

# 非线性弹性地基上受简谐激励矩形薄板 的主共振与奇异性

杨志安, 李志永

(唐山学院 唐山市结构与振动工程重点实验室, 河北 唐山 063000)

**摘要:** 建立了小挠度矩形薄板在非线性弹性地基上受均布横向简谐激励作用的动力学方程, 利用 Galerkin 方法将其转化为非线性振动方程。应用多尺度法求得了系统主共振情况的一次近似解, 并进行了数值计算。得到了系统主共振稳态响应的转迁集和分岔图。分析了阻尼系数, 地基系数, 板厚等对系统主共振影响。结果表明, 随着地基系数和阻尼系数的增加, 振幅减小; 随着薄板厚度的增加, 振幅增大。

**关键词:** 岩土力学; 非线性弹性地基; Galerkin 方法; 多尺度法; 非线性振动; 矩形薄板

**中图分类号:** TU 47

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2005)增 2 - 5745 - 06

## PRIMARY RESONANCE AND SINGULARITIES ANALYSES OF HARMONIC EXCITING OF THIN RECTANGULAR PLATE ON NONLINEAR ELASTIC FOUNDATION

YANG Zhi-an, LI Zhi-yong

(Key Laboratory of Structural and Vibration Engineering, Tangshan College, Tangshan 063000, China)

**Abstract:** A nonlinear dynamical equation of the small deformation thin rectangular plates on nonlinear elastic foundation subjected to harmonic excitation is established. It is transferred to be a nonlinear vibration equation by Galerkin's method. By means of the method of the multiple scales the first approximate solution of the primary resonance of the system is acquired, and numerical calculation is carried out. The transition variety and bifurcation diagram of the unfolding parametric plane are given. The response curves of the primary resonance are affected by damping parameter, foundation parameter and geometry parameter. It is pointed out that with the increasing of foundation coefficient and damping coefficient, the amplitude reduces. With the increasing of the thickness of thin plate, the amplitude increases.

**Key words:** rock and soil mechanics; nonlinear elastic foundation; Galerkin's method; the method of multiple scales; nonlinear vibration; thin rectangular plate

## 1 引言

地基板是工程中常见结构, 近年来有许多学者考虑各种非线性效应的影响, 讨论了板在不同荷载形式下的振动问题<sup>[1~11]</sup>。因为在公路路面、机场跑

道、停机场、工业地坪及建筑基础等多种工程中都会遇到地基板的计算分析, 所以弹性地基板的研究具有十分重要的工程意义。文[1~4]对薄板非线性问题进行了研究, 文[5]对线性地基上矩形板振动等问题进行了研究, 上述研究未涉及非线性地基及非线性振动的计算。文[6~9]研究了非线性弹性地基

**收稿日期:** 2004 - 12 - 16; **修回日期:** 2005 - 03 - 16

**作者简介:** 杨志安(1963 -), 男, 1997 年于天津大学力学专业获博士学位, 现为唐山学院教授、天津大学机械工程学院博士后, 主要从事机电耦联非线性动力学及结构与振动工程等方面的教学与研究。E-mail: yangzhian@eyou.com。

上圆薄板的振动问题，未涉及非线性地基上矩形板的振动问题。

本文考虑了阻尼和地基非线性效应的影响，建立了小挠度矩形板横向均布简谐激励作用下的非线性动力学方程。利用对该类型板非线性弯曲问题的研究，找到了能够满足所有边界条件的近似挠度函数，然后用 Galerkin 方法把用偏微分方程表示的非线性动力学方程转化为用常微分方程表示的非线性动力学方程。应用多尺度法研究了系统主共振的问题，最后讨论了不同参数对系统主共振的影响。

### 2 基本方程

考虑图 1 所示置于非线性弹性地基上两边简支的矩形薄板，板厚为  $h$ ，长、宽分别为  $c$  和  $b$ ，在其左右边界上受有均匀分布压力  $N$ ，在横向受有均布简谐激励  $q \cos \omega t$ ，考虑一种非线性弹性地基反力  $k_1 W + k_2 W^3$  模型<sup>[6~9]</sup>，阻尼力  $\delta \frac{\partial W}{\partial t}$ ，惯性力

