

# 地下水位变化的数值模拟新方法

马秀媛<sup>1</sup>, 李曙光<sup>2</sup>, 朱维申<sup>1</sup>

(1. 山东大学 岩土与结构工程研究中心, 山东 济南 250061;

2. 密歇根州立大学 土木与环境工程系, 东兰辛 48824, 美国)

**摘要:** 尽管地下水数值计算技术和计算方法发展很快, 地下水数值模拟仍然存在着大量的理论问题和实际问题需要研究解决, 仍有很多局限性, 由此可知, 地下水模拟过程中充满了各种各样的不确定因素。如何利用和改进现有技术, 减少模型的不确定性, 提高数值模拟过程的有效性和预测结果的可靠性, 是该研究领域具有挑战性的问题之一。在传统地下水数值模拟的基础上, 提出一种预测地下水位变化的新的方法。该方法可以在拥有较少现场资料的情况下, 对地下水水位的变化直接进行的预测。本研究的创新点在于减少模拟过程及模型校正过程中对输入数据的需求, 简化边界条件; 同时引入反复迭代方法求解控制方程, 减少计算误差。该研究成果应用到实践中去, 可以大大提高对地下水水位的预测能力, 此项研究及其成果将对水资源管理产生重大影响, 对岩土工程设计及施工提供指导。

**关键词:** 数值模拟; 地下水; 摄动方法; 水位变化; 迭代法

**中图分类号:** O 241

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2008)增1 - 3159 - 07

## A NEW NUMERICAL METHOD FOR MODELING GROUNDWATER LEVEL VARIATION

MA Xiuyuan<sup>1</sup>, LI Shuguang<sup>2</sup>, ZHU Weishen<sup>1</sup>

(1. *Research Center of Geotechnical and Structural Engineering, Shandong University, Jinan, Shandong 250061, China;*

2. *Department of Civil and Environmental Engineering, Michigan State University, East Lansing 48824, USA*)

**Abstract:** Although there is a vast development of the calculation methods and techniques of groundwater numerical simulation, it has some limitations in theories and practicalities and needs to be further researched and resolved. Therefore, the groundwater modeling process is still permeated with all kinds of uncertain factors. It is one of the largest challenges in this research field to fully utilize and improve the technologies on hand to eliminate the modeling uncertainty, to promote the validity of the numerical simulation process and the reliability of the forecasted results. Based on the traditional groundwater numerical modeling, a new groundwater model to make direct predictions on the groundwater level changes caused by the local stress fluctuations is developed. The variation governing equations related to confined and unconfined aquifers have been developed. It is verified that the simulation process for confined aquifer is as the same as those of traditional numerical simulation process. Otherwise, it is only approximation for unconfined aquifer. The predicted error will be increased as long as the increase of the absolute value of net change. This study introduces an iteration scheme, which can improve the perturbation results. The proposed new modeling reduces the requirements of input data in the modeling processes, and it can also simplify the boundary conditions and, at the same time, introduce the iteration scheme

**收稿日期:** 2008 - 01 - 16; **修回日期:** 2008 - 02 - 28

**基金项目:** 国家自然科学基金重点项目(90510019); 国家自然科学基金面上项目(50579033); 国家重点基础研究发展规划(973)项目(2002CB412705)

**作者简介:** 马秀媛(1965 -), 女, 博士, 1986年毕业于四川大学水利水电工程专业, 现任副教授, 主要从事岩土工程及地下水渗流方面的教学与研究。E-mail: maxiyuan@sdu.edu.cn

in solving the governing equation. When putting the results into practical use, it will increase prediction accuracy. This research will bring potential contributions to the water resources management and provide guidance for design and construction of geotechnical engineering.

**Key words:** numerical simulation; groundwater; perturbation method; groundwater level variation; iteration algorithm

## 1 引言

降水和地表径流的减少以及地下水的严重超采是引起局部地下水位减少的主要原因;全球性气候变暖加长降雨历程、增大降雨强度则会导致地下水位的上升。地下水位的上升可能产生或诱发一系列的岩土工程问题<sup>[1]</sup>。例如地下水位上升,会引起岩土体的承载力降低、砂土液化和冻胀等,也会引起洞室淹没、建筑物失稳等一系列不良岩土工程问题。地下水位下降往往会引起地表塌陷、地面沉降、海(咸)水入侵和地裂缝等一系列不良的地质问题<sup>[2]</sup>。无论是从水资源管理的角度还是从岩土工程的设计施工等方面考虑,及时有效地预测地下水水位的变化情况十分必要<sup>[3]</sup>。

