

Ad Hoc 网络有效同步传输量的概率分析

唐林俊¹, 王汉兴^{1,2}

(1. 上海大学数学系, 上海 200436; 2. 上海立信会计学院数学与统计系, 上海 201620)

摘要: 考虑了 Ad Hoc 网络各节点的同步传输干扰功率总量, 在此基础上建立了一次传输成功接收的概率模型并修正了 Ad Hoc 网络的协议-干扰模型。通过对模型进行概率分析, 得到了 Ad Hoc 网络同步传输性能的量化分析结果。数值结果显示了信号衰减指数和传输与干扰半径之比对传输容量的影响。

关键词: 无线自组网; 协议-干扰模型; 干扰功率总量

Probabilistic Analysis of Available Simultaneous Transmission Capacity in Ad Hoc Networks

TANG Lin-jun¹, WANG Han-xing^{1,2}

(1. Dept. of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436;

2. Dept. of Mathematics and Statistics, Shanghai Lixin University of Commerce, Shanghai 201620)

【Abstract】 This paper considers gross interference power of each reception nodes in Ad Hoc networks. It establishes a probability model for successful reception and modifies the protocol-interference model for Ad Hoc networks. By the method of probability, a quantity analysis of simultaneous transmission performance is obtained. The numeric results show the impacts of different network parameters, which include signal loss exponent and ratio of transmission and interference radius upon available simultaneous transmission capacity.

【Key word】 Ad Hoc networks; protocol-interference model; gross interference power

Ad Hoc 网络作为一种新颖的移动通信网络在军事和民用两方面均得到了广泛的应用, 如军事通信、临时会议、紧急服务和救灾、传感器网络等。

Ad Hoc 网络传输容量与网络节点吞吐量容量均是评估网络总体性能的重要指标, Ad Hoc 网络传输容量的本质是反映单位时间内网络字节流的几何覆盖范围的能力。文献[1]提出了 Ad Hoc 网络传输容量的概念, 并给出网络传输容量的渐近下界的阶; 文献[2]给出了单位时隙内网络同步传输容量的概念并得到了相应的估计值。以往的文献对传输容量的研究都是基于接收点协议-干扰模型, 信号一旦发射即定义传输成功, 未考虑传输成功的效率, 在实际的 Ad Hoc 网络中, 特别是信号衰减系数较小的情况下, 同步传输组对接收点成功接收信号的影响显著, 因此有必要引进网络有效传输量去分析网络传输性能。

本文在 Ad Hoc 网络的协议-干扰模型的基础上引入同步传输干扰信号总量建立接收点成功接收源节点信号(传输成功)的概率模型, 在此基础上分析了单位时隙内有效同步传输量与同步传输组数的函数关系, 在给定传输场景下得到了网络有效同步传输量的下界, 最后的数值结果显示了网络参数对网络同步传输的影响。

1 网络模型

由于 Ad Hoc 网络节点传输功率的限制, 网络区域内可能会出现独立连通闭集, 本文在讨论问题时总假设网络是完全连通的。

1.1 网络模型假设

假设 1 假设所有网络节点均匀分布在一个半径为 R 的平面圆形区域内。

假设 2 所有节点传输半径同为 R_C , 其下一跳目标节点随机均匀分布在对应源节点的传输范围内。

假设 3 网络传输时隙同步, 单位时隙内传输节点仅向其下一跳目标节点发射一个长 λ 的分组。

假设 4 所有接收点有一相同干扰半径 R_I , 其中 $R_I > R_C$ 。

由假设 1、假设 2 知, 所有节点发射功率相同, 记为 P , 由于发射节点的目标节点随机均匀分布在其传输范围内, 任意传输组中源节点与目标节点的距离 r 为一个随机变量, 其概率密度函数为

$$f_r(r) = \begin{cases} \frac{2r}{R_C^2}, & 0 < r < R_C \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

1.2 传输成功的概率模型

在假设 4 的条件下, 某一传输组(i 为源节点, j 为接收点)成功传输的条件满足:

- (1) $r_{ij} \leq R_C$;
- (2) 任意发射节点 k , 当 $k \neq i \rightarrow r_{kj} \geq R_I$;
- (3) $SINR(j) \geq \beta$ 。