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \text{ 非线性弹性地基板的动力学方程为}$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 W(x, y, t) + k_1 W + k_2 W^3 + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial W}{\partial t} + N \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = q \cos \omega t \quad (1)$$

式中： $k_1, k_2$  均为地基系数； $\rho$  为物质的密度； $\delta$  为阻尼系数； $N$  为纵向力； $q \cos \omega t$  为横向激励； $W$  为板的横向挠度； $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ ， $E$  为板的弹性模量， $\mu$  为板的泊松比； $\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ 。

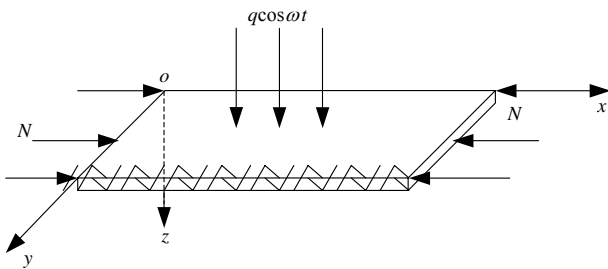


图 1 非线性弹性地基上矩形薄板模型

Fig.1 Model of the thin rectangular plate on the nonlinear elastic foundation

对于以矩形地基板为结构形式的停机场、工业地坪等，其边界条件可以认为是两端简支的，对照图 1，两端简支为边界条件：

$$(1) \text{ 当 } x=0 \text{ 时, } W=0, \frac{\partial W}{\partial x^2}=0;$$

$$(2) \text{ 当 } x=a \text{ 时, } W=0, \frac{\partial W}{\partial x^2}=0.$$

设满足所有边界条件的位移模式为

$$W(x, y, t) = U_1(t) \sin \frac{\pi x}{c} + U_2(t) \sin \frac{2\pi y}{b} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)求得其残差  $R$ ，即

$$R = D \nabla^2 \nabla^2 W(x, y, t) + k_1 W + k_2 W^3 + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial W}{\partial t} + N \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - q \cos \omega t$$

为限制残差  $R$ ，可通过 Galerkin 方法建立求解过程：

$$\iint R W(x, y) dx dy = 0$$

即

$$\int_0^c \int_0^b R \sin \frac{\pi x}{c} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0$$

$$\int_0^c \int_0^b R \sin \frac{2\pi x}{c} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy = 0$$

Galerkin 方法是应用时空分离技术处理非线性偏微分方程组描述的非线性振动系统行之有效的分析方法，利用 Galerkin 方法可得这一系统双模态模型的非线性动力学方程：

$$\left. \begin{aligned} \ddot{U}_1 + \frac{\delta}{\rho h} \dot{U}_1 + \omega_1^2 U_1 + \frac{9k_2}{16\rho h} U_1^3 + \frac{3k_2}{4\rho h} U_1 U_2^2 - \frac{16q \cos \omega t}{\pi^2 \rho h} &= 0 \\ \ddot{U}_2 + \frac{\delta}{\rho h} \dot{U}_2 + \omega_2^2 U_2 + \frac{9k_2}{16\rho h} U_2^3 + \frac{3k_2}{4\rho h} U_1^2 U_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中，

$$\omega_1 = \left[ D \pi^4 \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + k_1 - \frac{N \pi^2}{c^2} \right] \frac{1}{\rho h}$$

$$\omega_2 = \left[ 16 D \pi^4 \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + k_1 - \frac{4 N \pi^2}{c^2} \right] \frac{1}{\rho h}$$

利用式(3)可研究非线性弹性地基上两边简支矩形板的非线性振动问题。下面分析系统的主共振问题。

### 3 单模态系统的主共振

令  $N=0, U_2=0$ ，式(3)的第一个方程化为如下一般形式：

$$\ddot{U} + \frac{\delta}{\rho h} \dot{U} + \omega_0^2 U + \frac{9k_2}{16\rho h} U^3 - \frac{16q \cos \omega t}{\pi^2 \rho h} = 0 \quad (4)$$

