

## 正弦波信号频率估计快速高精度递推算法的研究

胥嘉佳 刘渝 邓振淼 陈役涛

(南京航空航天大学信息科学与技术学院 南京 210016)

**摘要:** 该文提出了一种正弦波频率估计的频偏校正算法, 结合 M-Rife 算法精度高和频偏校正算法运算量小的特点, 研究了一种快速高精度正弦波信号频率估计的递推算法。先对一个较短的截短信号序列用 M-Rife 算法进行频率初始估计, 以此作初始值用频偏校正算法对一个更长的截短信号序列进行估计得到更精确的估计频率, 并依此类推, 在最后一步递推时, 用 M-Rife 算法得到最终的估计频率。在信号序列较长时, 该算法的运算量小于做一次 FFT。仿真结果表明, 该算法性能稳定, 估计方差接近克拉美-罗限(Cramer-Rao Lower Bound, CRLB), 与 M-Rife 算法相仿。该算法便于实时地实现高精度频率估计。

**关键词:** 频率估计; DFT 系数; 克拉美-罗限; 频偏校正; 递推算法

中图分类号: TN911.6

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)04-0865-05

## A Research of Fast and Accurate Recursive Algorithm for Frequency Estimation of Sinusoid Signal

Xu Jia-jia Liu Yu Deng Zhen-miao Chen Yi-tao

(College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** A frequency offset correcting algorithm is presented for frequency estimation of sinusoid signal, and a fast and accurate recursive algorithm for frequency estimation of sinusoid signal is investigated by associating the advantage of high accuracy of the M-Rife algorithm and the advantage of small computational load of the frequency offset correcting algorithm. Firstly, an initial estimation is obtained by the M-Rife algorithm for a truncated signal series which has a few points. Next, with the initial estimation result, a more accurate estimation is obtained by the frequency offset correcting algorithm for a longer truncated signal series. And then, deduce the rest by analogy. Finally, the ultimate estimation is obtained by the M-Rife algorithm for the entire signal series. The computational complexity of the recursive algorithm is lower than that of an FFT operation when the signal series is long. Simulation results show that the performance of this algorithm is stable, and the estimation variance is nearly the same as the M-Rife algorithm, approaching to CRLB(Cramer-Rao Lower Bound). The algorithm is convenient for realizing real-time frequency estimation accurately.

**Key words:** Frequency estimation; DFT coefficient; Cramer-Rao Lower Bound(CRLB); Frequency offset correcting; Recursive algorithm

### 1 引言

正弦波频率估计在通讯、雷达和电子侦察等领域有广泛的应用, 多年来学者们研究了许多频率估计算法, 其焦点集中在两个方面: 估计的精度和算法实现所需的计算量。最大似然估计<sup>[1]</sup>是最优估计, 估计的方差等于克拉美-罗限(CRLB), 但需要作一维DFT搜索, 计算量大, 无法实时处理。Rife算法<sup>[2]</sup>利用DFT的两根最大谱线进行插值处理, 估计频率。当信号频率位于两相邻量化频率之间的中心区域时, 估计精度很高, 估计方差接近CRLB, 但在信号频率接近量化频率点时误差较大。文献[3,4]提出了一种修正Rife算法(M-Rife), 性能稳定, 在全频段上接近CRLB。文献[5,6]提出的牛顿迭代算法是一种准最大似然估计, 使估计性能进

一步接近CRLB。文献[7]提出相位平均算法, 不需要作DFT, 速度很快, 但信噪比小于6dB时性能急剧下降, 文献[1-6]均是在DFT基础上进行频率估计的, Rife算法仅需作一次FFT, 其它方法则需增加相应的计算量。

本文提出了一种递推算法, 在适度信噪比条件下, 对正弦波频率进行快速估计, 其运算量可小于一次FFT, 精度与M-Rife算法相仿, 接近CRLB。

### 2 频偏校正算法

加性高斯白噪声污染的正弦波信号序列表示为

$$x(n) = A \exp[j(2\pi f_0 n \Delta t + \varphi_0)] + w(n), \quad n = 0, 1, \dots, L-1 \quad (1)$$

式中  $A$ ,  $f_0$ ,  $\varphi_0$  分别为信号的幅度、频率和初始相位,  $\Delta t$  为采样间隔,  $w(n)$  为实虚部相互独立的、方差为  $2\sigma^2$  的零均值复高斯白噪声序列。对信号序列做 FFT, 得到最大谱线位

