界面问题的混合有限元法*

郑 宏[1] 李焯芬[2] 葛修润[1] 岳中琦[2]

([1]中国科学院武汉岩土力学研究所 武汉 430071) ([2]香港大学土木工程系 香港)

摘要 给出了界面问题的混合有限元提法，由该提法可导出良态、小规模的有限元方程组。对于复杂接触问题中的某些常见的技术性难题，如大面积、非光滑接触问题、刚体位移问题等都给出了相应的处理技术。

关键词 接触非线性问题，有限元，界面

分类号 O 241.82 **文献标识码** A **文章编号** 1000-6915(2002)01-0001-08

1 引 言

各类人工和天然界面的存在是岩土力学非线性问题的主要来源之一，当然，由于接触非线性本身就极具挑战性，所以几十年来，一直是非常活跃的研究领域。最新的关于接触问题的算法和模型的评论可参见文[1]。

与计算力学相比，岩土工程中的接触问题要复杂得多，这表现在，岩土工程中的接触通常是大面积、非光滑的，而且还具有剪胀特性等。即使忽略剪胀性，计算力学中所建议的一些算法如变分不等式方法[2]和数学规化法[3]等，在求解岩土工程中的界面问题时也会遇到某些困难，如变分不等法要求摩擦系数充分小才能确保解的存在[4]，而数学规化法通常要求接触面充分光滑。

如果按单元形状进行分类，可将岩土力学中所使用的接触单元分成三类。以二维情况为例，第一类是分布型或Goodman型节理单元[5]，这类单元含2 个以上的节点对，其主要优点是程序实现简单，因而在应用中最为普遍。然而其缺点也非常明显：如果采用精确积分，则可能导致“剪切锁死”现象；如果采用缩减积分，则会使解的精度受到影响[6，7]。第二类是“点-边”模型[7，8]，虽然这一模型可模拟大滑移，但因求解过程中可能出现不稳定，因而尚需做更深入地研究。第三类是Katona提出的“点对”模型[9]，该模型可导出一对称的有限元方程组，然而，当存在摩擦时，该算法收敛较慢甚至不收敛。

至于岩土力学中界面的本构模型也可分为两类，第一类认为接触应力和相对位移之间有非线性的本构关系，从而可利用位移型有限元法，其代表性论文见文[10～13]。这一类型通常要引入界面的法向和切向刚度 K_n，K_s，一般认为适用于含充填物的结构面，然而，无论是原位试验还是室内试验所得到的 K_n，K_s 的分散度都较大。第二类认为界面的滑动和分离是由Mohr-Coulomb准则和无拉应力准则控制的，即接触应力和相对位移之间的关系是刚塑性的，这类模型被认为适用于描述人工界面，如衬砌-围岩界面、桩-土界面和无充填物的自然结构面。目前，DDA和FLAC都应用这一模型。

处理界面约束时通常采用两种方法，即罚法和Lagrange乘子法。众所周知，罚法中罚参数的选取不当会导致总体刚度矩阵的病态(罚参数太大时)或严重违反约束条件(罚参数太小时)，但由于罚法能很容易地嵌入现有的有限元程序，因而被广泛地使用。Lagrange乘子法强调精确满足接触约束条件，但会增加方程组的阶数，而且由于刚体位移的存在，使得一些常规的求解技术失效。文[7]详细讨论了这两种方法各自的优缺点。

本文基于有界面时的虚位移原理，导出了界面问题的混合有限元提法。与Lagrange乘子法类似，本文的提法也精确满足界面约束条件，而且，为了减少方程组的规模，提高求解效率，建议了一种高效的凝缩方法，该方法可将所有非接触节点的自由

2000年2月8日收到初稿，2000年6月20日收到修改稿。

* 香港(RGC-CA99/00，EG01)及武汉市科委(991002024)资助项目。

作者 郑 宏 简介：男，1964年生，博士，1985年毕业于东北工学院机械系，现任研究员，主要从事岩土力学数值方法的研究工作。

度从系统中消掉，每次迭代仅需求解与界面未知数相关联的方程组，从而使得该提法特别适宜于大面积接触问题。

对于 Lagrange 乘子法而言，刚体位移的存在会导致总刚的亏秩，使得一些有效的求解器如 LDL^T 分解法，LU 分解法等失效，这一困难通常也促使程序员选择罚法[14]。本文通过对接触自由度的重排序，有效地解决了这一问题。

最后提供了几个典型算例，其中个别算例对某些其他算法是很难收敛的。

2　界面描述

假定一待解区域 Ω 内含有一界面 Γ，其下岸 Γ^1 和上岸 Γ^2 充分靠近，Γ 可被看作是 Γ^1 和 Γ^2 中点之连线，如图 1 所示。过 Γ 上一点 M 作一垂直于 Γ 的直线交 Γ^1，Γ^2 于 M^1 和 M^2，令 Γ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，由 Γ^1 指向 Γ^2，$\boldsymbol{s}$ 为 Γ 的单位切向量，$\boldsymbol{n}$-$\boldsymbol{s}$ 组成一右手系。由小变形假定，$\boldsymbol{n}$-$\boldsymbol{s}$ 随变形过程中的变化可被忽略。记接触应力(可视为点 M^1 所受的面力)为 $\beta^k=\left(\beta_{\rm n}^k,\beta_{\rm s}^k\right)^{\rm T}$，相对位移为 $\Delta^k=\left(\Delta_{\rm n}^k,\Delta_{\rm s}^k\right)^{\rm T}$，其中下标 n，s 分别为法向和切向，上标 k 为载荷步，无上标代表增量，如$\beta_{\rm n}=\beta_{\rm n}^k-\beta_{\rm n}^{k-1}$等，点 M 相对位移增量$\Delta_{\rm n}$ 和$\Delta_{\rm s}$定义为

$$\Delta_{\rm n}=u_{\rm n}^2-u_{\rm n}^1+g \tag{1}$$

$$\Delta_{\rm s}=u_{\rm s}^2-u_{\rm s}^1 \tag{2}$$

式中：$u_{\rm n}^1$，$u_{\rm s}^1$ 为点 M^1 在 n-s 系下的位移增量；当 k=1 时，g 为初始法向间隙(张开度)，否则 $g=0$。