其中, $SINR(j)$ 表示接收点 j 处的信号功率与干扰及噪声功率之比; β 为信噪比阈值。(1)和(2)本质上就是协议-干扰模型下传输成功的条件, (3)表示接收点成功接收信号所需要的信噪比阈值, 这在原有干扰-协议模型下未作考虑。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471088, 60572126)

作者简介: 唐林俊(1976-), 男, 讲师、博士研究生, 主研方向: 随机图及 Ad Hoc 网络; 王汉兴, 教授、博士生导师

收稿日期: 2007-01-11 **E-mail:** tlj@mail.zjxu.edu.cn

设某一时隙网络传输场景为 $\{(i_1 \rightarrow j_1), \dots, (i_M \rightarrow j_M)\}$ 时, 这里 M 表示传输组数; i_k 和 j_k ($k=1, 2, \dots, M$) 分别表示源节点和目标节点。以传输组 $(i_1 \rightarrow j_1)$ 为参考对象, 接收点 j_1 收到其他传输组同步传输干扰功率的总量 $I(j_1)$ 为

$$I(j_1) = \sum_{k=2}^M P / r_{i_k j_1}^\alpha \quad (2)$$

其中, $r_{i_k j_1}$ 为发射点 i_k ($k=2, 3, \dots, M$) 与接收点 j_1 的距离; α ($\alpha > 2$) 为信号衰减指数; 接收点 j_1 的信号功率与干扰和噪声功率之比 $SINR(j_1)$ 如下:

$$SINR(j_1) = \frac{P / r_{i_1 j_1}^\alpha}{N + I(j_1)}$$

其中, N 是环境噪声功率; $SINR(j_1)$ 为一随机变量; 对任意 k ($k=1, 2, \dots, M$), 接收点 j_k 成功接收其源节点 i_k 信号的概率 $TP(j_k)$:

$$TP(j_k) = \Pr(SINR(j_k) \geq \beta) = \Pr(j_k \text{ 成功接收 } i_k \text{ 信号})$$

若不考虑同步传输干扰功率总量, 一般情况下噪声功率较小, 接收点成功接收发射点信号的概率为 1, 协议-干扰模型就是这种情况。

2 有效传输容量的概率计算与分析

同步传输干扰功率总量是影响网络传输效率的一个重要参量。首先引入下面两个相关命题。

命题 1 基于干扰-协议模型, 在假设 4 的条件下, 网络同步传输组数 M 不超过 $[R/(R_I - R_C)]^2$ 。

证明 根据假设 4, 利用文献[1]的引理 5.4 直接得到。

命题 2 在圆形均匀网络区域中, 当接收点位于圆的中心时, 其同步传输平均干扰功率总量最大且随着偏离圆心的距离增大, 平均干扰功率总量递减; 当网络区域半径充分大时, 平均干扰功率的边界影响可忽略不计。

证明 此命题较为直观, 证明类似文献[3]。

引理 设 $\{(i_1 \rightarrow j_1), \dots, (i_M \rightarrow j_M)\}$ 为某一时隙给定传输场景, 则各接收点同步传输干扰功率总量平均值 $E[I(j_k)]$ 满足

$$E[I(j_k)] \leq \frac{P(M-1)}{\alpha-2} \cdot \frac{R_I^{2-\alpha} - R^2 - \alpha}{R^2 - R_I^2}$$

证明 由命题 2 知, 当接收点位于圆形网络区域中心时其平均干扰功率最大。假设传输组 $(j_k \rightarrow j_k)$ 的接收点 j_k 位于网络区域中心, 其余 $M-1$ 个发射节点离 j_k 点的距离分别为 Y_i ($i=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, M$), 由节点均匀分布知, Y_i 同分布且其概率密度函数为

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{2y}{R^2 - R_I^2}, & R_I < y < R \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

可得

$$E[I(j_k)] = (M-1) \int_{R_I}^R \frac{P}{y^\alpha} \cdot \frac{2y}{R^2 - R_I^2} dy = \frac{P(M-1)}{\alpha-2} \cdot \frac{R_I^{2-\alpha} - R^2 - \alpha}{R^2 - R_I^2}$$

定理 1 在引理的条件下接收点 j_k , $k=1, 2, \dots, M$ 成功接收源节点信号的概率 $TP(j_k)$ 满足

$$TP(j_k | x) \geq 1 - \int_0^{R_C} \frac{(M-1)(R_I^{2-\alpha} - R^2 - \alpha)}{(\alpha-2)(1/x^\alpha \beta - N/P)(R^2 - R_I^2)} \cdot \frac{2x}{R_C^2} dx$$