置  $k_0$ ，则信号的粗估计频率为  $\hat{f}_0 = (k_0/L)f_s$ ，其中  $f_s = 1/\Delta t$  为采样频率，构造序列：

$$y(n) = \exp(-j2\pi\hat{f}_0 n\Delta t), n = 0, 1, \dots, L-1 \quad (2)$$

将式(1)与式(2)进行相关累加得

$$z(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k)y(k) = \sum_{k=0}^{n-1} A \exp[j(2\pi\Delta f k\Delta t + \varphi_0)] + \sum_{k=0}^{n-1} w(k)y(k), n = 1, 2, \dots, L \quad (3)$$

其中  $\Delta f = f_0 - \hat{f}_0$ ，是频率偏差。经整理得

$$z(n) = A \frac{\sin[\pi n \Delta f \Delta t]}{\sin(\pi \Delta f \Delta t)} \exp[j(\pi(n-1)\Delta f \Delta t + \varphi_0)] + w_1(n) \quad (4)$$

$w_1$  为相关累加后的噪声项，很显然  $w_1$  均值为 0，方差为  $2n\sigma^2$ 。

$z(n)$  的信号部分的模为  $|z_s(n)| = A \left| \frac{\sin[\pi n \Delta f \Delta t]}{\sin(\pi \Delta f \Delta t)} \right|$ ，当  $n\Delta f \Delta t \rightarrow 0$  时， $|z_s(n)| \rightarrow nA$ ，此时信噪比趋近于  $nA^2/2\sigma^2$ 。但当  $n\Delta f \Delta t$  较大时， $|z_s(n)|$  的值就不好确定了。图 1 为  $\Delta f$  取不同值，信号幅度  $A=1$  时  $|z_s(n)|$  与  $n$  的关系曲线，其中  $b$  为  $\Delta f$  与频率分辨率  $\Delta F = 1/(L\Delta t)$  的比值， $b = \Delta f/(\Delta F) = L\Delta f \Delta t$ 。

从图 1 可以看出当  $b$  小于等于 1/2 时， $|z_s(n)|$  随  $n$  的增大而增大， $b$  越小， $|z_s(n)|$  与  $n$  的线性关系越显著。这也验

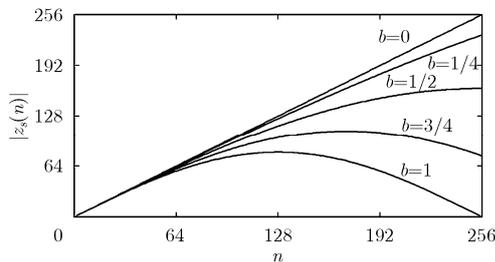


图 1  $|z_s(n)|$  与  $n$  的关系曲线

证了前面的分析。如果采用 FFT 做粗估计， $\Delta f$  正好满足小于等于 1/2 频率分辨率。在相同的  $n$  值情况下， $\Delta f$  越小， $|z_s(n)|$  值越大，信噪比也越大。因此，相关累加的过程就是提高信噪比的过程。

在信噪比较高时， $z_s(n)$  的相位为

$$\varphi(n) = \arctan \left( \frac{\text{Im}[z(n)]}{\text{Re}[z(n)]} \right) \approx \varphi_0(n) + \pi(n-1)\Delta f \Delta t \quad (5)$$

频率偏差  $\Delta f$  的估计值为

$$\widehat{\Delta f} = \frac{[\varphi(P) - \varphi(Q)]}{\pi(P-Q)\Delta t} \quad (6)$$

这样就可得校正后的精确频率估计：

$$\widehat{f}_0 = \hat{f}_0 + \widehat{\Delta f} = k_0 f_s / L + \widehat{\Delta f} \quad (7)$$

式(6)中  $P$  和  $Q$  的具体取值对  $\Delta f$  的估计也有一定影响。根据对图 1 的分析知， $n$  越大，信噪比也越大，可以断定  $\varphi(n)$  的精度也是随着  $\varphi(n)$  的增大而提高，因此  $P$  取最大值  $L$ 。现观察  $Q$  的取值对估计精度的影响，本文对  $Q$  分别取  $0.1L$  到  $0.9L$  之间的 9 个离散值， $L=256$ ，在 SNR 为 6dB 和 0dB 条件下估计频率，分别做 500 次 Monte Carlo 模拟统计均方根误差(RMSE，单位 kHz)，结果如表 1 所示。统计结果表明， $Q$  取值在  $0.5L$  附近 RMSE 较小，所以  $Q$  取  $0.5L$  是比较恰当的。