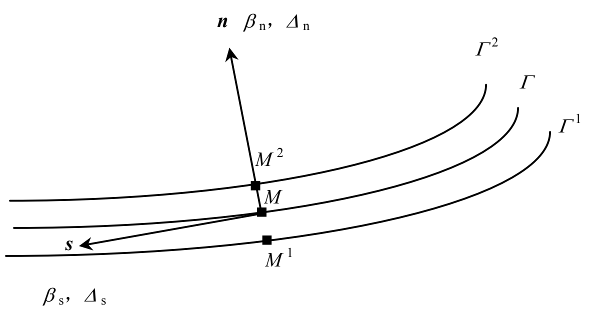


图 1　界面模型

Fig.1　Interface model

记 $\Gamma_{\rm c}$，$\Gamma_{\rm d}$ 分别为 Γ 的接触部分和分离部分。在 $\Gamma_{\rm d}$ 上，

$$\Delta_{\rm n}^k>0，\beta_{\rm n}^k=\beta_{\rm s}^k=0 \tag{3}$$

在 $\Gamma_{\rm c}$ 上，

$$\Delta_{\rm n}^k=0,\ \beta_{\rm n}^k<0 \tag{4}$$

以及

$$\Delta_{\rm s}=0\ \ (当\left|\beta_{\rm s}^k\right|<c+\mu\left|\beta_{\rm n}^{\rm s}\right|时) \tag{5}$$

$$\Delta_{\rm s}\,{\rm sgn}(\beta_{\rm s}^k)\geqslant 0\ \ (当\left|\beta_{\rm s}^k\right|=c+\mu\left|\beta_{\rm n}^{\rm s}\right|时) \tag{6}$$

式中：c 为粘聚力，μ 为摩擦系数。

总之，在第 k 步载荷增量结束后，增量位移和接触应力应满足下列互补条件：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_{\rm n}^k\geqslant 0,\quad \beta_{\rm n}^k\geqslant 0\\&\Delta_{\rm n}^k\ \ \beta_{\rm n}^k=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left|\beta_{\rm s}^k\right|\leqslant {\rm c}+\mu\left|\beta_{\rm n}^k\right|,\ \Delta_{\rm s}\,{\rm sgn}(\beta_{\rm s}^k)\geqslant 0\\&\Delta_{\rm s}(\left|\beta_{\rm s}^k\right|-\mu\left|\beta_{\rm n}^k\right|-c)=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

3　有限元提法

容易证明：当Ω 内含有界面Γ 时的虚位移方程应为

$$\int_{\Omega}(\delta\varepsilon)^{\rm T}\sigma\,{\rm d}\Omega+\int_{\Gamma}(\delta\Delta)^{\rm T}\beta\,{\rm d}\Gamma=\int_{\Omega}(\delta u)^{\rm T}b{\rm d}\Omega+\int_{S_\sigma}(\delta u)^{\rm T}p\,{\rm d}S \tag{9}$$

式中：b 为Ω内的体积力增量，p 为应力边界 S_σ 上的面力增量。

3.1　有限元近似

在对Ω 进行有限元剖分时，注意使Γ 两岸上的两个节点相互匹配，即令组成一接触单元的点对有相同的坐标，但同时可赋予该接触单元一张开度 g。假定$\lambda_{\rm n}$ 和$\lambda_{\rm s}$ 分别为法向接触力增量和切向接触力增量，利用标准的过程[15]可得式(9)的有限元近似为

$$\boldsymbol{f}_{\rm int}(u)+\boldsymbol{f}_{\rm c}(\lambda)=\boldsymbol{f}_{\rm ext} \tag{10}$$

式中：

$$\boldsymbol{f}_{\rm int}(u)=\sum_{\Omega^e}\int_{\Omega^e}B^{\rm T}\sigma\,{\rm d}\Omega \tag{11}$$

为来自单元内部的节点力向量；$\boldsymbol{f}_{\rm c}(\lambda)$为接触力向量，

$$\boldsymbol{f}_{\rm c}(\lambda)=\sum_{j=1}^{n_{\rm c}}C^{\rm T}(M_j)\lambda,\quad \lambda=(\lambda_{\rm n},\lambda_{\rm s})^{\rm T},\quad M_j\in\Gamma \tag{12}$$

$$C(M_j)=[-L,L],\quad L=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{13}$$

式中：$n_{\rm c}$ 为Γ上的节点对个数；θ 为法线 n 与正 x 轴之间的夹角。记 $N_{\rm u}$ 为位移自由度总数。$\boldsymbol{f}_{\rm c}(\lambda)$的维数为 $N_{\rm u}$，但其中除了接触节点自由度外大部分元素为零。右端向量：

$$\boldsymbol{f}_{\rm ext}=\sum_{\Omega^e}\int_{\Omega^e}N^{\rm T}b\,{\rm d}\Omega+\sum_{S_\sigma^b}\int_{S_\sigma^b}N^{\rm T}p{\rm d}S \tag{14}$$