证明 取 $r_{i_k j_k} = x$ ($x \leq R_C$), 记

$$TP(j_k | x) = \Pr(j_k \text{ 成功接收 } i_k \text{ 信号} | r_{i_k j_k} = x)$$

$$= \Pr(I(j_k) \leq P/x^\alpha \beta - N)$$

利用马尔可夫不等式得

$$TP(j_k | x) \geq 1 - E[I(j_k)](P/x^\alpha \beta - N)^{-1} \geq 1 - \frac{(M-1)(R_I^{2-\alpha} - R^2 - \alpha)}{(\alpha-2)(1/x^\alpha \beta - N/P)(R^2 - R_I^2)}$$

根据全概率公式

$$TP(j_k) \geq \int_0^{R_C} TP(j_k | r) f_r(r) dr = 1 - \int_0^{R_C} \frac{(M-1)(R_I^{2-\alpha} - R^2 - \alpha)}{(\alpha-2)(1/x^\alpha \beta - N/P)(R^2 - R_I^2)} \cdot \frac{2x}{R_C^2} dx \quad (3)$$

式(3)即为传输成功的概率下界, 记 $LTP(\bullet)$ 。

推论 1 在定理 1 的条件下, 当噪声功率相对传输功率充分小 ($P \gg N$), 网络区域半径相对传输半径充分大 ($R \gg R_C$) 时, 接收点成功接收信号的概率下界可表示为

$$LTP(j_k) = 1 - \frac{(M-1)K^2 L^\alpha \beta}{(\alpha^2 - 4)}$$

其中, $K = R_I/R, L = R_C/R_I$ 。

定义 1 设 $\{(i_1 \rightarrow j_1), \dots, (i_M \rightarrow j_M)\}$ 为某一时隙给定传输场景, 则此时隙内网络有效传输容量 TC 可定义为: 单位时隙内同步传输组数 M 的一个函数:

$$TC(M) = E_r \left\{ \sum_{k=1}^M \lambda_k \cdot r TP(j_k | r) \right\} \quad (4)$$

其中, λ_k 表示第 k 组传输对的传输速率, 根据假设 3, 式(4)简化为

$$TC(M) = M \cdot \lambda \cdot E_r [r \cdot TP(j_1 | r)] \quad (5)$$

有效传输量定义本质上是在文献[2]中传输量的定义下引入传输成功的概率含义, 即有效传输组。

定理 2 设 $\{(i_1 \rightarrow j_1), \dots, (i_M \rightarrow j_M)\}$ 为某一时隙给定传输场景, 则此时隙内网络有效传输量满足

$$TC(M) \geq \frac{2\lambda M R_C}{3} - \frac{M(M-1)(R_I^{2-\alpha} - R^2 - \alpha)Q}{(\alpha-2)(R - R_I^2)}$$

$$\text{其中, } Q = \int_0^{R_C} \frac{2P\beta r^{\alpha+2}}{P - N\beta r^\alpha} dr \quad (6)$$

证明 根据式(3), 该时隙内整个有效网传输量为

$$\begin{aligned} TC(M) &= M\lambda E_r [r TP(j_k | r)] \\ &= M\lambda \int_0^{R_C} r \cdot TP(j_k | r) \cdot f_r(r) dr \\ &\geq \lambda M \int_0^{R_C} r \left[1 - \frac{(M-1)(R_I^{2-\alpha} - R^2 - \alpha)}{(\alpha-2)(1/x^\alpha \beta - N/P)(R^2 - R_I^2)} \right] \cdot f_r(r) dr \\ &= \frac{2\lambda M R_C}{3} - \frac{M(M-1)(R_I^{2-\alpha} - R^2 - \alpha)}{(\alpha-2)(R^2 - R_I^2)} \int_0^{R_C} \frac{2P\beta r^{\alpha+2}}{P - N\beta r^\alpha} dr \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)即为有效传输量下界, 记 $LTC(\bullet)$ 。