表 2 给出了频偏校正算法的仿真结果，仿真条件：采样频率  $f_s$  为 200MHz ( $\Delta t=5\text{ns}$ )，采样点数  $L=256$ ，设  $f_i$  为某个量化频率，现取  $f_i = f_s/4 = 50\text{MHz}$ ，从  $f_i$  到  $f_i + \Delta F/2$  共取 11 个离散频率  $f_i = f_i + (i/20)\Delta F (i = 0, 1, \dots, 10)$ ， $\varphi_0 = \pi/6$ ，对每一个频率  $f_i$  的正弦波分别进行 1000 次 Monte Carlo 模拟，分别计算均方根误差(RMSE)和平均绝对误差(MAE)(单位 kHz)。表 2 数据表明，频偏校正算法的性能随初始估计的误差  $\Delta f$  单调变化，当  $\Delta f \leq \Delta F/4$  时，估计的均方根误差小于 1.25 倍 CRLB。

表 1  $Q$  不同取值频率估计的 RMSE(kHz)

$Q/L$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
SNR=6dB	14.23	12.03	11.14	10.77	10.70	10.76	11.15	12.08	14.25
SNR=0dB	30.72	24.22	23.77	23.49	23.13	23.61	23.89	24.95	28.49

表 2 频偏校正算法的性能(SNR=6dB, CRLB=9.54kHz)

被估计频率(MHz)	RMSE(kHz)	MAE(kHz)	被估计频率(MHz)	RMSE(kHz)	MAE(kHz)
50.0000	10.8534	8.7262	50.2344	12.5071	10.0321
50.0391	10.8605	8.6961	50.2734	13.2607	10.6648
50.0781	10.9633	8.7474	50.3125	14.2204	11.4845
50.1172	11.1678	8.8974	50.3516	15.4372	12.5266
50.1563	11.4832	9.1531	50.3906	16.7136	13.4678
50.1953	11.9234	9.5265			

### 3 递推算法

频偏校正算法启示我们, 如果先对一段长度为  $N_0$  的较短数据进行频率估计得  $\widehat{f}_{N_0}$ , 然后选择一个与  $\widehat{f}_{N_0}$  最接近的完整数据段(长度为  $L$ )的量化频率  $k_1 f_s / L$ , 构造式(2)的  $y(n)$ ,  $y(n)$  的长度为  $N_1 > N_0$ , 进行下一步频偏估计, 如果

$$|f_0 - k_1 f_s / L| < f_s / 4N_1 \quad (8)$$

那么估计频率  $\widehat{f}_{N_1}$  的均方根误差小于长度为  $N_1$  测量数据的 1.25 倍 CRLB。

在信噪比是常数条件下, 频率估计的均方根误差的  $\text{CRLB} \propto N^{-3/2}$  ( $N$  是信号长度), 因此频率估计的精度随着处理数据段的样本点数增加而提高。

我们希望初始处理数据段长度  $N_0$  小, 因为可以减小初始估计  $\widehat{f}_{N_0}$  的计算量, 选取大的  $N_1$  则可以使后续估计  $\widehat{f}_{N_1}$  的精度改善尽可能大, 但是  $N_0$ ,  $N_1$  的选择受式(8)的制约。我们之所以选择 DFT 的量化频率逼近初始估计值  $\widehat{f}_{N_0}$ , 是因为式(2)中复指数不需另行计算, 可以事先存储, 减小计算量是本文的宗旨。如存储器足够大, 频率量化的步长  $\Delta F$  尽量取小, 使逼近误差尽可能小。

根据上面的分析, 我们可以构造正弦波频率估计的递推算法。不失一般性, 假设被处理的信号长度  $L = 2^l$ 。递推算法描述如下:

(1) 对  $L = 2^l$  点接收信号作  $N_0 = 2^{l_0}$  点截取 ( $l_0 < l$ ), 用 M-Rife 算法对这个截取短序列作频率估计  $\widehat{f}_{N_0}$ 。

(2) 选择一个与  $\widehat{f}_{N_0}$  最接近的量化频率  $k_1 f_s / L$ , 构造  $y(n) = \exp[-j2\pi(k_1 / L)f_s n \Delta t]$ ,  $n=0, 1, \dots, N_1 - 1, N_1 = 2N_0$ 。