为外力(即体积力和面力)的等效节点力向量。

注意式(11)，(12)和(14)中的Σ表示装配意义下的求和。

相应于式(7)和(8)的离散形式为

$$\left.\begin{aligned}&\varDelta_{\mathrm{n}}^{k}\geqslant 0,\ \ \lambda_{\mathrm{n}}^{k}\leqslant 0\\&\varDelta_{\mathrm{n}}^{k}\lambda_{\mathrm{n}}^{k}=0\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left|\lambda_{\mathrm{s}}^{k}\right|\leqslant f_j+\mu\left|\lambda_{\mathrm{n}}^{k}\right|,\ \ \varDelta_{\mathrm{s}}\mathrm{sgn}(\lambda_{\mathrm{s}}^{k})\geqslant 0\\&\varDelta_{\mathrm{s}}(f_j+\mu\left|\lambda_{\mathrm{n}}^{k}\right|-\left|\lambda_{\mathrm{s}}^{k}\right|)=0\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

$$f_j\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{c}{2}(l_{j-1}+l_j)\tag{17}$$

式中：l_j为点对M_j到其后继点对M_{j+1}的距离，并规定$l_0=l_{n_{\mathrm{c}}+1}=0$

3.2　接触单元

显然，仅含N_{u}个方程的平衡方程组(10)不足以确定含N_{u}个分量的增量位移向量u和含2 n_{c}个分量的增量接触力向量$\boldsymbol{\lambda}$，还必需补充 2 n_{c}个独立于式(10)的方程。本节将利用界面$\varGamma$上的约束条件来获得这2 n_{c}个增补方程。

下面将考虑在第k步增量结束后的一个点对处在三态Fix，Slip，Free之一时的约束方程。

(1) Fix 态

若点对在增量结束后，处于 Fix 态，则有$\varDelta_{\mathrm{n}}=-\varDelta_{\mathrm{n}}^{k-1}$，$\varDelta_{\mathrm{s}}=0$，用整体位移表示为

$$(-\cos\theta\quad -\sin\theta\quad \cos\theta\quad \sin\theta)\begin{pmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\end{pmatrix}=-\varDelta_{\mathrm{n}}^{k-1}\tag{18}$$

$$(\sin\theta\quad -\cos\theta\quad -\sin\theta\quad \cos\theta)\begin{pmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\end{pmatrix}=0\tag{19}$$

(2) Slip 态

若点对在增量结束后处于Slip态，则在法向有$\varDelta_s=-\varDelta_n^{k-1}$，在切向满足Mohr-Coulomb准则，即

$$(-\cos\theta\quad -\sin\theta\quad \cos\theta\quad \sin\theta)\begin{pmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\end{pmatrix}=-\varDelta_{\mathrm{n}}^{k-1}\tag{20}$$

$$\mu\lambda_{\mathrm{n}}+\mathrm{sgn}(\lambda_{\mathrm{s}}^{k})\lambda_{\mathrm{s}}=G^k\overset{\mathrm{def}}{=}f_j-\mu\lambda_{\mathrm{n}}^{k-1}-\mathrm{sgn}(\lambda_{\mathrm{s}}^{k})\lambda_{\mathrm{s}}^{k-1}\tag{21}$$

(3) Free 态

若在增量结束后点对处在Free态，则$\lambda_{\mathrm{n}}^{k}=\lambda_{\mathrm{s}}^{k}=0$，即

$$\lambda_{\mathrm{n}}=-\lambda_{\mathrm{n}}^{k-1}\tag{22}$$

$$\lambda_{\mathrm{s}}=-\lambda_{\mathrm{s}}^{k-1}\tag{23}$$

如果已知$\varGamma$的接触状态，则$\varGamma$上的n_{c}个点对即可提供前述的2 n_{c}个增补方程。

因为式(10)中的第 2 项$f_{\mathrm{c}}(\lambda)$可经过装配得到，所以可把一个接触点对视为一个接触单元，并给出其“单元刚度矩阵”：

$$K(M_j)_{8\times 1}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\quad\boldsymbol{u} & \quad\boldsymbol{\lambda}\end{array}\\\begin{bmatrix}0 & C^{\mathrm{T}}(M_j)\\E(M_j) & D(M_j)\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{\lambda}\end{array}\quad(M_j\in\varGamma)\tag{24}$$

及单元节点力向量：

$$\boldsymbol{q}(M_j)_{8\times 1}=\begin{pmatrix}0\\q_\lambda(M_j)\end{pmatrix}\begin{array}{c}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{\lambda}\end{array}\quad(M_j\in\varGamma)\tag{25}$$

矩阵$\boldsymbol{K}(M_j)$中的子矩阵$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(M_j)$对应于该接触单元对节点内力的贡献，由式(13)给出，$E(M_j)$，$D(M_j)$以及向量$\boldsymbol{q}(M_j)$中的子向量$\boldsymbol{q}_\lambda(M_j)$取决于接触状态。表1即是根据式(18)～(23)来构造的，可被用来形成接触单元的单元刚度矩阵$\boldsymbol{K}(M_j)$和单元节点力矩阵$\boldsymbol{q}(M_j)$。

表1　式(24)中的子矩阵$E(M_j)$，$D(M_j)$和式(25)中的$q_\lambda(M_j)$

Table 1　Submatrix $E(M_j)$，$D(M_j)$in equation (24) and the subvector $q_\lambda(M_j)$ in equation (25)

