系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
25(5) (2005, 10), 574–581

关于无限对策 Nash 平衡点集的本质连通区*

周 永 辉
(贵州大学数学系， 贵阳 550025; 浙江大学数学系， 杭州 310027)
俞 建
(贵州大学数学系， 贵阳 550025)
林 志
(浙江大学数学系， 杭州 310027; 贵州财经学院信息分院， 贵阳 550003)

摘要 证明了任意纯策略集是紧度量空间和支付函数连续的 n 人无限非合作对策存在 Nash 平衡点集的本质连通区.

关键词 无限对策， Nash 平衡，本质连通区，最佳回应映射，弱 $*$ 拓扑.

MR(2000) 主题分类号 47H04, 49J40, 90D10

1 引 言

我们知道，在非合作对策理论中，最核心的概念是 Nash 平衡. 正如 [1] 和 [2] 所指出的，Nash 模型是在每个局中人都是完全理性这一假定的基础上建立的，这就限制了对策论的应用. Selten[3] 提出了完全理性是有限理性极限的思想，定义了完美 (perfect) 平衡，推进了 Nash 平衡稳定性的研究. 紧接着，又有 Myerson[4] 的恰当 (proper) 平衡的研究. 在此基础上， Kohlberg 和 Mertens[5] 对 Nash 平衡的稳定性进行了全面而深入的研究，提出了这样的问题：一个稳定的 Nash 平衡应当满足哪些公认的条件？这是公理化的研究. 他们得出结论：它是集值的；对于有限 n 人非合作对策 (指每个局中人的纯策略均为有限个，均考虑混合策略), 恰是 Nash 平衡点集的所谓本质连通区. Hillas[6] 用对策间最佳回应映射的距离来代替对策间支付函数的距离，改进了 [5] 的工作. 将有限 n 人非合作对策的研究延伸到一般 n 人非合作对策的研究， [7] 应用非线性分析的方法，证明了 Nash 平衡点集本质连通区的存在性. 在这之后， [8–10] 分别对广义对策 (抽象经济) 和多目标对策等的平衡点集，都证明了本质连通区的存在性，而 [2] 更给出了统一的本质连通区的存在性定理.

* 国家自然科学基金 (10061002) 和贵州省自然科学基金资助课题.
收稿日期：2003-05-29, 收到修改稿日期：2004-11-05.

另一方面， 1952 年， Ky Fan[11] 和 Glicksberg[12] 同时证明了局部凸空间中的不动点存在性定理，并应用于非合作对策理论的研究．具体来说，设有 n 人非合作对策，局中人 i 的纯策略集是紧度量空间 X_i, S_i 是纯策略集 X_i 上的所有概率测度 μ_i(也称混合策略) 的空间，期望支付函数是

$$u_i(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) = \int_X f_i(x)\mathrm{d}\mu_1\mathrm{d}\mu_2\cdots\mathrm{d}\mu_n,$$

其中 f_i 是局中人 i 在纯策略组合集 $X = \prod_{i=1}^n X_i$ 上的连续支付函数．由 [12], 因 $S = \prod_{i=1}^n S_i$ 按弱 $*$ 拓扑是局部凸空间 $\prod_{i=1}^n C(S_i)^*$ 中的的凸紧集 (其中， $C(S_i)^*$ 为连续函数空间 $C(S_i)$ 上的所有连续线性泛函的空间), 应用局部凸空间中的不动点定理， Nash 平衡点必存在，即存在 $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \cdots, \mu_n^*) \in S$, 使对每个 i, 有

$$u_i(\mu^*) = \max_{\mu_i \in S_i} u_i(\mu_i, \mu_{-i}^*),$$

这里 $\mu_{-i}^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \cdots, \mu_{i-1}^*, \mu_{i+1}^*, \cdots, \mu_n^*)$. 因为纯策略集 X_i 一般是无限集，这一对策就称为无限对策，又因为支付函数 f_i 是连续的，这一对策也称为连续对策，见 [13] 和 [14].

本文证明了无限对策 Nash 平衡点集的本质连通区的存在性定理．需要指出的是，由于 [2] 和 [7] 均假定局中人的策略集是某一线性赋范空间的凸紧集，我们就不能由 [2] 和 [7] 直接导出无限对策 Nash 平衡点集本质连通区的存在性.