推论 2 在定理 2 的条件下, 当噪声功率相对传输功率充分小 ($P \gg N$), 网络区域半径相对传输半径充分大 ($R \gg R_C$) 时, 此时隙内网络有效传输量下界可表示为

$$LTC(M) = \left(\frac{2\lambda M}{3} - \frac{\lambda \beta M(M-1)K^2 L^\alpha}{(\alpha-2)(\alpha+3)} \right) R_C$$

证明 根据式(5), 则

$$\begin{aligned} TC &= M\lambda E(r_{i_k j_k} \cdot TP(j_k)) \\ &\geq \lambda M \int_0^{R_C} r \left[1 - \frac{(M-1)K^2 \beta}{(\alpha-2)} \left(\frac{r}{R_I} \right)^\alpha \right] \cdot f_r(r) dr \\ &= \lambda \int_0^{R_C} \left[1 - \frac{(M-1)K^2 \beta}{(\alpha-2)} \left(\frac{r}{R_I} \right)^\alpha \right] \cdot \frac{2r^2}{R_C^2} dr \end{aligned}$$

所以，

$$LTC(M) = \left(\frac{2\lambda M}{3} - \frac{\lambda M(M-1)K^2\beta L^\alpha}{(\alpha-2)(\alpha+3)} \right) R_C$$

对于给定网络，在某一时刻内网络有效传输量的下界 LTC 是同步传输组数 M 的一个二次函数，可表示为

$$LTC(M) = -W_1 M^2 + W_2 M$$

其中， W_1 与 W_2 分别表示与网络参数有关的常数：

$$W_1 = \frac{(R_f^{2-\alpha} - R^2 - \alpha)}{(\alpha-2)(R^2 - R_f^2)} \int_0^{R_c} \frac{2P\beta r^{\alpha+2}}{P - N\beta r^\alpha} dr, \quad W_2 = W_1 + \frac{2\lambda M R_C}{3}$$

若 $\frac{W_2}{2W_1} \leq \tilde{M}$ ，当 $M = \left\lfloor \frac{W_2}{2W_1} \right\rfloor$ 或 $M = \left\lceil \frac{W_2}{2W_1} \right\rceil$ 时， $LTC(M)$ 取最大值；

若 $\frac{W_2}{2W_1} > \tilde{M}$ ，当 $M = \tilde{M}$ 时， $LTC(M)$ 取最大值。

由上可知，在给定网络条件下，Ad Hoc 网络有效传输量的最大下界总是存在的，将这个可确保的最大有效传输量下界称为单位时隙内网络有效传输容量。

定理 3 在推论 2 的条件下，当同步传输组数 M 充分大时，单位时隙内网络传输量近似为

$$TC \approx M \int_0^{R_c} \Phi \left(\frac{(1/r^\alpha \beta - N/P - C_1)}{\sqrt{C_2 - C_1^2}} \right) \frac{2r^2}{R_c^2} dr$$

其中， $\Phi(\bullet)$ 为标准正态分布函数； C_1, C_2 为常数。

证明 不失一般性，以 (i_1, j_1) 为参考对象，传输成功的概率：

$$\begin{aligned} TP(j_1 | x) &= \Pr(I(j_1) \leq P / x^\alpha \beta - N) \\ &= \Pr \left(\sum_{k=2}^M \frac{1}{Y^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha \beta} - \frac{N}{P} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

对于大型网络，当 M 充分大时，根据命题 2，忽略节点同步传输干扰功率总量的边界影响，令 $Z = \sum_{k=2}^M 1/Y^\alpha$ ，则

$$E(Z) = \frac{(M-1) \cdot R_f^{2-\alpha} - R^2 - \alpha}{\alpha-2 \cdot R^2 - R_f^2} \approx \frac{(M-1)}{(\alpha-2)R^\alpha} \left(\frac{R_f}{R} \right)^2 \triangleq C_1$$

$$E(Z^2) = \frac{(R_f^{2-2\alpha} - R^2 - 2\alpha)}{(2-2\alpha)(R^2 - R_f^2)} \approx \frac{(M-1)}{(2-2\alpha)R^{2\alpha}} \left(\frac{R_f}{R} \right)^2 \triangleq C_2$$

由命题 1 知 C_1, C_2 为有界常数，利用中心极限定理，式 (8) 可表示为

$$\Pr \left(\sum_{k=2}^M \frac{1}{Y^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha \beta} - \frac{N}{P} \right) \approx \Phi \left(\frac{(1/x^\alpha \beta - N/P - C_1)}{\sqrt{C_2 - C_1^2}} \right)$$