状 态	矩 阵		
	$E(M_j)_{2\times 4}$	$D(M_j)_{2\times 2}$	$q_\lambda(M_j)_{2\times 2}$
Fix	$\begin{matrix}-c & -s & c & s\\ s & -c & -s & c\end{matrix}$	$\begin{matrix}0 & 0\\0 & 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}-\varDelta_{\mathrm{n}}^{k-1}\\0\end{matrix}$
Slip	$\begin{matrix}-c & -s & c & s\\0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0 & 0\\\mu & \mathrm{sgn}(\lambda_{\mathrm{s}}^{k})\end{matrix}$	$\begin{matrix}-\varDelta_{\mathrm{n}}^{k-1}\\G^k\end{matrix}$
Free	$\begin{matrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}$	$\begin{matrix}-\lambda_{\mathrm{n}}^{k-1}\\-\lambda_{\mathrm{s}}^{k-1}\end{matrix}$

为了强调接触非线性，以下把问题局限于弹性范围。事实上，由于任何非线性问题的解皆可通过一系列弹性解来逼近，因而当求解象弹塑性和非线性弹性问题时，并不会遇到本质上的困难。

象块体单元那样来组集接触单元的刚度矩阵和节点力向量，则有包含增量接触力向量$\boldsymbol{\lambda}$的混合型有限元方程组

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K} & \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\\\overline{\boldsymbol{E}} & \overline{\boldsymbol{D}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_u\\\overline{\boldsymbol{q}}_\lambda\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_u\overset{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}\tag{26}$$

其中矩阵$\overline{\boldsymbol{C}}$, $\overline{\boldsymbol{E}}$, $\overline{\boldsymbol{D}}$和向量$\overline{\boldsymbol{q}}_\lambda$是通过组集所有的接触单元而形成的。

式(26)的系数矩阵是高度稀疏的，$\overline{\boldsymbol{C}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{E}}$ 中的每一行都至多含有 4 个非零元素，$\overline{\boldsymbol{D}}$ 的任一行元素最多含 2 个非零元素，因此，这里所建议的算法，并不要求太多的内存空间。

3.3　Katona 的对称化方案[9]

一般情况下，除非摩擦系数$\mu = 0$，式(26)的系数矩阵是非对称的，因此，为了提高求解效率，减少内存开销，Katona 利用：

$$\lambda_{\rm s} = F^k - \lambda_{\rm s}^{k-1}, \quad F^k \overset{\rm def}{=} (f_j + \mu\left|\lambda_{\rm n}^k\right|)\,{\rm sgn}(\lambda_{\rm s}^k) \tag{27}$$

来替代式(21)，并在单元一级对式(24)进行消元，而得到对称的“单元刚度矩阵”：

$$\boldsymbol{K}'(M_j) = \begin{bmatrix} 0 & C'^{\rm T} \\ C' & D' \end{bmatrix} \tag{28}$$

和相应的“单元节点力向量”：

$$\boldsymbol{q}'(M_j) = \begin{pmatrix} q'_u \\ q'_\lambda \end{pmatrix} \tag{29}$$

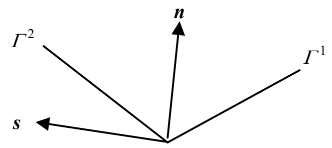
因为式(27)中的 $\lambda_{\rm n}^k$ 和 $\lambda_{\rm s}^k$ 皆未知，所以迭代过程中必须利用其上一次迭代的近似值，对收敛的要求不仅是前后两次迭代所有的接触点对的接触状态保持不变，而且还要求 $\lambda_{\rm s}^k$ 取得一个收敛值，所以，这种对称化势必增加收敛上的困难，导致某些误差。事实上，当问题较复杂时，甚至连收敛的前一要求都无法满足；更进一步，材料非线性的引入会加剧收敛上的困难。Katona 本人也意识到了这一点。

3.4　关于非光滑接触

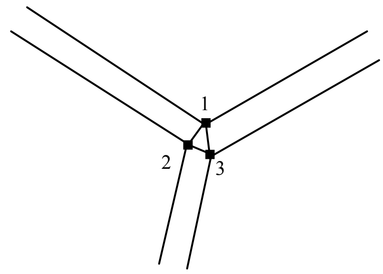
在岩土工程中，一个界面可能会存在某些角点(非光滑点)，也可能数条界面交汇于一点，一般情况下，临近这些点的应力会出现奇异。

对于如图 2 所示的一个角点 M，如果不设置接触单元，临近点 M 的结果仅在该点对处于 Free 态时才是正确的；如果设置一接触单元，该点的法线无定义，取任意方向作为法线都会部分违反该点的约束条件。但是设置一接触单元至少比不设置要好，因为设置会适合更多的变形情况。因此，作者建议在角点上设置一接触单元，其法向可取在角内任一方向，这相当于放松了点 M 的约束条件。

考虑到只要增广矩阵 $\left[\overline{E},\overline{D}\right]$ 满秩，式(26)就存在唯一解。因此，对于 m 个界面交汇于一点，$m \geqslant 3$，如图 3 所示，可设置 m 个接触单元，每个接触单元相应于一个界面的末端，然后逐次将这些接触单元的“单元刚度矩阵”式(24)和“单元载荷向量”式(25)组集进系统，不需进行特殊的处理。



(a)　角点的一个接触单元



(b) 交汇于一点的三个界面可设置三个接触单元

图 2　接触单元

Fig.2　Contact elements

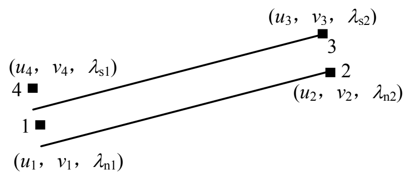


图 3　接触自由度的安排

Fig.3　Arrangement of contact degrees of freedom(DOF)