2 预备知识

首先介绍集值映射、本质集和本质连通区等有关概念和性质，更多的内容可见 [2].

设 X 和 Y 是两个度量空间， 2^Y 表示 Y 中所有非空子集的集合． $F : X \to 2^Y$ 是一个集值映射， $x \in X$.

定义 2.1 (1) 如果对 Y 中的任意开集 $G \supset F(x)$, 存在 x 在 X 中的开邻域 O, 使对任意 $x' \in O$, 有 $G \supset F(x')$, 则称 F 在 x 处是上半连续的； (2) 如果对任意 $x \in X$, $F(x)$ 是紧集，且 F 在 x 处是上半连续的，则称 F 是一个 usco 映射.

定义 2.2 (1) 称 $F(x)$ 的非空闭子集 $e(x)$ 是本质的，如果对 Y 中的任意开集 $U \supset e(x)$, 存在 $\delta > 0$, 使对任意 $x' \in X$, 只要 $d(x, x') < \delta$, 都有 $U \cap F(x') \neq \emptyset$; (2) 如果 $F(x)$ 的本质集 $m(x)$ 是 $F(x)$ 中的所有本质集按包含关系为序的极小元，则称 $m(x)$ 是 $F(x)$ 的极小本质集.

定义 2.3 对任意 $y \in F(x)$, 所有包含 y 的连通子集的和集 (必是连通的) 称为 $F(x)$ 的一个连通区 (分支).

如果 $F(x)$ 是紧集，则 $F(x)$ 可以分解为两两不交的有限个或无限个连通区 (分支) 的和集，即

$$F(x) = \bigcup_{\alpha \in \varLambda} C_\alpha,$$

其中 $\varLambda$ 是一个指标集，而每个 C_α 都是紧集.

定义 2.4 如果 $F(x)$ 的一个连通区 (分支) C_α 是本质的，则称 C_α 为 $F(x)$ 的一个本质连通区 (分支).

引理 2.1 设 X, Y 是两个度量空间， $F : X \to 2^Y$ 是一个 usco 映射，则对任意 $x \in X$, 至少存在 $F(x)$ 的一个极小本质集.

引理 2.2 设 X,Y,Z 是三个度量空间, $F_1: X \to 2^Y$ 是一个 usco 映射, $F_2: Z \to 2^Y$ 是一个集值映射, 存在连续映射 $T: Z \to X$, 使对任意 $z \in Z$, 有 $F_2(z) = F_1(T(z))$. 如果对任意 $x \in X$, $F_1(x)$ 至少存在一个本质连通区, 那么对任意 $z \in Z$, $F_2(z)$ 至少存在一个本质连通区.

注 2.1 引理 2.1 和 2.2 分别为 [2] 中定理 3.1(1) (注意到极小本质集的存在性未用到 [2] 中定理 3.1 的条件 (C), 条件 (C) 是用以证明极小本质集的连通性的) 和引理 2.8(2).

我们还需要在每个混合策略空间 S_i 中引入距离函数, 并讨论其相关性质.

对任意 $\mu_i, \nu_i \in S_i$, 定义

$$\boldsymbol{d_i}(\mu_i, \nu_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \Big| \int_{X_i} \frac{g_i^j}{\| g_i^j \|} \mathrm{d}\mu_i - \int_{X_i} \frac{g_i^j}{\| g_i^j \|} \mathrm{d}\nu_i \Big|,$$

这里序列 $\mathcal{F}_i = \{g_i^j \neq 0\}_{j=1}^{\infty}$ 是完备可分的连续函数空间 $C(X_i)$ 中的一个可数稠子集.

定理 2.1 $(S_i, \boldsymbol{d_i})$ 是一个度量空间, 而且 $\boldsymbol{d_i}$ 在 S_i 中所诱导的拓扑与弱 $*$ 拓扑等价.

证 对任意 $\mu_i, \nu_i, \lambda_i \in S_i$, 由 $\boldsymbol{d_i}$ 的定义易知 $\boldsymbol{d_i}(\mu_i, \nu_i) \geq 0$; 若 $\mu_i = \nu_i$, 则 $\boldsymbol{d_i}(\mu_i, \nu_i) = 0$; $\boldsymbol{d_i}(\mu_i, \nu_i) \leq \boldsymbol{d_i}(\mu_i, \lambda_i) + \boldsymbol{d_i}(\lambda_i, \nu_i)$.

