[J]. *铁道师院学报*, 2000, 17(3): 9~14.
Yang S L. Fractal interpolation and its applications[J]. *Journal of Suzhou Railway Teachers College*, 2000, 17(3): 9~14.
- [16] 徐群芳. 分段分形插值对平面曲线拟合的研究[J]. *雁北师范学院学报*, 2003, 19(5): 5~7.
Xu Q F. Study on subsection fractal interpolation for plane curve fitting [J]. *Journal of Yanbei Normal University*, 2003, 19(5): 5~7.
- [17] 范玉红, 栾元重, 王永, 等. 分形插值与传统插值方法相结合的研究[J]. *测绘科学*, 2005, 30(2): 76~77, 80.
Fan Y H, Luan Y Z, Wang Y, *et al.* The method study of combination of fractal interpolation and linear interpolation [J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2005, 30(2): 76~77, 80.
- [18] 杨杰. 分形插值及其分形维数研究[J]. *武汉工业学院学报*, 2006, 25(1): 9~11.
Yang J. Study of fractal interpolation and fractal dimension [J]. *Journal of Wuhan Polytechnic University*, 2006, 25(1): 9~11.
- [19] 沙震, 阮火军编著. 分形与拟合[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2005: 123~130.
Sha Z, Ruan H J. *Fractals and fitting* [M]. Hangzhou: Zhengjiang University Press, 2005: 123~130.
- [20] 龙晶凡. 分形插值的条件[J]. *北京师范大学学报(自然科学版)*, 2001, 37(3): 289~291.
Long J F. The condition of fractal interpolation[J]. *Journal of Beijing Normal University(Natural Science)*, 2001, 37(3): 289~291.
- [21] 冯志刚, 周其生. 关于一类分形插值稳定性问题[J]. *安庆师范学院学报(自然科学版)*, 1998, 4(4): 18~21.
Feng Z G, Zhou Q S. Stability of a kind of fractal interpolation[J]. *Journal of Anqing Teachers College (Natural Science)*, 1998, 4(4): 18~21.