4　迭代求解

界面问题可以按如下方式来提：给定界面在第 k-1 步载荷的解，$\varDelta_{\rm n}^{k-1}$, $\varDelta_{\rm s}^{k-1}$, $\lambda_{\rm n}^{k-1}$ 和$\lambda_{\rm s}^{k-1}$等，确定解的增量$\varDelta_{\rm n}$，$\varDelta_{\rm s}$，$\lambda_{\rm n}$和$\lambda_{\rm s}$等，使得在施加第 k 步载荷后的解 $\varDelta_{\rm n}^{k} = \varDelta_{\rm n}^{k-1} + \varDelta_{\rm n}$ 等能够满足平衡方程、相容性方程和界面约束条件等。

一般情况下，界面问题需通过迭代过程来求解，迭代之初总是假定一个初始接触态 S^0，然后利用表 1 组成有限元方程组(26)，求解式(26)得到一个试探解，若该试探解所对应的接触态 S' 与初始接触态 S^0 相同，则认为迭代收敛，否则根据表 2 将接触态 S^0 修改为更可能的将状态 S''，然后令 S^0=S'' 重复上述过程。表 2 实际上定义了一个状态决定矩阵，它与 Katona 给出的类似的表有所区别。

注意，表 2 中的第三行并不意味着第 i-1 次迭代的一个 Free 态不能变成 Fix 态，而是 Fix 态需通过一个迭代步来取得，即由 Free 态到 Slip 态再到

Fix 态。

表 2　更新接触状态的决定矩阵

Table 2　Decision matrix for updating contact states

第 i-1 步	第 i 步 Fix	第 i 步 Slip	第 i 步 Free
Fix	$\lambda_n^k < 0$ and $\lvert\lambda_s^k\rvert < f_j + \mu\lvert\lambda_n^k\rvert$	$\lambda_n^k \leqslant 0$ and $\lvert\lambda_s^k\rvert \geqslant f_j + \mu\lvert\lambda_n^k\rvert$	$\lambda_n^k > 0$
Slip	$\lambda_n^k < 0$ and $\Delta_s\lambda_s^k < 0$	$\lambda_n^k \leqslant 0$ and $\Delta_s\lambda_s^k \geqslant 0$	$\lambda_n^k > 0$
Free	\	$\Delta_n^k < 0$	$\Delta_n^k > 0$

5　向界面凝聚

尽管式(26)所对应的矩阵非常稀疏，但一个非对称矩阵的分解仍需 $0(n^3)$阶运算量，注意到迭代过程中式(26)的前 N_u 个方程保持不变，仅是后 $2n_c$ 个方程随接触状态而改变。因此，若每次迭代都完整地做一遍组集——分解过程，其求解效率无疑很低。以下通过将非接触节点的自由度向接触节点凝聚来提高求解效率。为了方便书写，不妨将接触节点的点号都放在后面，然而通过以下推导可以看出这一要求并非必要，为此可将式(26)的前 N_u 个方程进行重写：

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IC} \\ K_{CI} & K_{CC} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_I \\ u_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C^T\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_I \\ q_C \end{pmatrix} \tag{30}$$

式中：下标 I 和 C 分别代表非接触自由度和接触自由度。

由式(30)的第 1 个方程组得

$$u_I = K_{II}^{-1}(q_I - K_{IC}u_C) \tag{31}$$

将式(31)代入式(30)的第 2 个方程组得

$$\widetilde{K}_{CC}u_C + C^T\lambda = \widetilde{q}_c \tag{32}$$

式中：

$$\widetilde{K}_{CC} = K_{CC} - K_{CI}K_{II}^{-1}K_{IC} \tag{33}$$

$$\widetilde{q}_C = q_C - K_{CI}K_{II}^{-1}q_I \tag{34}$$

注意，无论 K 是否奇异，上述凝聚过程总可进行，即 K_{II} 是非奇异的，因为这种凝聚过程相当于固定所有的接触节点。

利用 K_{II} 的 LDL^T 分解和 $K_{CI} = K_{IC}^T$，$\widetilde{K}_{CC}$ 的计算量可减少一半，即可按下式来计算 $\widetilde{K}_{CC}$：

$$\widetilde{K}_{CC} = K_{CC} - (\widetilde{L}^{-1}K_{IC})^T\widetilde{D}^{-1}(\widetilde{L}^{-1}K_{IC}) \tag{35}$$

式中：$K_{II} = \widetilde{L}\widetilde{D}\widetilde{L}^T$。

将所有的接触单元组集进系统，可得关于接触面 Γ 的混合型有限元方程组为

$$\begin{bmatrix} \widetilde{K}_{CC} & C^T \\ E & D \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_C \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{q}_C \\ q_\lambda \end{pmatrix} \tag{36}$$

6　病态消除

显然式(36)中 C，D，E 的元素远小于 $\widetilde{K}_{CC}$ 的元素，所以该方程组是病态的。为了减轻病态，作变换：

$$\lambda' = \lambda/\eta \tag{37}$$

式中：η为一个与 $\widetilde{K}_{CC}$ 的元素有相同数量级的任意正数，然后利用下式来替代式(36)：

$$\begin{bmatrix} \widetilde{K}_{CC} & \eta C^T \\ \eta E & \eta^2 D \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_C \\ \lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{q}_C \\ \eta a \end{pmatrix} \tag{38}$$