(3)  $z(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k)y(k)$ , 用式(5), 式(6)估计频偏  $\widehat{\Delta f}$ 。

$$\widehat{f}_{N_1} = \frac{k_1}{L} f_s + \widehat{\Delta f}。$$

(4) 重复步骤(2), 步骤(3), 得到  $\widehat{f}_{N_2} \dots \widehat{f}_{N_m}$ ,  $N_{k+1} = 2N_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, (l - l_0) - 2$ 。  $N_m = L/2 = 2^{l-1}$ 。

(5) 得到  $\widehat{f}_{N_m}$  后, 剩下最后一步递推, 为了保证精度, 采用 M-Rife 算法。先判断  $\widehat{f}_{N_m}$  是否落在与其相邻的两个量化频率  $k_{m+1} f_s / L$  与  $(k_{m+1} + 1) f_s / L$  之间的  $f_s / 3L$  区域: 如果是的, 则计算信号序列在这两个量化频率上的 DFT 谱线, 并将其作为最大和次大谱线, 用 Rife 算法公式进行频率插值, 得到最终估计频率  $\widehat{f}_L$ ; 否则先将信号频率平移  $f_s / 3L$ , 使  $\widehat{f}_{N_m}$  落在两个量化频率点的中心区域, 再用 Rife 算法公式插值得到  $\widehat{f}_L$ 。

### 4 算法性能分析及环境保障

现讨论保障上述递推算法性能的若干问题。

对复正弦波信号, 在相位、幅度和频率 3 个参数均不知道的情况下, 频率参数  $f_0$  无偏估计所能达到最小方差, 即克拉美-罗限<sup>[1]</sup>为

$$\text{CRLB} = \frac{6}{(2\pi)^2 \cdot \text{SNR} \cdot (\Delta t)^2 N(N-1)^2} \approx \frac{6}{(2\pi)^2 \cdot \text{SNR} \cdot (\Delta t)^2 N^3} \quad (9)$$

式中  $\text{SNR} = A^2 / (2\sigma^2)$  为信噪比。

在适度的信噪比条件下, M-Rife 算法估计结果的均方根误差在任何频段上都小于 1.15 倍 CRLB<sup>[3]</sup>, 当频偏小于  $1/4$  量化频率时频偏校正算法的均方根误差小于 1.25 倍 CRLB 的平方根。根据“ $3\sigma$  准则”, 随机事件落在其 3 倍标准差以外的概率非常小, 那么可以认为 M-Rife 算法和频偏校正算法(在递推算法中)绝大多数估计结果的误差均分别小于其  $3 \times 1.15$  倍和  $3 \times 1.25$  倍 CRLB。

在上一节中提到, 希望初始估计的数据截取长度  $N_0$  尽可能小, 这样可减少计算量, 但为了保证递推频偏估计的精度, 初始估计的误差要小于第一级递推时量化频率的  $1/4$ 。因此要求:

$$3 \times 1.15 \times \sqrt{\frac{6}{(2\pi)^2 \cdot \text{SNR} \cdot N_0^3 \Delta t^2}} < \frac{1}{4} \times \frac{1}{2N_0 \Delta t} \quad (10)$$

化简得

$$N_0 \cdot \text{SNR} > 115.7736 \quad (11)$$

式(11)给出了在某个信噪比条件下,  $N_0$  能取的最小值。

第  $k$  次递推估计的数据长度  $N_k = 2^k N_0$ , 均方根误差的

$$\begin{aligned} \text{CRLB} &\approx \sqrt{\frac{6}{(2\pi)^2 \cdot \text{SNR} \cdot (\Delta t)^2 (2^k N_0)^3}} \\ &= \sqrt{\frac{6}{(2\pi)^2 \cdot \text{SNR} \cdot 2^k N_0}} \frac{1}{2^k N_0 \Delta t} \end{aligned} \quad (12)$$

要求

$$3 \times 1.25 \times \sqrt{\frac{6}{(2\pi)^2 \cdot \text{SNR} \cdot 2^k N_0}} \frac{1}{2^k N_0 \Delta t} < \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{k+1} N_0 \Delta t} \quad (13)$$

当  $k \geq 1$  时, 如式(11)满足, 那么上式自然满足。

算法的最后一步实质是 M-Rife 算法, 它要求前一步的估计误差小于  $(1/6)[1/(L\Delta t)]$ , 即

$$3 \times 1.25 \times \sqrt{\frac{6}{(2\pi)^2 \cdot \text{SNR} \cdot (L/2)^3 \Delta t^2}} < \frac{1}{6} \times \frac{1}{L\Delta t} \quad (14)$$