其中,

$$\omega_0^2 = \left[ D\pi^4 \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + k_1 \right] \frac{1}{\rho h}$$

因为阻尼项、非线性项与惯性力项相比是小项, 又因为要研究系统的主共振, 故在阻尼项、非线性项和外激励项前冠以小参数  $\varepsilon$ , 则式(4)化为

$$\ddot{U} + \omega_0^2 U = \varepsilon \left( \frac{16q}{\pi^2 \rho h} \cos \omega t - \frac{\delta}{\rho h} \dot{U} - \frac{9k_2}{16\rho h} U^3 \right) \quad (5)$$

式(5)可能发生 1/3 次亚谐共振、3 次超谐共振及主共振等多种共振现象, 下面研究其中的主共振问题。

令

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (6)$$

式中:  $\sigma = O(1)$  为激励频率失调参数。将式(6)代入式(5)有

$$\ddot{U} + \omega_0^2 U =$$

$$\varepsilon \left[ \frac{16q}{\pi^2 \rho h} \cos(\omega_0 t + \varepsilon\sigma t) - \frac{\delta}{\rho h} \dot{U} - \frac{9k_2}{16\rho h} U^3 \right]$$

应用多尺度法<sup>[10]</sup>研究解的一次近似解, 得

$$\left. \begin{aligned} D_1 a &= -\frac{\delta}{2\rho h} a + \frac{8q}{\pi^2 \omega_0 \rho h} \sin(\sigma T_1 - \beta) \\ a D_1 \beta &= \frac{27k_2 a^3}{128\rho h \omega_0} - \frac{8q}{\pi^2 \omega_0 \rho h} \cos(\sigma T_1 - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)即为一次近似解的慢时变振幅和相位应满足的微分方程。引入  $\varphi = \sigma T_1 - \beta$ , 则式(7)转化为自治微分方程:

$$\left. \begin{aligned} D_1 a &= -\frac{\delta}{2\rho h} a + \frac{8q}{\pi^2 \omega_0 \rho h} \sin \varphi \\ a D_1 \varphi &= \sigma a - \frac{27k_2 a^3}{128\rho h \omega_0} + \frac{8q}{\pi^2 \omega_0 \rho h} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

### 4 主共振及数值分析结果

为确定对应稳态运动的定常解振幅  $a$  和相位

$\varphi$ , 令式(8)中的  $D_1 a = 0, D_1 \varphi = 0$ , 得到振幅  $a$  和相位  $\varphi$  满足的代数方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{2\rho h} a &= \frac{8q}{\pi^2 \rho h \omega_0} \sin \varphi \\ \frac{27k_2 a^3}{128\rho h \omega_0} - \sigma a &= \frac{8q}{\pi^2 \rho h \omega_0} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)平方后相加消去  $\varphi$ , 得到振幅  $a$ , 相位  $\varphi$  与激励频率失调量  $\sigma$  间的关系:

$$\left( \frac{\delta}{2\rho h} a \right)^2 + \left( \frac{27k_2 a^3}{128\rho h \omega_0} - \sigma a \right)^2 = \left( \frac{8q}{\pi^2 \rho h \omega_0} \right)^2 \quad (10a)$$

$$\varphi = \frac{\frac{\delta}{2\rho h}}{\frac{27k_2 a^2}{128\rho h \omega_0} - \sigma} \quad (10b)$$

式(10a), (10b)分别为幅频响应方程和相频响应方程。应用式(10a), (10b)可以计算系统主共振的响应曲线, 分析出不同参数对响应曲线的影响。如无特殊声明参数取值为:  $c = 3.5 \text{ m}, b = 3.5 \text{ m}, h = 0.15 \text{ m}, \mu = 0.167, E = 2.1 \times 10^{10} \text{ Pa}, \rho = 2.78 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \delta = 0.02, k_1 = 3.0 \times 10^7 \text{ N/m}^3, k_2 = 3.0 \times 10^6 \text{ N/m}^3$ 。