其次, 若 $\boldsymbol{d_i}(\mu_i, \nu_i) = 0$, 则

$$\int_{X_i} \frac{g_i^j}{\| g_i^j \|} \mathrm{d}\mu_i = \int_{X_i} \frac{g_i^j}{\| g_i^j \|} \mathrm{d}\nu_i, \quad j = 1, 2, \cdots,$$

或者

$$\int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i = \int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\nu_i, \quad j = 1, 2, \cdots.$$

考虑到 $\{g_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $C(X_i)$ 中稠密, 对任意 $p_i \in C(X_i)$, 有

$$\int_{X_i} p_i \mathrm{d}\mu_i = \int_{X_i} p_i \mathrm{d}\nu_i.$$

从而 $\mu_i = \nu_i$. 这就证明了 $\boldsymbol{d_i}$ 是 S_i 中的距离.

下面证明 $\boldsymbol{d_i}$ 所诱导的拓扑与弱 $*$ 拓扑等价, 即来证明 $\mu_i^n \longrightarrow \mu_i$ (弱 $*$) 当且仅当 $\boldsymbol{d_i}(\mu_i^n, \mu_i) \longrightarrow 0$, 其中 $\mu_i, \mu_i^n \in S_i, n = 1, 2, \cdots$.

先证充分性. 若 $\boldsymbol{d_i}(\mu_i^n, \mu_i) \longrightarrow 0$, 则

$$\lim_{n \to \infty} \int_{X_i} \frac{g_i^j}{\| g_i^j \|} \mathrm{d}\mu_i^n = \int_{X_i} \frac{g_i^j}{\| g_i^j \|} \mathrm{d}\mu_i,$$

或者

$$\lim_{n \to \infty} \int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i^n = \int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i, \quad j = 1, 2, \cdots.$$

对任意 $p_i \in C(X_i)$, $j = 1, 2, \cdots$, 有

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{X_i} p_i \mathrm{d}\mu_i^n - \int_{X_i} p_i \mathrm{d}\mu_i\Big| \\
\le &\Big|\int_{X_i} p_i \mathrm{d}\mu_i^n - \int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i^n\Big| + \Big|\int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i^n - \int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i\Big| + \Big|\int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i - \int_{X_i} p_i \mathrm{d}\mu_i\Big| \\
\le &2\|p_i - g_i^j\| + \Big|\int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i^n - \int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i\Big|.
\end{aligned}
$$

固定 j, 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big|\int_{X_i} p_i \mathrm{d}\mu_i^n - \int_{X_i} p_i \mathrm{d}\mu_i\Big| \le 2\|p_i - g_i^j\|.$$

因 $\{g_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $C(X_i)$ 中稠密，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big|\int_{X_i} p_i \mathrm{d}\mu_i^n - \int_{X_i} p_i \mathrm{d}\mu_i\Big| = 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X_i} p_i \mathrm{d}\mu_i^n = \int_{X_i} p_i \mathrm{d}\mu_i.$$

所以 $\mu_i^n \longrightarrow \mu_i$ (弱 $*$).

最后证必要性. 若 $\mu_i^n \longrightarrow \mu_i$ (弱 $*$), 则由 $\{g_i^j\}_{j=1}^{\infty} \subset C(X_i)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i^n = \int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i,$$

或者

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X_i} \frac{g_i^j}{\| g_i^j \|} \mathrm{d}\mu_i^n = \int_{X_i} \frac{g_i^j}{\| g_i^j \|} \mathrm{d}\mu_i.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取正整数 m, 使 $\sum\limits_{j=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\boldsymbol{d_i}(\mu_i^n, \mu_i) \le \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2^j}\Big|\int_{X_i} \frac{g_i^j}{\| g_i^j \|} \mathrm{d}\mu_i^n - \int_{X_i} \frac{g_i^j}{\| g_i^j \|} \mathrm{d}\mu_i\Big| + \varepsilon.$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \boldsymbol{d_i}(\mu_i^n, \mu_i) \le \varepsilon,$$

即 $\boldsymbol{d_i}(\mu_i^n, \mu_i) \longrightarrow 0$.