由于计算技术和计算方法的进步,解算数学模型已经成为地下水定量评价的主要手段<sup>[4]</sup>。如果用传统的地下水模拟过程来预测地下水水位的变化<sup>[5]</sup>,首先要建立模型,接着进行模型校正以满足已有的初始条件,运行模型得到应力变化前的地下水水位分布,外界条件改变以后,重新运行模型,得到改变后的地下水水位分布值,最后通过计算改变前后水位分布的差值得到其变化量。由于建立地下水模型需要大量的现场资料作为输入数据和进行模型校正,现场资料的缺乏造成模型校正的困难,测量误差和自然环境变化引起的现场数据的不确定性转化成参数估计的不确定性,进一步影响到模型的预测结果的精确性<sup>[6~9]</sup>。

在通常情况下,地下水水位变化只与少数参数有关。如果能建立一种数学模型,直接模拟变化值,则可以减少对现场资料的需求,减少传统模拟方法中许多不确定因素的影响,提高模拟过程的效率和精确度。例如,如果只关心抽取地下水对环境的影响,可以假设河流水位变化以及降雨入渗率变化为零,模型边界可以远离影响区域并且设为无水流交换边界。在这种情况下,仅仅需要知道渗透系数及

地表水体的渗漏系数等少数几类水文地质参数即可建立模型和进行模型校正。由于变化值是从零开始计算,因此模拟时的初始条件值可以设为零。由于减少了对数据的需求及将边界设在远离影响区域之外,可以减少由于数据和边界条件引起的不确定性。

基于以上的考虑,本文在传统地下水数值模拟的基础上,引进摄动理论,提出了一种预测地下水水位变化的新方法。该新方法可以在拥有较少现场资料的情况下,对地下水水位的变化直接进行的预测,减少模拟过程及模型校正过程中对输入数据的需求,并简化边界条件。

## 2 地下水流控制方程

### 2.1 传统的地下水流控制方程

当不考虑地下水密度变化的条件下,假定渗透系数的主轴方向与坐标轴的方向一致,则孔隙介质中地下水在三维空间中的流动可用下面的偏微分方程<sup>[10]</sup>表示:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( T_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} - R + L \quad (1)$$

式中:  $T_i$  ( $i = xx, yy, zz$ ) 为导水系数;  $h$  为水头;  $R$  为源汇项,包括抽水量和降雨入渗;  $L$  为越流量;  $S$  为孔隙介质的贮水率;  $t$  为时间。

(1) 边界条件:

$$ah + b \frac{\partial h}{\partial n} = f(x, y, z, t) \quad (2a)$$

① 定水头边界:

$$b = 0, a = 1, h = f_1(x, y, z, t) \quad (2b)$$

② 定流量边界:

$$a = 0, b = K \nabla F(x, y), b \frac{\partial h}{\partial n} = f_2(x, y, z, t) \quad (2c)$$

③ 混合边界:

$$L(h - h_0) | \nabla F | = -K \frac{\partial h}{\partial n} \nabla F \quad (2d)$$

即

$$a = L|\nabla F|, b = K\nabla F, f(x, y, z, t) = -h_0|\nabla F| \quad (2e)$$

(2) 初始条件:

$$h = h_0(x, y, z, 0) \quad (3)$$

目前求解地下水控制方程的数值方法主要有有限差分法(FDM)、有限单元法(FEM)、边界元法(BEM)和有限分析法(FAM)等, 在大多数地下水数值模型中采用有限差分法求解地下水控制偏微方程。国外开发了许多功能多样的地下水系统数值模拟软件<sup>[11~13]</sup>, 以其模块化、可视化、交互性、求解方法多样化等特点得到广泛应用。

### 2.2 地下水水位变化控制方程

在传统地下水控制方程的基础上, 考虑到相关条件变化引起水文地质参数及地下水水位发生变化的情况, 通过对方程中的变量进行分解, 推导出含有初始项和摄动项的控制方程, 消去初始项后, 得到水位变化控制方程, 该控制方程的变量直接是地下水水位的变化值<sup>[14]</sup>。

为了使概念更加清楚, 本文针对二维情况进行水位变化控制方程的推导。二维地下水流控制方程可以写成如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} - R + L \quad (4a)$$