图 2 中反映了当线性地基系数  $k_1$  为定值时, 不同非线性地基系数  $k_2$  对响应曲线的影响, 由图 2 可知,  $k_2$  直接影响曲线的倾斜度, 随着  $k_2$  的增大, 系统主共振的硬特性增强, 跳跃现象明显。

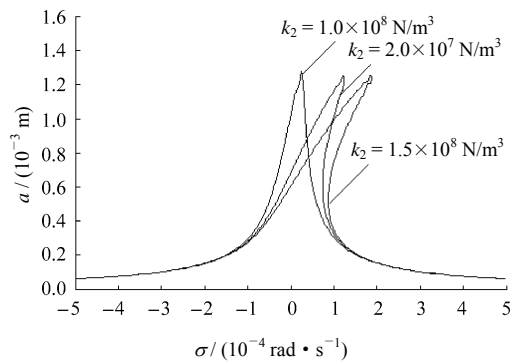


图 2  $k_1$  定值不同  $k_2$  幅频响应

Fig.2 Amplitude-different  $k_2$  frequency response curves with  $k_1$  being given

由图 3 可知, 随着阻尼系数的增大, 幅频响应曲线中振幅的峰值将随之减小, 图 4 中也反映出, 在同一激励幅值下, 随着阻尼系数的增大振幅的值将随之减小, 从图 3 中幅值的变化趋势可以预测阻