注 2.2 S_i 上的 Lévy-Prohorov 距离为

$$\boldsymbol{LP_i}(\mu_i, \nu_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \min\Big\{1, \Big|\int_{X_i} g_i^j \mathrm{d}\mu_i - \int_{X_i} g_i^j\Big| \mathrm{d}\nu_i\Big\}, \qquad \forall \mu_i, \nu_i \in S_i,$$

它所诱导的拓扑是与弱 $*$ 拓扑等价的，参见 [15] 中第 6 章第 3 节；由定理 2.1, 度量 $\boldsymbol{d_i}$ 虽然与之不同，但所诱导的拓扑也与弱 $*$ 拓扑等价. 因此在以下的讨论中，我们将认为距离 $\boldsymbol{d_i}$ 在 S_i 中所诱导的拓扑与弱 $*$ 拓扑一致而不加区分.

性质 2.1 (1) 设 $\mu_i, \nu_i, \lambda_i \in S_i, a+b=1, a \geq 0, b \geq 0$, 则

$$\boldsymbol{d_i}(a\mu_i + b\nu_i, a\mu_i + b\lambda_i) = b\boldsymbol{d_i}(\nu_i, \lambda_i).$$

(2) 设 A_i, B_i 是 S_i 中的凸紧集, h_i 是 S_i 上的 Hausdorff 距离, $a+b=1, a \geq 0, b \geq 0$, 则

$$h_i(A_i, aA_i + bB_i) \leq h_i(A_i, B_i).$$

证 首先注意到, $a\mu_i + b\nu_i \in S_i$, $a\mu_i + b\lambda_i \in S_i$. 至于 (1) 的结论, 则直接按定义验证即可.

同样注意到 $aA_i + bB_i$ 是 S_i 中的凸紧集, 而要证明 (2), 只须证明: 对任意 $r > 0$, 如果 $h_i(A_i, B_i) < r$, 则 $h_i(A_i, aA_i + bB_i) < r$.

由于 $h_i(A_i, B_i) < r$, 有 $t > 0$, 使得 $h_i(A_i, B_i) < t < r$. 对任意 $x \in S_i$, 记 $U(x,t) = \{w \in S_i : \boldsymbol{d_i}(x, w) < t\}$. 由 $h_i(A_i, B_i) < t$, 有 $A_i \subset \bigcup\limits_{y \in B_i} U(y,t)$, $B_i \subset \bigcup\limits_{x \in A_i} U(x,t)$.

对任意 $x \in A_i$, 存在 $y \in B_i$ 使得 $\boldsymbol{d_i}(x,y) < t$. 由于 $ax + by \in aA_i + bB_i$, 且由 (1) 有 $\boldsymbol{d_i}(x, ax+by) = b\boldsymbol{d_i}(x,y) < t$, 可得 $A_i \subset \bigcup\limits_{u \in aA_i + bB_i} U(u,t)$.

对任意 $u \in aA_i + bB_i$, 存在 $x \in A_i, y \in B_i$ 使得 $u = ax + by$. 由于 $y \in B_i$, 存在 $x' \in A_i$ 使得 $\mathbf{d_i}(x', y) < t$. 由于 A_i 是凸的, $\bar{x} = ax + bx' \in A_i$, 且由 (1) 有 $\boldsymbol{d_i}(u, \bar{x}) = \boldsymbol{d_i}(ax+by, ax+bx') = b\mathbf{d_i}(y, x') < t$, 可得 $aA_i + bB_i \subset \bigcup\limits_{x \in A_i} U(x,t)$. 从而有 $h_i(A_i, aA_i + bB_i) \leq t < r$. 所以 $h_i(A_i, aA_i + bB_i) \leq h_i(A_i, B_i)$.

注 2.3 性质 2.1(2) 的证明方法借鉴了 [8] 的引理 3.1 的证明方法. 另外, 用 Lévy-Prohorov 距离 LP_i 来代替距离 $\boldsymbol{d_i}$, 则性质 2.1 不成立.

自然地, 我们可以给出 $S = \prod\limits_{i=1}^{n} S_i$ 上的距离函数及其相关性质. 对任意 $\mu, \nu \in S$, 定义

$$\boldsymbol{d}(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{d_i}(\mu_i, \nu_i).$$

类似定理 2.1 和性质 2.1, 容易得到以下结果.

定理 2.2 $(S, \boldsymbol{d})$ 是一个度量空间, 而且 $\boldsymbol{d}$ 在 S 中所诱导的拓扑与弱 $*$ 拓扑一致.