化简得

$$L \cdot \text{SNR} > 615.5262 \quad (15)$$

综上所述, 要保证递推算法具有较高的估计精度, 信号长度以及初始估计的数据截取长度必须满足:

$$\left. \begin{aligned} L &> 615.5262 / \text{SNR} \\ N_0 &> 115.7736 / \text{SNR} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

## 5 计算量与性能分析

### 5.1 计算量分析

递推算法的计算量主要有以下 4 个部分:

(1) Rife 算法需要做一次  $N_0$  点的 FFT 运算并对每个 FFT 系数求模的平方以找出最大和次大的 FFT 谱线。对一个复数求模的平方需要做 2 次实数乘法和 1 次实数加法, 这相当于半次复数乘法的运算量, 因此 Rife 算法共需要  $N_0(\log_2 N_0 + 1)/2$  次复数乘法和  $N_0 \log_2 N_0$  次复数加法。

(2) M-Rife 算法需要增加的计算量为做一次  $N_0$  点的复数向量乘, 并计算两个采样频率点的 DFT 系数, 这需要  $3N_0$

次复数乘法和  $2(N_0 - 1)$  次复数加法。假设被估计信号的频率是均匀分布的,那么需要对(1)的结果进行修正的概率为  $2/3$ ,因此 M-Rife 算法平均需要增加的计算量为  $2N_0$  次复数乘法和  $4(N_0 - 1)/3$  次复数加法。

(3)用频偏校正算法估计  $2N_0$  点截短信号频率时需要做一次  $2N_0$  点的复数向量乘和一次  $2N_0 - 1$  点的复数向量加。那么用频偏校正算法分别估计  $2N_0, 4N_0, \dots, L/2$  点截短信号,总共需要做  $L - 2N_0$  次复数乘法和  $L - 2N_0 - (l - l_0 - 1)$  次复数加法。

(4)对  $L$  点信号序列做最终估计时,对信号进行移频需要做一次  $L$  点的复数向量乘,计算两个量化频率点的 DFT 系数需要做两次  $L$  点的复数向量乘和  $L-1$  点的复数向量加。移频的概率为  $2/3$ ,因此最终估计总共平均需要做  $8L/3$  次复数乘法和  $2L-2$  次复数加法。

综上所述,本算法总共需要的运算量为:  $N_0(\log_2 N_0 + 1)/2 + 11L/3$  次复数乘法和  $(\log_2 N_0 - 2/3)N_0 + 3L - 7/3 - (l - l_0 - 1)$  次复数加法。

考虑到复数乘法的计算量比复数加法大得多,因此主要用复数乘法的次数作为考察一个算法计算量的标准。表3列出了  $N_0$  和  $L$  取不同值时递推算法所需复数乘法的次数,并给出  $L$  点 FFT 运算(包括计算所有 FFT 系数模的平方)所需的复数乘法次数。从表中可以看出,  $N_0$  取值越小,递推算法所需的运算量越小,当  $L$  较小时,递推算法的复数乘法次数接近 FFT,而当  $L$  较大时,递推算法的计算量小于做一次

FFT。

5.2 性能分析

为了检验递推算法的估计性能,本文取采样频率  $f_s=200\text{MHz}$ ,取  $\text{SNR}=3\text{dB}$ ,按照式(16),取  $L$  和  $N_0$  的最小值分别为  $L=512, N_0=64$ ,则初始估计序列的 FFT 量化频率为  $\Delta F = f_s/N_0=12.5\text{MHz}$ 。取  $f_i = f_s/4 = 50\text{MHz}$ ,从  $f_i$  到  $f_i + \Delta F/2$  共取 4 个离散频率  $f_i = f_i + (i/6)\Delta F (i = 0, 1, \dots, 10)$ ,对频率为  $f_i$  的  $L$  点正弦波序列分别用 M-Rife 算法和递推算法进行频率估计,并给出递推算法的初始估计结果和中间递推过程的估计结果。Monte Carlo 仿真次数为 1000 次,计算估计的均方根误差(RMSE)和平均绝对误差(MAE)(单位 kHz),仿真结果列于表4。并取  $\text{SNR}=0\text{dB}$ ,取  $L$  和  $N_0$  的最小值分别为  $L=1024, N_0=128$ ,做相同的仿真,结果列于表5。