其中,

$$R = -Q\delta(x - x_w, y - y_w) + \varepsilon \quad (4b)$$

$$L = -\frac{K'}{B'}(h_s - h) = C(h_s - h) \quad (4c)$$

$$C = \begin{cases} -\frac{K'}{B'} & (\text{在地表水体区域之内}) \\ 0 & (\text{在地表水体区域之外}) \end{cases} \quad (4d)$$

式中:  $\varepsilon$  为降雨入渗率;  $\frac{K'}{B'}$  为越流系数;  $h_s$  为相邻含水层的水位;  $Q$  为抽水量;  $\delta(x - x_w, y - y_w)$  为 delta 方程, 且有

$$\delta(x - x_w, y - y_w) = \begin{cases} \infty & (x = x_w, y = y_w) \\ 0 & (x \neq x_w, y \neq y_w) \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $x_w$  和  $y_w$  均为井点位置坐标。

式(4a)可以写为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + Q\delta(x - x_w, y - y_w) - \varepsilon + C(h_s - h) \quad (6)$$

为了简洁明了地说明问题, 本文从地下水线性的控制方程入手, 推导其近似解。

#### 2.2.1 承压水含水层的水位变化控制方程

对于承压含水层, 导水系数( $T_{xx}$ ,  $T_{yy}$ )是连续的, 不随水位变化而变化。控制方程中的其他变量可以分解如下:

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 + h' \\ Q &= Q_0 + Q' \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon' \\ h_s &= h_{s0} + h'_s \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: 下标“0”表示初始项, 上标“'”表示摄动项。将式(7)代入式(6)得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ T_{xx} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T_{yy} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial y} \right] = S \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial t} + (Q_0 + Q')\delta(x - x_w, y - y_w) - (\varepsilon_0 + \varepsilon') + C(h_{s0} + h'_s - h_0 - h') \quad (8)$$

其边界条件为

$$a(h_0 + h') + b \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial n} = f_1(x, y, t) \quad (9)$$

将式(8)改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx} \frac{\partial h_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy} \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx} \frac{\partial h'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy} \frac{\partial h'}{\partial y} \right) &= S \frac{\partial h_0}{\partial t} + Q_0\delta(x - x_w, y - y_w) - \varepsilon_0 + \\ C(h_{s0} - h_0) + S \frac{\partial h'}{\partial t} + Q'\delta(x - x_w, y - y_w) - \varepsilon' + C(h'_s - h') & \end{aligned} \quad (10)$$

变量改变前的控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx} \frac{\partial h_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy} \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h_0}{\partial t} + Q_0\delta(x - x_w, y - y_w) - \varepsilon_0 + C(h_{s0} - h_0) \quad (11)$$

将式(11)从式(10)中减去后, 得到只含有变化量的水位变化控制方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx} \frac{\partial h'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy} \frac{\partial h'}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h'}{\partial t} + Q'\delta(x - x_w, y - y_w) - \varepsilon' + C(h'_s - h') \quad (12)$$

其边界条件为

$$ah' + b \frac{\partial h'}{\partial n} = f_1(x, y, t) - f_0(x, y, t) \quad (13)$$

对于局部水位变化的情况，如果边界远离变化区域，则一般不会引起边界条件的变化，即

$$f_1(x, y, t) = f_0(x, y, t) \quad (14)$$

因此，承压水水位变化控制方程及其边界条件可表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx} \frac{\partial h'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy} \frac{\partial h'}{\partial y} \right) &= S \frac{\partial h'}{\partial t} + \\ Q' \delta(x - x_w, y - y_w) - \varepsilon' + C(h'_s - h') \\ ah' + b \frac{\partial h'}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

比较式(6)和(15)可以看出，两个方程的形式是一样的。因此，从理论上讲，可以用求解传统承压水水位控制方程的相同的数值方法来对承压水水位变化控制方程进行求解。从水位变化控制方程的边界条件可以看出，如果流场变化只是局部的，模型边界可以设为无水流交换边界。

### 2.2.2 非承压水含水层的水位变化控制方程

对于非承压水，导水系数随着饱和土层厚度的变化而变化。因此导水系数可以分解为初始项和摄动项：

$$\begin{cases} T_{xx} = T_{xx0} + T'_{xx} \\ T_{yy} = T_{yy0} + T'_{yy} \end{cases} \quad (16)$$