在解得 u_C 后，将其代入式(31)可得 u_I。

7　处理刚体位移

可以证明 $\widetilde{K}_{CC}$ 与 K 有相同的(半)正定性。事实上，对于矩阵 $K = \begin{bmatrix} K_{II} & K_{IC} \\ K_{CI} & K_{CC} \end{bmatrix}$，可以用矩阵 $P = \begin{bmatrix} I_m & -K_{II}^{-1}K_{IC} \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$作合同变换，$m=N_u-2n_c$，$n=2n_c$，有

$$P^TKP = \begin{bmatrix} K_{II} & 0 \\ 0 & \widetilde{K}_{CC} \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} Q$$

因合同变换不改变矩阵的(半)正定性，所以，如果 K 是(半)正定的，则 Q 也是，因此 $\widetilde{K}_{CC}$ 的每一个主子阵当然也是矩阵 Q 的主子式都不小于零。从而 $\widetilde{K}_{CC}$ 也是(半)正定的。

当系统中存在被界面完全切割且没有被完全固定的块体时，K 从而 $\widetilde{K}_{CC}$ 就是奇异的。如本文的例 2，K 就亏 3 个秩，在此种情况下就不能直接利用 $\widetilde{K}_{CC}$ 的 LU 分解，因为 LU 分解要求矩阵的 1 到 $n-1$ 阶的顺序主子式非零[16]。考虑到增广矩阵$[\widetilde{K}_{CC} \quad \eta C^T]$与$[\eta E \quad \eta^2 D]$的任一行是线性无关的，可重新安排式(38)中的未知向量$\begin{pmatrix} \widetilde{u}_C \\ \lambda \end{pmatrix}$中的分量顺序，使其系数

矩阵所有顺序主子式都非零。以图 3 所示的一个界面为例，假定该界面上仅有 2 个点对，1，2，3，4 分别是这 4 节点的节点号，1-4 组成点对 1，2-3 组成点对 2，未知向量定义为

$$\left(u_1\ \ v_1\ \ \lambda'_{\mathrm{n}1},\ u_2\ \ v_2\ \ \lambda'_{\mathrm{n}2},\ u_3\ \ v_3\ \ \lambda'_{\mathrm{s}2},\ u_4\ \ v_4\ \ \lambda'_{\mathrm{s}1}\right)^{\mathrm{T}} \tag{39}$$

即将每个点对的 λ'_{n} 附着于其下岸节点，λ'_{s} 附着于其上岸节点。

8 算　例

本文所建议的算法已被嵌入 Geocad-SAFE(SAFE 为 stress analysis for engineering)软件。该软件含 3 个专门用于岩土工程的程序，有以下特点：

(1) 功能强劲的前处理器：SAFE-Builder，对于任意复杂的区域都可以生成高质量的网格而无需添加任何辅助线；

(2) 稳定的内核：SAFE-Analyst，对于非线性问题，由于采用了弧长法作为其求解器，因而有良好的收敛性，可以给出完整的平衡路径和准确的极限载荷乘子。它已被许多复杂问题所验证；

(3) 多功能的后处理器：SAFE-Viewer，可以从不同角度满足用户的各种要求。

利用 Katona 算法和本文所建议的算法分别计算了以下算例。对于 Katona 法，摩擦力 λ^k_{n} 被定义为收敛当且仅当第 i 步和第 i+1 步有相同的接触状态，且第 i+1 步迭代值满足：

$$\Big(\sum_{j=1}^{n_{\mathrm{c}}}\left|\lambda^k_{\mathrm{s},i+1}(j)-\lambda^k_{\mathrm{s},i}(j)\right|^2\Big)^{1/2} \leqslant \varepsilon\Big(\sum_{j=1}^{n_{\mathrm{c}}}\left|\lambda^k_{\mathrm{s},i+1}(j)\right|^2\Big)^{1/2}$$

$$(i=1,2,\cdots) \tag{40}$$

式中：ε 为给定的允许误差，对于所有的算例，取 ε =1%。表 3 列出了 2 种算法的迭代次数。大量的算例都无一例外地表明：在无摩擦力时，Katona 算法的迭代次数都略大于或等于本文所建议的算法，而当存在摩擦力时，本文所建议的算法要明显优于 Katona 法。

表 3　与 Katona 方法的迭代次数之对比

Table 3　Comparison of iterative numbers between proposed method and the Katona′s method in

方法	例 1		例 2	例 3	
	Case1	Case2		Step1	Step2
本文	18	12	6	2	6
Katona 法	18	13	8	3	不收敛

8.1 例 1：叠梁问题

图 4 显示的是一悬臂梁的网格，该悬壁梁由两个完全相同的梁叠加而成，每一根梁都具有 10×1×1 的尺寸，假定两梁之间的界面无摩擦，E =1 500 MPa，ν=0.25。今在端点 A 分别向下(情况 1)和向上(情况 2)作用一集中力 P =1.5 kN。由于当结构承受弯曲时，4 节点协调元的精度很差，所以作者将该例中的所有单元都指定为 NQ6 元[17]，NQ6 元是一非协调元且具有较高的精度。顺便指出，当结构中的某一子结构承受弯曲荷载时，SAFE 可将该子结构中的单元指定为非协调元，如衬砌、挡土墙等通常都属这种子结构。

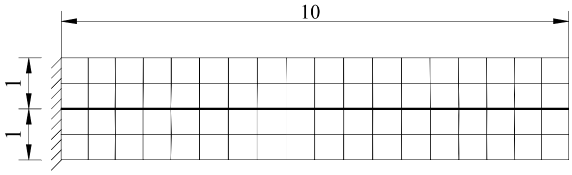
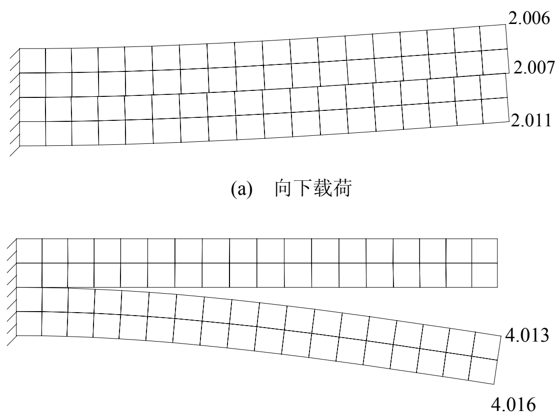