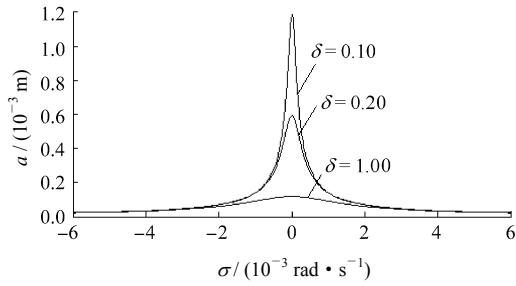


图 3 不同阻尼系数幅频响应

Fig.3 Amplitude-different damping frequency response curves

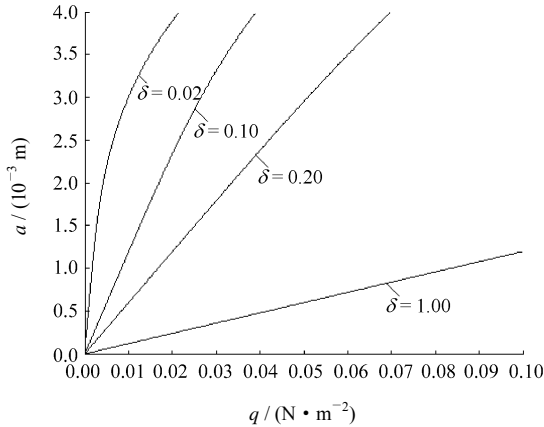


图 4 不同阻尼系数力幅响应 sigma = 0

Fig.4 Amplitude-different damping amplitude of excitation response curves

尼系数增大到一定程度，将不会发生共振现象，阻尼系数也是影响共振的重要参数，它将直接影响共振振幅的大小。

分析图 5, 6 可知，两图反应了一个共同的特性，小挠度薄板的振幅随着板边长的增大而减小。由此说明板的尺寸对其共振时的特性也有一定的影响。

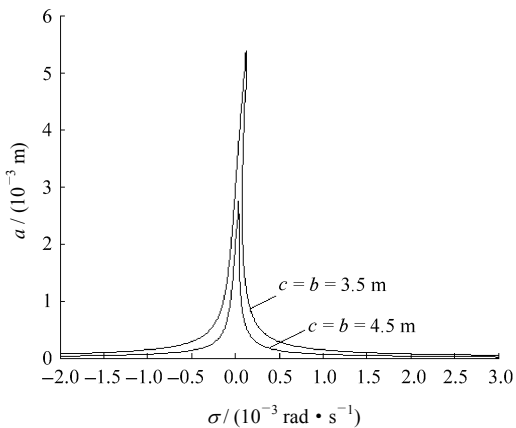


图 5 不同板边长幅频响应

Fig.5 Amplitude-different length frequency response curves

由图 7, 8 可知，板厚对主共振的振幅有一定的影响，图 7, 8 中反应出了板厚越大，主共振的

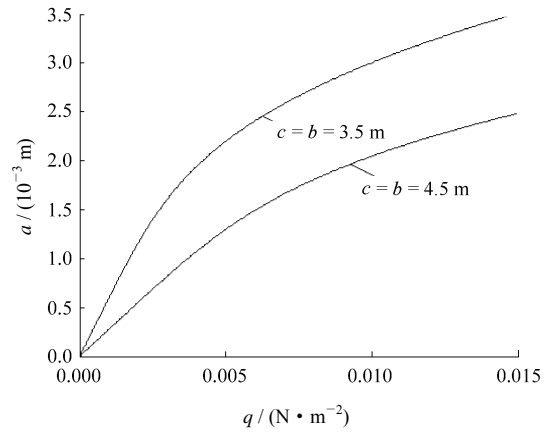


图 6 不同板边长力幅响应(sigma = 0)

Fig.6 Amplitude-different length amplitude of excitation response curves(sigma = 0)

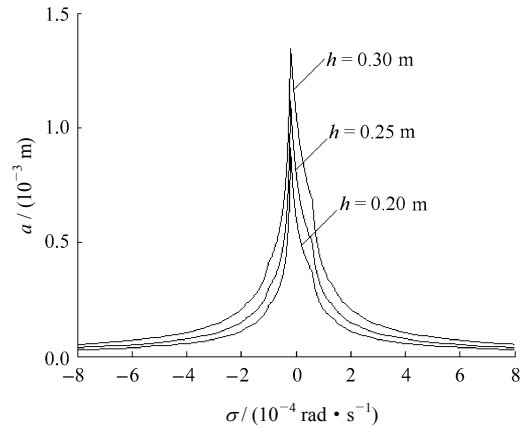


图 7 不同板厚幅频响应

Fig.7 Amplitude-different thickness frequency response curves

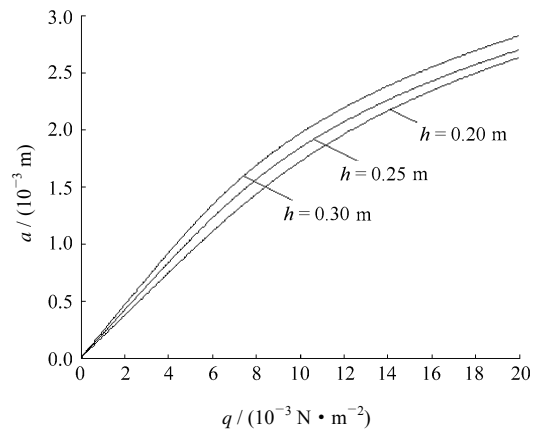


图 8 不同板厚力幅响应(sigma = 0)

Fig.8 Amplitude-different thickness amplitude of excitation response curves(sigma = 0)

振幅值越大。

图 9 反映的是不同阻尼系数情况下，板发生主共振时，振幅与线性地基系数之间的关系，阻尼增

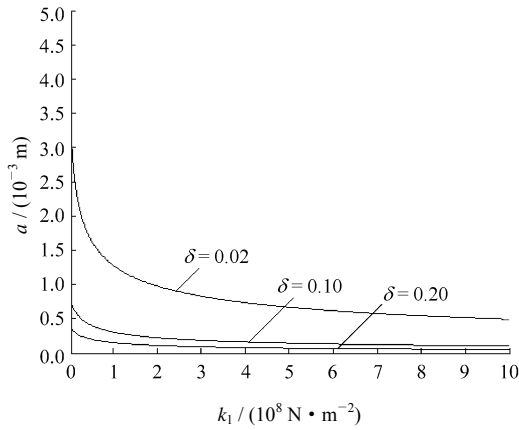


图 9 不同地基系数板厚与振幅曲线( $\sigma=0$ )

Fig.9 Amplitude-thickness of plate response curves, different foundation coefficient( $\sigma=0$ )

