

张郁山. 圆弧状多层沉积谷地在平面 P 波入射下稳态响应的解析解. 地球物理学报, 2008, 51(3): 869~880

Zhang Y S. Analytical solution for the stationary response of alluvial valleys containing multiple circular-arc layers to incident plane P waves. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2008, 51(3): 869~880

圆弧状多层沉积谷地在平面 P 波 入射下稳态响应的解析解

张郁山

中国地震局地球物理研究所, 北京 100081

摘 要 利用波函数的 Fourier-Bessel 级数展开法, 给出了含任意多个圆弧状沉积层的谷地在平面 P 波入射下稳态动力响应的解析解. 并以具有三个沉积层的谷地为例, 在宽频范围内, 利用稳态地面运动幅值的空间分布, 讨论了谷地中沉积介质的成层性对地面运动的影响.

关键词 圆弧状多层沉积谷地, 平面 P 波, 散射, 解析解

文章编号 0001-5733(2008)03-0869-12

中图分类号 P631

收稿日期 2007-07-10, 2007-12-12 收修定稿

Analytical solution for the stationary response of alluvial valleys containing multiple circular-arc layers to incident plane P waves

ZHANG Yu-Shan

Institute of Geophysics, China Earthquake Administration, Beijing 100081, China

Abstract By the method of Fourier-Bessel series expansion of wave function, an analytical solution to the stationary dynamic response of alluvial valley containing an arbitrary number of circular-arc layers, which is excited by an incident plane P wave, is presented. Taking the three-layer valleys as examples and using the spatial distributions of amplitude of stationary ground motion, the influences of the layering of alluvial media in the valleys on the ground motion are studied in a broad frequency band.

Keywords Alluvial valley containing multiple circular-arc layers, Plane P wave, Scattering, Analytical solution

1 引 言

规则的沉积谷地对地震波散射问题解析解的研究是地球物理学、地震学与地震工程学等学科领域重要的研究课题之一. Trifunac^[1] 最先利用波函数的 Fourier-Bessel 级数展开在极坐标系下给出了半圆形沉积谷地对平面 SH 波散射问题的精确解析解, 开创了用解析法研究场地波动效应的先河. 其

后, Wong 和 Trifunac^[2] 利用波函数的 Mathieu 级数展开在椭圆坐标系下给出了半椭圆形沉积谷地对平面 SH 波散射问题的解析解. 相比半圆形与半椭圆形, 具有不同深宽比的浅圆弧形能更好地模拟实际谷地边界的几何形状. 针对浅圆形谷地对 SH 波的二维散射问题, Todorovska 和 Lee^[3] 提出了一种近似的解析解: 用一个半径非常大的圆弧模拟半空间水平表面, 并将散射波函数展开成 Fourier-Bessel 级数的形式; 利用内域型 Graf 加法公式与散射问题

基金项目 国家自然科学基金项目(50608066)与地震科学联合基金项目(A07045)资助.

作者简介 张郁山, 男, 1974 年生, 2003 年于中国地震局地球物理研究所获博士学位, 主要从事地震工程方面的研究.

E-mail: hyszhang@163.com

的边界条件可以确定级数中的待定系数,问题的求解最终简化为一线性方程组的求解.其后,该方法被用于求解浅圆形沉积谷地在平面 P 波^[4]、SV 波^[5]、和 Rayleigh 波^[6]入射下的动力响应.同样,利用一半径非常大的圆弧近似模拟水平地表, Li 和 Zhao 等^[7]以及李伟华和赵成刚^[8]基于饱和多孔介质的 Biot 动力学原理,利用 Fourier-Bessel 级数展开法分别求解了覆盖饱和多相沉积介质的浅圆形沉积谷地对平面 P 波和平面 SV 波的散射问题;并利用该解析解研究了入射波的频率和入射角度、饱和多孔介质的孔隙率和饱和度、土骨架的刚度和波松比对场地波动效应的影响.针对同样的浅圆形谷地对平面 SH 波的散射问题, Yuan 和 Liao^[9]给出了封闭的级数解答.该解析解的推导无需引入上述大圆弧假定:首先构造满足地表零应力边界条件的散射波级数表达式;然后利用外域型 Graf 加法公式并引入谷地圆弧边界的连续条件,将 SH 波散射问题简化为一无穷维代数方程组的求解问题.此外,采用辅助函数的思想,王慧文和刘殿魁等^[10]利用复变函数和多极坐标的方法给出了 SH 波入射下多个半圆形沉积谷地附近浅埋圆形孔洞动力分析问题的解答.