图 4　叠梁网格

Fig.4　The mesh of a cantilever with beam-over-beam

图 5(a)和图 5(b)分别显示了两种情况的变形图位移，单位为 mm，本例情况 2 中一个有趣的现象是除右端两个点对处于 Slip 状态外，界面上的其余各点对皆处于 Free 态，但其间隙非常小，如最大间隙仅为 5.45×10^{-3} mm，远小于 A 的挠度 2.011。沿界面的法向间隙分布如图 6 所示。



(a)　向下载荷

(b)　向上载荷

图 5　在端点 A 受到 P =1.5 kN 变形图

Fig.5　Deformation diagram with force P =1.5 kN on point A

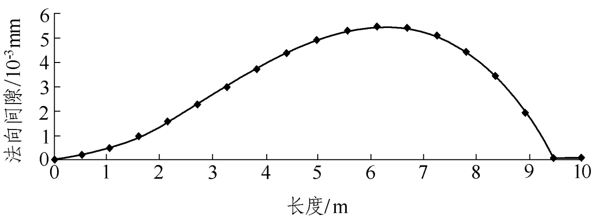


图 6　受到向上载荷作用时界面法向间隙

Fig.6　Normal gap between inferface applied with an upward load

8.2 例 2：弹性块体的滑动

作为另一个说明本文所讨论的技术算例，考虑一刚性地基上的弹性块，这个例题已被许多论文和力学大师计算过，见文[14，18]等。虽然相当简单和理想化，但很适于阐明方法的有效性。

在本问题中，图 7 所示的一个弹性块被同时施以两个方向的均布力，其中顶部载荷为 200，右部拉力为 60。弹性块的 $E=10^3$，$\nu=0.3$，对于刚性地基取，$E=10^7$，$\nu=0.25$，为了与其他作者的结果相比较，令左右两个节点对无摩擦，其他点对的摩擦参数均取 $c=0$，$\mu=0.5$。

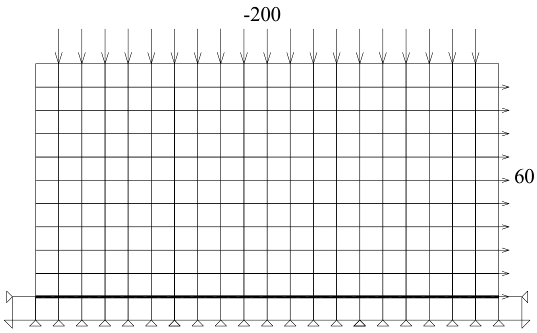


图 7　刚性地基上的弹性块体
Fig.7　An elastic block on a rigid foundation

图 8 显示了网格变形图，图 9 给出了沿摩擦界面的切向位移分布图，这一结果与文[14]吻合得非常好。严格说来，本文所给出的结果更好一些，原因是本文所建议的算法使得所有的界面约束条件都得以精确满足。

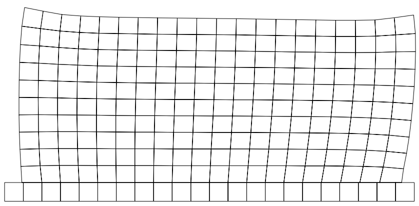


图 8　弹性块体的变形网格
Fig. 8　The deformed mesh for the elastic block problem

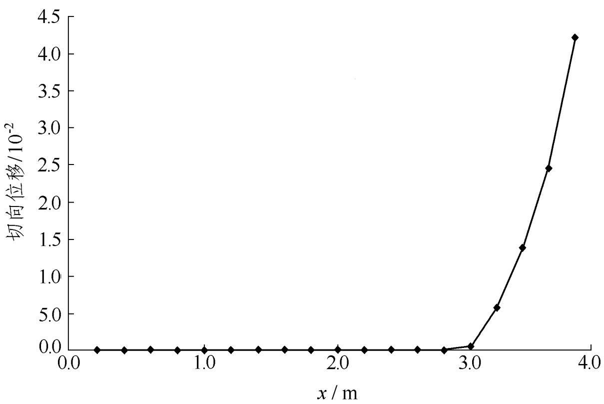


图 9　沿界面的切向位移分布
Fig. 9　The tangential displacement along the frictional interface between the elastic block and the rigid foundation

8.3 例 3：水坝问题

图 10 显示了一建筑在含一结构面的地基之上的坝体模型，表 4 提供了坝体、地基和结构面的力学参数。采用两个载荷步来进行分析。第一步仅考虑坝体和基础的自重；第二步把一个三角形分布的法向水压力作用于坝体上游表面，以模拟水库蓄满水后的工况，图 11 为模型的网格。其中基础的左右两边界及底边均被施以滑动简支约束。

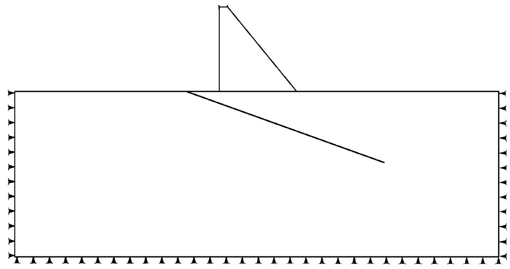


图 10　建筑在含界面上的坝体
Fig.10　A dam built on a foundation with a weak plane

表 4　例 3 的力学参数

Table 4　Mechanical parameters in Example 3

结构	E / GPa	ν	c / MPa	$\mu=\tan(\varphi)$	γ / kN・m^{-3}
坝体	200	0.17	1.2	1.2	24.5
基础	180	0.25	1.2	1.2	25.0
断层	\	\	0	0.25	\