将式(7)，(16)代入式(6)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (T_{xx0} + T'_{xx}) \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial x} \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ (T_{yy0} + T'_{yy}) \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial y} \right] &= S \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial t} + \\ (Q_0 + Q') \delta(x - x_w, y - y_w) - (\varepsilon_0 + \varepsilon') + \\ C(h_{s0} + h'_s - h_0 - h') \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)可改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx0} \frac{\partial h_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy0} \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx0} \frac{\partial h'}{\partial x} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy0} \frac{\partial h'}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ T'_{xx} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial x} \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ T'_{yy} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial y} \right] &= S \frac{\partial h_0}{\partial t} + Q_0 \delta(x - x_w, y - y_w) - \\ \varepsilon_0 + C(h_{s0} - h_0) + S \frac{\partial h'}{\partial t} + Q' \delta(x - x_w, y - y_w) - \\ \varepsilon' + C(h'_s - h') \end{aligned} \quad (18)$$

将初始项式(11)从式(18)中减去后得到非承压水的水位变化控制方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx0} \frac{\partial h'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy0} \frac{\partial h'}{\partial y} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ T'_{xx} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T'_{yy} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial y} \right] = \\ S \frac{\partial h'}{\partial t} + Q' \delta(x - x_w, y - y_w) - \varepsilon' + C(h'_s - h') \end{aligned} \quad (19)$$

从式(19)可以看出，与承压水相比，非承压水的水位变化控制方程中含有多出的项  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ T'_{xx} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T'_{yy} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial y} \right]$ ，这些项是水位变化量  $h'$  的函数。

如果地下水水位变化值与饱和含水层的厚度相比较小，在水位变化控制方程中，可以忽略这些项的影响，假设：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ T'_{xx} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T'_{yy} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial y} \right] = 0 \quad (20)$$

这样，非承压水的水位变化控制方程可以写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx0} \frac{\partial h'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy0} \frac{\partial h'}{\partial y} \right) &= S \frac{\partial h'}{\partial t} + \\ Q' \delta(x - x_w, y - y_w) - \varepsilon' + C(h'_s - h') \end{aligned} \quad (21)$$

其边界条件为

$$ah' + b \frac{\partial h'}{\partial n} = 0 \quad (22)$$

由式(21)可以看出，导水系数与初始情况下饱和含水层的厚度有关，不随  $h'$  的变化而变化，这一点与承压水含水层导水系数是连续的、不随水位变化而变化的性质是一致的。由此可见，对于非承压水水位变化控制方程，应该作为承压水来看待，在数值模拟的过程中，应使含水层处于承压状态。

经过比较可以看出，式(6)和(21)具有相似的形式。因此从理论上讲，如果水位变化远远小于饱和含水层厚度，就可以用与求解传统承压水控制方程相同的数值方法来求解非承压水水位变化控制方程。但是，在  $h'$  较大的情况下，式(21)不成立。假设：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ T'_{xx} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T'_{yy} \frac{\partial (h_0 + h')}{\partial y} \right] = f(h') \quad (23)$$

则式(19)可以写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx0} \frac{\partial h'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy0} \frac{\partial h'}{\partial y} \right) + f(h') &= S \frac{\partial h'}{\partial t} + \\ Q' \delta(x - x_w, y - y_w) - \varepsilon' + C(h'_s - h') \end{aligned} \quad (24)$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx0} \frac{\partial h'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy0} \frac{\partial h'}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h'}{\partial t} + Q' \delta(x - x_w, y - y_w) - (\varepsilon' + f(h')) + C(h'_s - h') \quad (25)$$

由于  $f(h')$  项中包含未知水位变化量  $h'$ , 因此不能用传统的数值求解法直接求解该偏微方程, 本文提出用迭代的方法结合传统数值方法对其进行求解。

### 3 迭代方法求解非承压水水位变化控制方程

#### 3.1 迭代方程及迭代步骤

以二维为例, 非承压含水层水位变化控制方程的迭代表达式为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_{xx0} \frac{\partial h^{(n)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_{yy0} \frac{\partial h^{(n)}}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h^{(n)}}{\partial t} + Q' \delta(x - x_w, y - y_w) - [\varepsilon' + f(h^{(n-1)})] + C(h'_s - h^{(n)}) \quad (26)$$

$$f(h^{(n)}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ T'_{xx} \frac{\partial (h_0 + h^{(n)})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T'_{yy} \frac{\partial (h_0 + h^{(n)})}{\partial y} \right] \quad (27)$$