性质 2.2 (1) 设 $\mu, \nu, \lambda \in S, a+b=1, a \geq 0, b \geq 0$, 则

$$\boldsymbol{d}(a\mu + b\nu, a\mu + b\lambda) = b\boldsymbol{d}(\nu, \lambda).$$

(2) 设 A, B 是 S 中的凸紧集, h 是 S 上的 Hausdorff 距离, $a+b=1, a \geq 0, b \geq 0$, 则

$$h(A, aA + bB) \leq h(A, B).$$

3 不动点集的本质连通区

记 $\mathcal{R} = \{R : S \to 2^S :$ 对任意 $\mu \in S$, $R(\mu)$ 是非空凸紧集, 且 R 在 μ 处是上半连续的 $\}$. 对任意 $R, R' \in \mathcal{R}$, 定义

$$\rho(R, R') = \sup_{\mu \in S} h(R(\mu), R'(\mu)),$$

其中 h 是定义在 S 上的 Hausdorff 距离. 显然， $(\mathcal{R},\rho)$ 是一个度量空间.

对任意 $R\in\mathcal{R}$, 存在 $\mu^*\in S$, 使得 $\mu^*\in R(\mu^*)$. 用 $F(R)$ 表示 R 的所有不动点的集合. 这样， $R\to F(R)$ 就给出了一个从 $\mathcal{R}$ 到 S 的集值映射.

引理 3.1 $F:\mathcal{R}\to 2^S$ 是一个 usco 映射.

注 3.1 这正是 [2] 中引理 3.3.

引理 3.2 对任意 $R\in\mathcal{R}, F(R)$ 至少存在一个极小本质集, 且每个极小本质集是连通的.

证 对任意 $R\in\mathcal{R}$, 由引理 2.1 和 3.1, 至少存在一个 $F(R)$ 的极小本质集，设为 $m(R)$.

若 $m(R)$ 不连通，则存在 S 中的两个非空不交的非本质的闭子集 E_1,E_2, 使 $m(R)=E_1\cup E_2$.

因 S 是紧集，故 E_1,E_2 为两个不交的紧集. 必有 $a=\inf\{\boldsymbol{d}(\mu,\nu):\mu\in E_1,\nu\in E_2\}>0$. 记 $U_1=\{\mu\in S:\boldsymbol{d}(\mu,E_1)<\frac{a}{3}\}$, $U_2=\{\mu\in S:\boldsymbol{d}(\mu,E_2)<\frac{a}{3}\}$, 则 U_1,U_2 是 S 中的开集，且 $U_1\supset E_1$, $U_2\supset E_2$. 易知 U_1,U_2 的闭包分别为 $\overline{U_1}=\{\mu\in S:\boldsymbol{d}(\mu,E_1)\le\frac{a}{3}\}$, $\overline{U_2}=\{\mu\in S:\boldsymbol{d}(\mu,E_2)\le\frac{a}{3}\}$, 且 $\overline{U_1}\cap\overline{U_2}=\emptyset$.

由于 $m(R)$ 是本质的，所以对于 $U_1\cup U_2\supset m(R)$, 存在 $\delta^*>0$, 对于任意 $R'\in\mathcal{R}$, 只要 $\rho(R,R')<\delta^*$, 总有 $F(R')\cap(U_1\cup U_2)\neq\emptyset$.

又由于 E_1 和 E_2 是非本质的，所以对于 $\frac{\delta^*}{4}>0$, 存在 $R^1,R^2\in\mathcal{R}$, 当 $\rho(R^1,R)<\frac{\delta^*}{4}$, $\rho(R^2,R)<\frac{\delta^*}{4}$, 有 $F(R^1)\cap U_1=\emptyset$, $F(R^2)\cap U_2=\emptyset$.

我们定义 $R^0:S\to 2^S$ 如下

$$R^0(\mu)=\alpha(\mu)R^1(\mu)+\beta(\mu)R^2(\mu),\quad\forall\mu\in S,$$

其中

$$\alpha(\mu)=\frac{\boldsymbol{d}(\mu,\overline{U_2})}{\boldsymbol{d}(\mu,\overline{U_1})+\mathbf{d}(\mu,\overline{U_2})},\quad\beta(\mu)=\frac{\boldsymbol{d}(\mu,\overline{U_1})}{\boldsymbol{d}(\mu,\overline{U_1})+\mathbf{d}(\mu,\overline{U_2})},\quad\forall\mu\in S.$$

显然 $\alpha(\mu),\beta(\mu)$ 连续， $\alpha(\mu)\ge0$, $\beta(\mu)\ge0$, 且 $\alpha(\mu)+\beta(\mu)=1$.