大,二者之间的变化趋势大致相同,但振幅将随之减小,这与图 3,4 中分析的结果相一致。但图 9 中更好的反应了它们之间的变化率。

图 10 所示为不同阻尼系数情况,板发生主共振时,振幅随着板厚增加的变化趋势,即板厚增加振幅增大。图 10 中还反应了阻尼系数对二者之间变化关系的影响,当阻尼较大时,它们之间的这种变化趋势将大大减弱,其振幅趋于一个较稳定的值,板厚对共振振幅的影响非常小。

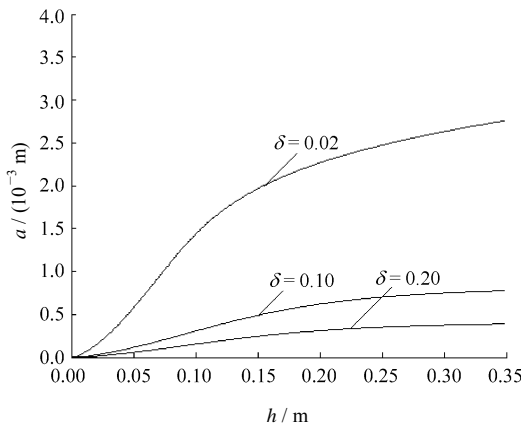


图 10 不同阻尼板厚与振幅曲线( $\sigma=0$ )

Fig.10 Amplitude-thickness of plate response curves, different damping coefficient( $\sigma=0$ )

### 5 奇异性分析

用研究非线性振动的经典近似方法得到的只是系统在确定参数时的周期解。由于不同系统中的系统参数不会完全相同,某些参数的变化有可能引起系统微分方程的结构不稳定,使振幅产生较大的变化,产生事故。下面应用奇异性理论分析系统定常

解的局部分岔,得到分岔解的全部拓扑结构。确定各种分岔解的物理参数区域。以便将系统的振动控制在安全稳定的范围。

展开式(10a),在等式两边同乘以  $a$ ,得

$$a^7 + \beta a^5 + \alpha a^3 - \lambda a = 0 \tag{11}$$

其中,

$$\beta = -256\rho h\omega_0 / 27k_2$$

$$\alpha = \frac{\sigma^2 + \frac{\delta}{2\rho h}}{27k_2}$$

$$\lambda = \frac{1024q^2}{729k_2^2\pi^4}$$

静态分岔方程为

$$G(a, \lambda, \alpha, \beta) = a^7 - \lambda a + \alpha a^3 + \beta a^5 \tag{12}$$

由奇异性理论<sup>[11]</sup>知,分岔方程  $G(a, \lambda, \alpha, \beta)$  是具有  $Z_2$  对称性的。式(12)是如下规范型的普通开折:

$$g(a, \lambda) = a^7 - \lambda a \tag{13}$$

且  $G(a, \lambda, \alpha, \beta)$  是  $Z_2$  余维 2 的方程,即有两个开折参数  $\alpha, \beta$ 。简证如下:

$$RT(g) = RT(a^7 - \lambda a) = M^7 + M(\lambda)$$

$$T(g) = T(a^7 - \lambda a) = M^7 + M(\lambda) \oplus R\{a, 7a^6 - \lambda\}$$

而

$$[ItrT(g)]^+ = [M^7 + M(\lambda)]^+ =$$

$$R\{1, \lambda, a^2, a^3, a^4, a^5\}$$

明显地,  $V_g = R\{a, 7a^6 - \lambda\}$  在  $\{1, \lambda, a^2, a^3, a^4, a^5\}$  的补基为  $\{a^3, a^5\}$ ,因而式(12)的规范型为式(13)。

方程的转迁集,即为各种分岔模式所在参数区域的交界线。由转迁集的定义求出式(12)的转迁集为:

(1) 分岔集:  $B_0(Z_2) = B_1(Z_2) = \emptyset$  ( $\emptyset$  为空集)。

(2) 滞后集:  $H_0(Z_2) = \{\alpha = 0\}$ ,  $H_1(Z_2) = \{\alpha = \beta^2/3, \beta \leq 0\}$ 。