迭代步骤: (1) 用传统数值方法解式(26)(忽略  $f(h')$  项), 得到近似的水位变化值, 用  $h^{(0)}$  表示; (2) 将  $h^{(0)}$  代入式(27)得到  $f(h')$  的近似值, 用  $f(h^{(0)})$  表示; (3) 将  $f(h^{(0)})$  代入式(26)得到新的水位变化值  $h^{(1)}$ ; (4) 重复以上计算步骤, 可以得到越来越精确的水位变化值的解  $h'$ 。

#### 3.2 有限差分法求解 $f(h')$

为了得到  $f(h')$  的值, 采用有限差分方法来对其进行求解。设  $\phi = h' + h_0$ , 那么式(23)可以写成

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T'_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T'_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = f(h') \quad (28)$$

这样可以推导偏导数  $\frac{\partial}{\partial x} \left( T'_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$  的中心差分表达式, 令  $F = T'_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x}$ , 则有

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_{i, j+1/2} - F_{i, j-1/2}}{\Delta x} \quad (29)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} F_{i, j+1/2} &= \left( T'_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i, j+1/2} = (T'_{xx})_{i, j+1/2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i, j+1/2} \\ F_{i, j-1/2} &= \left( T'_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i, j-1/2} = (T'_{xx})_{i, j-1/2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i, j-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

有限差分网格示意图见图 1。对于导水系数  $(T'_{xx})_{i, j+1/2}$  用相邻节点  $(i, j)$  和  $(i, j+1)$  的导水系数值  $(T'_{xx})_{i, j}$ ,  $(T'_{xx})_{i, j+1}$  的几何平均值来表示, 即

$$(T'_{xx})_{i, j+1/2} = \frac{2(T'_{xx})_{i, j} (T'_{xx})_{i, j+1}}{(T'_{xx})_{i, j} + (T'_{xx})_{i, j+1}} \quad (31)$$

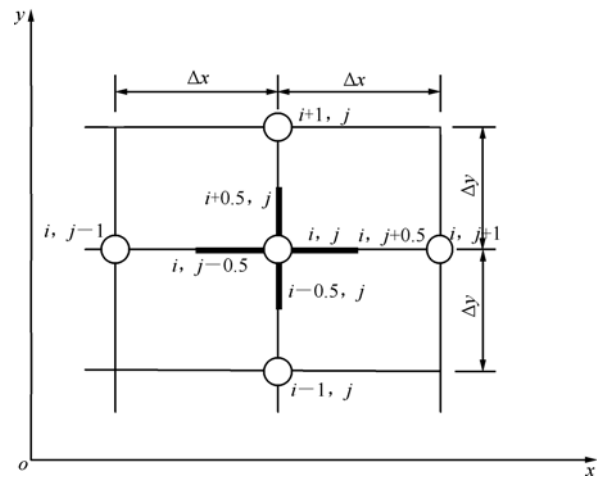


图 1 二维有限差分网格示意图

Fig.1 Schematic diagram of grid meshes for finite difference

同样, 对于导水系数  $(T'_{xx})_{i, j-1/2}$  用相邻节点  $(i, j-1)$  和  $(i, j)$  的导水系数值  $(T'_{xx})_{i, j}$ ,  $(T'_{xx})_{i, j-1}$  的几何平均值表示为

$$(T'_{xx})_{i, j-1/2} = \frac{2(T'_{xx})_{i, j} (T'_{xx})_{i, j-1}}{(T'_{xx})_{i, j} + (T'_{xx})_{i, j-1}} \quad (32)$$

对于变量  $x$  的函数  $\phi$  的一阶偏导数用中心有限差分表示为

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i, j+1/2} &= \frac{\phi_{i, j+1} - \phi_{i, j}}{\Delta x} \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i, j-1/2} &= \frac{\phi_{i, j} - \phi_{i, j-1}}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

这样可以推导出二阶偏导数  $\frac{\partial}{\partial x} \left( T'_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$  的中心

有限差分表达式, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( T'_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) &= \frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_{i, j+1/2} - F_{i, j-1/2}}{\Delta x} \\ &= \frac{(T'_{xx})_{i, j+1/2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i, j+1/2} - (T'_{xx})_{i, j-1/2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i, j-1/2}}{\Delta x} = \frac{A-B}{\Delta x} \end{aligned} \quad (34)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2(T'_{xx})_{i,j}(T'_{xx})_{i,j+1}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j})}{(T'_{xx})_{i,j} + (T'_{xx})_{i,j+1} \Delta x} \\ B &= \frac{2(T'_{xx})_{i,j}(T'_{xx})_{i,j-1}(\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1})}{(T'_{xx})_{i,j} + (T'_{xx})_{i,j-1} \Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