易验证 R^0 是一个 usco 映射，即 $R^0\in\mathcal{R}$.

由性质 2.2(2), 对任意 $\mu\in S$, 有

$$\begin{aligned}h(R^1(\mu),R^0(\mu))&=h(R^1(\mu),\alpha(\mu)R^1(\mu)+\beta(\mu)R^2(\mu))\\&\le h(R^1(\mu),R^2(\mu)).\end{aligned}$$

所以

$$\sup_{\mu\in S}h(R^1(\mu),R^0(\mu))\le\sup_{\mu\in S}h(R^1(\mu),R^2(\mu)),$$

即

$$\rho(R^1,R^0)\le\rho(R^1,R^2).$$

从而

$$\begin{aligned}\rho(R,R^0)&\le\rho(R,R^1)+\rho(R^1,R^0)\\&\le\rho(R,R^1)+\rho(R^1,R^2)\\&\le\rho(R,R^1)+\rho(R^1,R)+\rho(R,R^2)\\&<\frac{\delta^*}{4}+\frac{\delta^*}{4}+\frac{\delta^*}{4}<\delta^*,\end{aligned}$$

所以 $F(R^0)\cap(U_1\cup U_2)\neq\emptyset$.

不妨设 $F(R^0)\cap U_1\neq\emptyset$, 即存在 $\mu\in F(R^0)\cap U_1$. 于是 $\alpha(\mu)=1,\beta(\mu)=0$. 此时, $R^0(\mu)=R^1(\mu)$, 由 $\mu\in R^0(\mu)$ 得 $\mu\in R^1(\mu)$, $F(R^1)\cap U_1=\emptyset$, 矛盾. 这一矛盾表明 $m(R)$ 必连通.

定理 3.1 对任意 $R\in\mathcal{R}$, 至少存在不动点集 $F(R)$ 中的一个本质连通区.

证 对任意 $R\in\mathcal{R}$, 由引理 3.2, $F(R)$ 中存在一个连通的极小本质集 $m(R)$, 则 $m(R)$ 必包含于 $F(R)$ 的某一连通区 C_α 中. 按定义即可验证 C_α 就是 $F(R)$ 的一个本质连通区.

注 3.2 有人似乎会认为定理 3.1 就是 [2] 中的定理 3.4. 不对, 因为 [2] 中的定理 3.4 要求 X 是线性赋范空间中的凸紧集, 而定理 3.1 中, S 按弱 $*$ 拓扑是局部凸空间中的凸紧集. 本文正是在 S 中引进距离 $\boldsymbol{d}$, 使它在 S 中所诱导的拓扑与弱 $*$ 拓扑一致 (定理 2.2), 并给出它的特殊性质 (性质 2.2), 最后才证明定理 3.1 的.

4 无限对策 Nash 平衡点集的本质连通区

正如本文引言所指出的, 设 $\mathcal{G}$ 是所有这样的无限对策的集合: 局中人 i 的纯策略集是紧度量空间 X_i, S_i 是纯策略集 X_i 上所有概率测度的空间, 期望支付函数

$$u_i(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)=\int_X f_i(x)\mathrm{d}\mu_1\mathrm{d}\mu_2\cdots\mathrm{d}\mu_n,$$

其中 $f_i:X\to\boldsymbol{R}$ 是局中人 i 在 X 上的连续支付函数.

对任意对策 $\Gamma\in\mathcal{G}$. 用 $N(\Gamma)$ 表示对策 Γ 的所有 Nash 平衡点的集合, 则 $N(\Gamma)\neq\emptyset$, 且 $\Gamma\to N(\Gamma)$ 给出了一个从 $\mathcal{G}$ 到 S 的集值映射.