根据定义 1，得

$$TC \approx M \int_0^{R_c} \Phi \left(\frac{(1/r^\alpha \beta - N/P - C_1)}{\sqrt{C_2 - C_1^2}} \right) \frac{2r^2}{R_c^2} dr$$

所以，当网络规模较大时可以利用定理 3 近似估计 Ad Hoc 网络有效传输量及容量。

3 数值结果分析

信号衰减指数 α 和传输与干扰半径比值 L 是影响 Ad Hoc 同步传输性能的两个重要的网络参数。为了简化计算，通过令 $N \ll P$ ， $\lambda=1$ ， $\beta=10$ ， $K=0.05$ ， $R_C=1$ 来分析不同信号衰减指数 α 和传输与干扰半径比值 L 对网络同步传输的影响。表 1 显示了不同网络信号衰减指数 α 与传输干扰半径之比 L 下的网络有效传输容量。其中，有效传输容量以一个节点一次成功传输量为单位。

表 1 不同参数条件下网络有效传输容量

参数		有效传输容量
α	L	
3	0.4	332
3	0.5	213
3	0.6	150
4	0.4	775
4	0.5	780
4	0.6	575

在相同的 L 取值下， $\alpha=4$ 时有效传输容量较 $\alpha=3$ 时大，即衰减系数越大，同步传输组间干扰影响越小，有效传输容量越大。当 α 给定的条件下，网络传输容量随 L 变化相对复杂，当 L 减少时同步传输间干扰相对降低，但同时也降低了网络潜在的同步传输组，因此在不同的 α 取值条件下，设计一个最佳的 L 是非常重要的^[4]。当 $\alpha=3$ 时，有效传输容量在 $L=0.4$ 时较 $L=0.5, L=0.6$ 时大，这是由于 L 在这段变化区间内同步传输干扰对成功传输影响明显。由图 1 可知，网络有效传输量增加速度随传输组数的增加而迅速减小。根据图 2，当 $\alpha=4$ 时，有效传输容量在 $L=0.5$ 时较 $L=0.4, L=0.6$ 时大，并且当 $L=0.4$ 与 $L=0.5$ 时，网络有效传输量随同步传输组数呈近似线性增长，这时候的网络传输受同步传输的干扰影响可以近似忽略不计。在这种网络环境下，同步传输干扰功率总量对同步传输的影响可忽略不计，即 α 与 L 取适当大小的值时， α 适当大， L 适当小时，现有的协议-干扰传输模型仍是有效的。

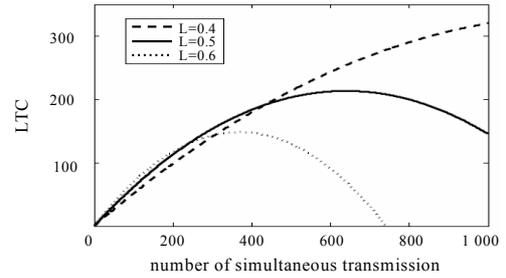


图 1 $\alpha=3$ 时，有效传输量下界随同步传输组数的变化趋势

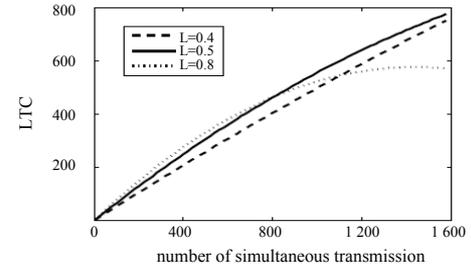


图 2 $\alpha=4$ 时，有效传输量下界随同步传输组数的变化趋势

4 结论

本文通过引进同步传输干扰信号总量，在干扰-协议模型的基础上建立了接收点成功接收源节点信号的概率模型，通过对单位时隙内有效传输量的分析和计算，得到了给定传输场景下单位时隙内传输成功的概率和有效传输量的近似下界。通过研究有效传输量随同步传输组数的变化趋势，指出了现有协议-干扰传输模型在使用时的局限性。本文的研究结果对今后 Ad-Hoc 网络同步传输性能评估及网络协议模型的改进具有一定的指导意义，尤其在不同的 α 取值条件下，设计一个最佳的参数 L ，具有重要的实践价值。

(下转第 44 页)