同理, 可以得到  $\frac{\partial}{\partial y} \left( T'_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$  的中心有限差分表

达式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( T'_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) &= \frac{\partial F}{\partial y} \approx \frac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta y} = \\ \frac{(T'_{yy})_{i+1/2,j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{i+1/2,j} - (T'_{yy})_{i-1/2,j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{i-1/2,j}}{\Delta y} &= \frac{C - D}{\Delta y} \end{aligned} \quad (36)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{2(T'_{yy})_{i,j}(T'_{yy})_{i+1,j}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j})}{(T'_{yy})_{i,j} + (T'_{yy})_{i+1,j} \Delta y} \\ D &= \frac{2(T'_{yy})_{i,j}(T'_{yy})_{i-1,j}(\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j})}{(T'_{yy})_{i,j} + (T'_{yy})_{i-1,j} \Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{i,j} &= h'_{i,j} + h_{0i,j} \\ (T'_{xx})_{i,j} &= (k_{xx})_{i,j} h'_{i,j} \\ (T'_{yy})_{i,j} &= (k_{yy})_{i,j} h'_{i,j} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

于是偏微方程  $f(h')$  的有限差分表达式为

$$f(h') = \frac{A}{\Delta x} - \frac{B}{\Delta x} + \frac{C}{\Delta y} - \frac{D}{\Delta y} \quad (39)$$

### 4 新方法的应用

本文应用新方法, 对一个虚拟的区域面积为  $3000 \text{ m} \times 5000 \text{ m}$  的单一含水层进行水位变化的数值模拟。在这个模拟区域内, 由于人口增加, 某抽水井的抽水量从  $544 \text{ m}^3/\text{d}$  增加到  $2721 \text{ m}^3/\text{d}$ , 由于连续干旱, 降雨入渗率从  $0.0008 \text{ m/d}$  下降到  $0.0004 \text{ m/d}$ , 径流减少使湖泊水位从  $13.5 \text{ m}$  下降到  $13.2 \text{ m}$ 。这一系列水文地质条件的改变, 引起当地地下水水位发生明显变化。该含水层厚度为  $50 \text{ m}$ , 具有均匀的渗透系数  $10 \text{ m/d}$ , 该研究区域边界条件为无水流交换边界。

本文首先建立传统意义的地下水数值模型, 用有限差分方法, 借助国际上通用的地下水数值模拟软件 MODFLOW<sup>[15]</sup>, 分别求出流场变化前后的地下

水水位分布, 相减之后得到其变化值。然后根据新的方法, 重新建立水位变化数值模型, 结合自编的求解迭代方程的有限差分计算程序和现有的 MODFLOW 计算软件, 直接求出地下水水位的变化值。然后将新方法求解结果与传统方法求解结果进行比较分析。

图 2 列出了区域内一个典型界面上用传统方法和新方法对地下水水位变化值的模拟结果。

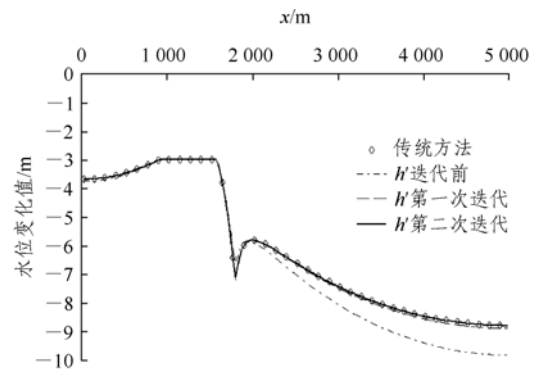


图 2 迭代求解结果与传统方法计算结果比较  
Fig.2 Result comparison of perturbation solution vs. traditional modeling solution

由图 2 可以看出, 在引入迭代求解非承压水含水层水位变化控制方程的方案之前, 水位变化控制方程的解与传统解有一定误差。此后的每一次迭代都能改进解的精确度, 迭代结果最后收敛于传统方法得到的解。模拟过程及模拟结果展示新方法在模拟过程中具有概念模型清晰, 建模过程简单, 边界条件容易确定, 模拟结果可靠的优越性。