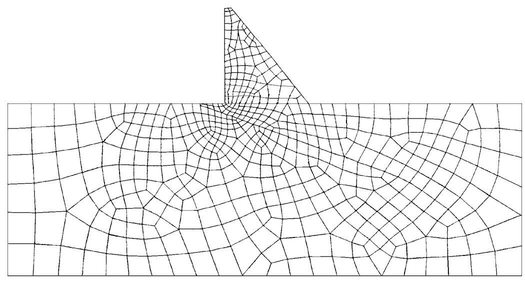


图 11　坝体-基础网格
Fig. 11　Mesh of dam and foundation system

图 12 为主应力分布图。

值得注意的是，对于本例 Katona 算法在第 2 个载荷步内不收敛，见表 3

9　结　论

通过以上分析和算例表明，由于在更新接触状态之前，已将自由度凝聚到了界面，从而使得算法

在精确满足所有界面约束条件的前提下，具有较高的求解效率。同时，本文所建议的刚度位移、非光滑接触等处理技术是方便而有效的。

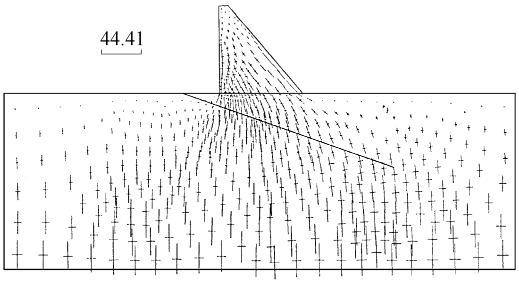


图 12　蓄满水后的主应力分布图

Fig. 12　Principal stress distribution in the dam and foundation system after full impoundment

含有上述算法的岩土工程实用软件 Geocad-SAFE，已被用于求解许多含节理网络的岩土工程问题，以后将陆续发表有关计算成果。

参 考 文 献

1　Martins J A C，Klarbring A. Preface of special issue on computational modeling of contact and friction[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.，1999，177：163～165

2　Radi B，Gelin J G，Perriot A. Subdomain methods in structural mechanics[J]. Int. J. Numer. Meth. Engng.，1994，37：3 309～3 322

3　Hilding D，Klarbring A，Pang J S. Minimization of maximum unilateral force[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.，1999，177：215～234

4　Cocus M. Existence of solutions of Signorini′s problem with friction[J]. Int. J. Eng. Sci.，1984，22：567～575

5　Pande G N，Beer G，Williams J R. Numerical Methods in Rock Mechanics[M]. New York：John Wiley and Sons Ltd.，1990

6　Fourment L，Chenot J L，Mocellin K. Numerical formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulation[J]. Int. J. Numer. Meth. Engng.，1999，46：1 435～1 462

7　Saleeb A F，Chen K，Chang T Y P. An effective two-dimensional frictional contact-model for arbitrary curved geometry[J]. Int. J. Numer. Meth. Engng.，1994，37：1 297～1 321

8　陈文胜，冯夏庭，葛修润等. 基于静态松弛的一种广义界面单元法[J]. 岩石力学与工程学报，2000，19(1)：24～28

9　Katona M G. A simple contact-friction interface element with application to buried culverts[J]. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.，1983，7：371～384

10　Desai C S，Zaman M M. Thin layer element for interfaces and joints[J]. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.，1984，8：19～43

11　Wriggers P，Van T V，Stein E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction[J]. Comput. Struct.，1990，37：319～331

12　Plesha M，Belyschko T. On the Modeling of Contact Problems with Dilation. Mechanics of Material Interfaces[M]. New York：Elsevier，1985，63～78

13　Snyman M F，Martin J B. A consistent formulation of dilatant interface element[J]. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.，1992，16：493～527

14　Simo J C，Laursen T A. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction[J]. Comput. Struct.，1992，42：97～116

15　Zienkiewicz O C，Taylor R.L. The Finite Element Method. Volume 1(4th Edition)[M]. New York：McGraw-Hill Book Company，1989

16　Jennings A，Mckeown J J. Matrix Computation (2nd Edition)[M]. New York：John Wiley and Sons Ltd.，1992

17　Pian T H H，Wu C C. General formulation of incompatible shape element and an incompatible isoparameteric element[A]. In：Proc. Invitational China – America on FEM[C]. Chengdu：[s. n.]，1986，166～171

18　Oden J T，Pires E B. Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws[J]. Comput. Struct.，1984，19：137～147

A MIXED FINITE ELEMENT SOLUTION FOR INTERFACE PROBLEMS

Zheng Hong[1]，　Lee C F[2]，　Ge Xiurun[1]，　Yue Z Q[2]

([1]*Institute of Rock and Soil Mechanics*，*The Chinese Academy of Sciences*，　*Wuhan*　430071　*China*)

([2]*Department of Civil Engineering*，*The University of Hong Kong*，　*Hong Kong*，*China*)

Abstract　A mixed formulation of interface problems is educed to lead to a well-conditioned and small scale system is. The treatment methods are also provided for some technically difficult problems under complicated contact conditions，such as great contact area，non-smooth contact，rigid displacement，etc.

Key words　contact nonlinear problem，finite element，interface