(3) 双极限集:  $D(Z_2) = \{\alpha = \beta^2/3, \beta \leq 0\}$ 。

转迁集:  $\Sigma = B_0 \cup B_1 \cup H_0 \cup H_1 \cup D$ , 转迁集  $\Sigma$  将开折参数平面  $\alpha - \beta$  划分成 3 个区域,如图 11 所示。在不同的区域中,解的拓扑结构是不同的,但在同一区域中,即使分岔参数变化,其分岔图也

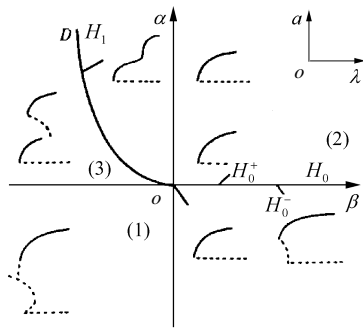


图 11 开折参数平面转迁集分岔图

Fig.11 Transition variety and bifurcation diagram of the unfolding parametric plane

将保持同一拓扑结构，这样的分岔称为保持的；而转迁集上的分岔图在参数受到小的扰动时，会改变其所分隔的保持分岔结构之一，故称其为保持的。

在区域(1)和区域(3)中振幅急剧增加或发生突变，在区域(2)中振幅变化比较平滑、稳定。当物理参数落在区域(1)和(3)时最危险。

## 6 结 论

随着线性地基系数的增大，幅频响应曲线的倾斜度增加，振幅下降。随着非线性地基系数的增大，幅频响应曲线的刚度渐硬特性明显。随着系统阻尼系数的增加，幅频响应曲线的振幅减小。在薄板范围内，随着板厚的增加，幅频响应曲线的振幅增加。得到了系统主共振稳态响应的转迁集和分岔图。上述结论对工程实际具有参考价值。

### 参考文献(References):

[1] Sathyamoorthy M. Nonlinear vibration of plates—a review[J]. Shock and Vibration, 1983, 15: 3 - 16.

[2] Zhang W, Liu Z M. Global dynamics of parametrically and externally thin plate[J]. Mechanics, 2000, 24: 245 - 268.

[3] 付宝连. 弯曲薄板功的互等新理论[M]. 北京: 科学出版社, 2002.(Fu Baolian. New Theory of Bending Thin Plate[M]. Beijing: Science Press, 2002.(in Chinese))

[4] 韩 强, 杨桂通. 非线性大挠度矩形板中内共振导致的分叉[J]. 固体力学学报, 2001, 22(2): 199 - 204.(Han Qiang, Yang Guitong. Bifurcation analysis of a nonlinear rectangular plate with large deflection[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2001, 22(2): 199 - 204.(in Chinese))

[5] 曲庆璋, 梁兴复. 弹性地基上自由矩形板的非线性动静态分析[J]. 工程力学, 1996, 13(3): 40 - 46.(Qu Qingzhang, Liang Xingfu. Nonlinear analysis of free rectangular plate on elastic foundation[J]. Engineering Mechanics, 1996, 13(3): 40 - 46.(in Chinese))

[6] Gajendar N. Large amplitude vibrations of plates on elastic foundation[J]. Int. J. Nonlinear Mech., 1967, 2(1): 163 - 168.

[7] Nath A. Large amplitude response of circular plate on elastic foundation[J]. Int. J. Nonlinear Mech., 1982, 17(4): 285 - 296.

[8] Dumir P C. Nonlinear vibration and postbuckling of isotropic thin circular plate on elastic foundation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, 107(2): 253 - 263.

[9] 邱 平, 王新志, 叶开沅. 非线性弹性地基上的圆薄板的分岔与混沌问题[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(8): 779 - 784.(Qiu Ping, Wang Xinzhi, Ye Kaiyuan. Bifurcation and chaos problem of thin circular plate on nonlinear elastic foundation[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(8): 779 - 784.(in Chinese))

[10] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations[M]. New York: Wiley-Interscience, 1979.

[11] Golubisky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.