从表4和表5中可以看出,在  $L$  和  $N_0$  的值满足式(16)时,递推算法的初始估计和每一步递推估计结果的精度随着 CRLB 逐步提高。递推算法在整个频段上均能保持较高的估计性能,在较低信噪比条件下估计性能稳定,估计的均方根误差与 M-Rife 算法相仿,十分接近 CRLB。

6 结束语

本文研究的这种正弦波信号频率估计的快速高精度递推算法,估计精度与 M-Rife 算法相仿,接近 CRLB,在信号序列较长时,运算量小于做一次 FFT,有利于实时处理。

表3 算法复数乘法的次数

L	FFT 运算	递推算法			
		$N_0=128$	$N_0=164$	$N_0=32$	$N_0=16$
256	1152	1515	1195	1051	987
512	2560	2453	2133	1989	1925
1024	5632	4331	4011	3867	3803
2048	12288	8085	7765	7621	7557

表4 算法性能 1(SNR=3dB)

被估频率 (MHz)	M-Rife 算法		递推算法		初始估计		一次递推		二次递推	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
50.0	5.095	4.165	5.133	4.179	116.535	95.006	44.909	35.840	15.860	12.701
52.08	5.240	4.212	5.337	4.251	110.856	88.260	44.706	35.468	15.694	12.687
54.17	5.374	4.285	5.355	4.297	115.460	89.262	44.984	36.269	15.996	12.603
56.25	5.021	4.008	5.084	4.023	108.685	87.104	43.383	33.805	16.110	12.976
平均值	5.182	4.168	5.227	4.187	112.884	89.908	44.495	35.346	15.915	12.742
CRLB	4.7645kHz				107.8092kHz		38.1163 kHz		13.4761kHz	

表5 算法性能 2(SNR=0dB)

被估频率 (MHz)	M-Rife 算法		递推算法		初始估计		一次递推		二次递推	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
50.0	2.550	2.037	2.522	1.997	59.360	47.809	21.819	17.385	8.026	6.352
52.08	2.518	2.046	2.617	2.114	54.723	43.758	21.698	17.163	7.757	6.162
54.17	2.588	2.093	2.650	2.118	57.568	44.693	22.032	17.468	7.647	6.036
56.25	2.597	2.097	2.602	2.090	54.325	42.987	22.423	18.006	7.739	6.162
平均值	2.563	2.068	2.598	2.080	56.494	44.812	21.993	17.505	7.792	6.178
CRLB	2.3794 kHz				53.8407 kHz		19.0356 kHz		6.7301 kHz	

## 参 考 文 献

- [1] Rife D C and Boorstyn R R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observation. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1974, IT-20(5): 591-598.
- [2] Rife D C and Vincent G A. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones [J]. *Bell Syst Tech. J.*, 1970, 49(2): 197-228.
- [3] 邓振淼, 刘渝, 王志忠. 正弦波频率估计的修正Rife算法[J]. *数据采集与处理*, 2006, 21(4): 473-477.  
Deng Zhenmiao, Liu Yu, and Wang Zhi-zhong. Modified rife algorithm for frequency estimation of sinusoid wave [J]. *Journal of Data Acquisition & Processing*, 2006, 21(4): 473-477.
- [4] 邓振淼, 刘渝. 正弦波频率估计的牛顿迭代方法初始值研究[J]. *电子学报*, 2007, 35(1): 104-107.  
Deng Zhenmiao and Liu Yu. The starting point problem of sinusoid frequency estimation based on Newton's method [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2007, 35(1): 104-107.
- [5] Rife D C. Digital tone parameter estimation in the presence of Gaussian noise [D]. New York: Polytech. Inst. Brooklyn. 1973.
- [6] Abatzoglou T J. A fast maximum likelihood algorithm for the frequency estimation of a sinusoid based on New ton's method [J]. *IEEE Trans. on ASSP*, 1985, 33(1): 77-89.
- [7] Kay S. A fast and accurate single frequency estimator [J]. *IEEE Trans. on Acoust Speech Signal Process*, 1989, 37(12): 1987-1990.
- 胥嘉佳: 男, 1981年生, 博士生, 研究方向为信号处理和电子智能.
- 刘 渝: 男, 1945年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为信号处理和电子智能.
- 邓振淼: 男, 1977年生, 博士, 研究方向为信号处理和电子智能.
- 陈役涛: 男, 1982年生, 硕士生, 研究方向为信号处理和电子智能.