对任意 i, 任意 $\mu_{-i}\in S_{-i}$, 局中人 i 的最佳回应策略集为

$$BR_i(\mu_{-i})=\Big\{\nu_i\in S_i:u_i(\nu_i,\mu_{-i})=\max_{\mu_i'\in S_i}u_i(\mu_i',\mu_{-i})\Big\}.$$

易证 $BR(\mu_{-i})$ 是 S_i 中的非空凸紧集, 且由 [16] 中的命题 23, $BR_i:S_{-i}\to 2^{S_i}$ 在 S_{-i} 上是上半连续的. 定义集值映射 $BR:S\to 2^S$, 使对任意 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)\in S$, $BR(\mu)=\prod\limits_{i=1}^n BR_i(\mu_{-i})$; 并称之为对策 Γ 的最佳回应映射. 易知 $BR(\mu)$ 是 S 中的非空凸紧集, 且 BR 在 S 上是上半连续的, 故 $BR\in\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ 的定义见上节.

对任意两个对策 $\Gamma,\Gamma'\in\mathcal{G}$, 定义它们之间最佳回应映射的距离

$$l(\Gamma,\Gamma')=\rho(BR,BR')=\sup_{\mu\in S}h(BR(\mu),BR'(\mu)).$$

定理 4.1 对于任意 $\Gamma\in\mathcal{G}$, 至少存在 Nash 平衡点集 $N(\Gamma)$ 的一个本质连通区.

证 对任意 $\Gamma\in\mathcal{G}$. 将 Γ 映到 $BR\in\mathcal{R}$ 的映射 T 是等距的, 从而必是连续的. 又易证 μ^* 是对策 Γ 的 Nash 平衡点当且仅当 μ^* 是集值映射 $BR=T(\Gamma)$ 的不动点. 这样, 由引理 2.2 和定理 3.1 即推出所需结论.

注 4.1 当在 S 中引进度量 $\boldsymbol{d}$, 使它在 S 中所诱导的拓扑与弱 $*$ 拓扑一致并给出它的特殊性质之后, 我们也可以由 [2] 中的定理 3.1 推出本文的定理 3.1, 从而再推出定理 4.1, 基本思路是一致的, 这里不重复了.

参 考 文 献

[1] 俞建． Nash 平衡的存在性与稳定性．系统科学与数学， 2002, **22**: 296–311.
[2] 俞建，陈国强，向淑文，杨辉．本质连通区的存在性与稳定性．应用数学学报， 2004, **27**: 201–209.
[3] Selten R. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *Int. J. of Game Theory*, 1975, **4**: 25–55.
[4] Myerson R B. Refinements of the Nash equilibrium concept. *Int. J. of Game Theory*, 1978, **7**: 73–80.
[5] Kohlberg E, Mertens J F. On the strategic stability of equilibria. *Econometrica*, 1986, **54**: 1003–1037.
[6] Hillas J. On the definition of the strategic stability of equilibria. *Econometrica*, 1990, **58**: 1365–1391.
[7] Yu J, Xiang S W. On essential components of the set of Nash equilibrium points. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications,* 1999, **38**: 259–264.
[8] Yu J, Luo Q. On essential components of the solution set of generalized games. *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **230**: 303–310.
[9] Yang H, Yu J. On essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points. *Applied Math. Letters*, 2002, **15**: 553–560.
[10] 杨辉，俞建．向量拟平衡问题的本质解及解集的本质连通区．系统科学与数学， 2004, **24**: 74–84.
[11] Fan K. Fixed point and minimax theorems in locally convex linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A*, 1952, **38**: 121–126.
[12] Glicksberg I L. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1952, **3**: 170–174.
[13] Owen G. Game Theory. Academic Press, 1982.
[14] Petrosjan L A, Zenkevich N A. Game Theory. World Scientific, 1996.
[15] 严加安．测度论讲义．科学出版社， 1998.
[16] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonliear Analysis. Wiley, New York, 1984.

ON THE ESSENTIAL COMPONENTS OF THE SET OF NASH EQUILIBRIUM POINTS FOR INFINITE GAMES

Zhou Yonghui
(*Department of Mathematics, Guizhou University, Guiyang* 550025; *Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)
Yu Jian
(*Department of Mathematics, Guizhou University, Guiyang* 550025)
Lin Zhi
(*Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027; *Department of Information, Guizhou College of Finance and Economics, Guiyang* 550003)

Abstract We prove that for any infinite game with compact metric pure strategy spaces and continuous payoff functions, there exists at least one essential component of the set of Nash equilibrium points.

Key words Infinite game, Nash equilibrium, essential component, best-reply correspondence, weak∗ topology.