### 5 结 论

本文在传统地下水数值模拟的基础上, 提出对地下水水位变化进行数值模拟的新方法。该方法通过直接对地下水水位变化进行数值模拟, 显著地减少建模及模型校正过程中对输入数据的需求; 水位变化数值模型的边界条件容易确定; 引入反复迭代方法求解水位变化控制方程, 可以减少求解误差。

通过理论分析和应用验证, 本文提出的新方法在减少模型的不确定性, 提高数值模拟过程的有效性和预测结果的可靠性方面有明显的优越性。该研究成果应用到实践中去, 可以大大提高对地下水水位的预测能力, 此项研究及其成果将对水资源管理产生重大影响, 对岩土工程设计及施工提供指导。

## 参考文献(References):

- [1] 周建, 屠洪权, 缪俊发. 地下水位与环境岩土工程[M]. 上海: 同济大学出版社, 1995.(ZHOU Jan, TU Hongquan, MIU Junfa. Groundwater and environmental geotechnique[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1995.(in Chinese))
- [2] 陈志恺. 中国水资源的可持续利用问题[J]. 水文, 2003, 23(1): 1 - 5.(CHEN Zhikai. The issues of sustainable utilization of water resources in China[J]. Hydrology, 2003, 23(1): 1 - 5.(in Chinese))
- [3] 朱维申, 李术才, 白世伟, 等. 施工过程力学原理的若干发展和工程实例分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(10): 1 591 - 1 596. (ZHU Weishen, LI Shucui, BAI Shiwei, et al. Some developments of principles for construction process mechanics and some cases history studies[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(10): 1 591 - 1 596.(in Chinese))
- [4] ANDERSON M P, WOESSNER W W. Applied groundwater modeling simulation of flow and advective transport[M]. New York: Academic Press Inc., 1992: 145 - 152.
- [5] 孙纳正. 地下水流的数学模型和数值方法[M]. 北京: 地质出版社, 1981.(SUN Nazheng. Mathematical models and numerical methods of groundwater flow[M]. Beijing: Geological Publishing House, 1981.(in Chinese))
- [6] LI S G, LIAO H S, NI C F. A computationally practical approach for modeling complex mean flows in mildly heterogeneous media[J]. Water Resources Research, 2004, 40(12): W12405.
- [7] FRANKE O L, REILLY T E. Effects of boundary conditions on the steady-state response of three hypothetical groundwater systems: results and implications of numerical experiments[R]. Washington, D. C.: U.S. Geological Survey, 1987: 5 - 19.
- [8] GELHAR L W. Stochastic subsurface hydrology[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- [9] FREEZE R A, CHERRY J A. Groundwater[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1979.
- [10] ANDERSON M P, WOESSNER W W. Applied groundwater modeling[M]. New York: Academic Press, 1992.
- [11] 马秀媛, 于峰, 李竟龙. 区域地下水动态数值模拟[J]. 岩土力学, 2006, 27(1): 131 - 136.(MA Xiuyuan, YU Feng, LI Jinglong. Numerical simulation of local groundwater[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(1): 131 - 136.(in Chinese))
- [12] 郝治福, 康绍忠. 地下水系统数值模拟的研究现状和发展趋势[J]. 水利水电科技进展, 2006, 26(1): 77 - 81.(HAO Zhifu, KANG Shaozhong. Current situation and development trend of numerical simulation of groundwater system[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2006, 26(1): 77 - 81.(in Chinese))
- [13] 薛禹群, 吴吉春. 地下水数值模拟在我国——回顾与展望[J]. 水文地质工程地质, 1997, 24(4): 21 - 24.(XUE Yuqun, WU Jichun. The review and expectation of groundwater modeling in China[J]. Hydrology and Engineering Geology, 1997, 24(4): 21 - 24.(in Chinese))
- [14] 马秀媛. 地下水预测的新方法研究[博士学位论文][D]. 济南: 山东大学, 2007.(MA Xiuyuan. New method in predicting groundwater flow system[Ph. D. Thesis][D]. Jinan: Shandong University, 2007.(in Chinese))
- [15] 郭卫星, 卢国平. MODFLOW 三维有限差分地下水流模型[M]. 南京: 南京大学出版社, 1998.(GUO Weixing, LU Guoping. Modular three-dimensional finite-difference groundwater flow model (MODFLOW)[M]. Nanjing: Nanjing University Press, 1998.(in Chinese))