上述研究均假定谷地中的沉积为单一介质.但是,在其形成过程中,众多的地质力学因素会导致实际的谷地含有多个沉积层,如欧洲的地震试验场地 EuroSeisTest^[11]以及美国洛杉矶市^[12,13]均坐落在多层沉积谷地之上.梁建文等利用 Fourier-Bessel 级数展开法并引入水平地表的大圆弧假定,求解了层状谷地对体波的散射问题^[14~16],并研究了沉积土层的排列次序、软夹层的刚度与厚度等因素对地面运动的影响.但是由于问题的复杂性,该研究仅考虑了具有两个沉积层的谷地对体波的散射.本文首先利用波函数的 Fourier-Bessel 级数展开法,将文献^[15]给出的具有两个圆弧形沉积层的谷地对 P 波散射问题的解析解推广到任意多层情况;然后以三层沉积谷地为例,在一个较宽的频带范围内讨论谷地中沉积介质的层状不均匀性对稳态地面运动的影响.

2 模型

圆弧形多层沉积谷地的模型如图 1 所示.在半空间表面有 L 层沉积介质, $l=0, 1, 2, \dots, L-1$; 半空间介质的编号为 L , 整个模型共有 $L+1$ 种介质.所有介质之间的边界圆弧均为浅圆弧,其圆心均在

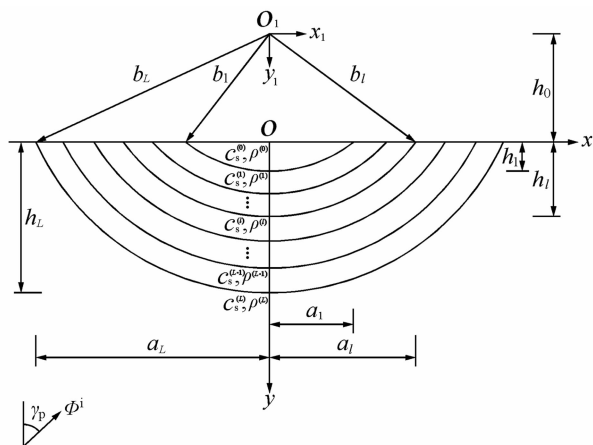


图 1 沉积谷地模型

Fig. 1 The model of alluvial valley

O_1 点,圆弧的半宽和深度分别为 a_l 和 h_l ,圆弧的半径

$$b_l = (a_l^2 + h_l^2) / (2h_l), l = 1, 2, \dots, L, \quad (1)$$

圆心 O_1 到地表的距离 $h_0 = b_1 - h_1$. 所有介质的横波波速与密度分别为 $c_s^{(l)}$ 与 $\rho^{(l)}$,泊松比为 $\nu^{(l)}$ ($l=0, 1, 2, \dots, L$),则相应的拉梅常数与纵波波速为

$$\begin{aligned} \mu^{(l)} &= \rho^{(l)} [c_s^{(l)}]^2, \\ \lambda^{(l)} &= \frac{2\nu^{(l)}}{1-2\nu^{(l)}} \mu^{(l)}, \\ c_p^{(l)} &= \sqrt{\frac{\lambda^{(l)} + 2\mu^{(l)}}{\rho^{(l)}}}. \end{aligned} \quad (2)$$

入射 P 波为简谐平面波,其频率为 ω 、入射角为 γ_p ,在坐标系 $x-y$ 下,其势函数为(时间因子 $\exp(-i\omega t)$ 被略去)

$$\Phi^i(x, y) = \exp[ik_p^{(L)}(x \sin \gamma_p - y \cos \gamma_p)], \quad (3)$$

其中, i 为虚数单位, $i = \sqrt{-1}$; $k_p^{(L)}$ 为半空间介质中 P 波的波数,同样

$$\begin{aligned} k_p^{(l)} &= \omega / c_p^{(l)}, \\ k_s^{(l)} &= \omega / c_s^{(l)} \end{aligned} \quad (4)$$

分别为第 l 层介质中 P 波波数与 S 波波数.

在稳态情况下, P 波及 SV 波的势函数应满足如下 Poisson 方程:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi + k_p^2 \Phi &= 0, \\ \nabla^2 \Psi + k_s^2 \Psi &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

定解问题的边界条件包括地表零应力条件

$$\left. \begin{aligned} t_{yy}^{(l)}(x, y) \\ t_{xy}^{(l)}(x, y) \end{aligned} \right\} \Big|_{y=0} = 0, l = 0, 1, 2, \dots, L \quad (6)$$

与第 l 个圆弧处的连续条件 ($l=1, 2, \dots, L$)

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(l-1)}(r_1, \theta_1) \\ u_\theta^{(l-1)}(r_1, \theta_1) \end{aligned} \right\} \Big|_{r_1=b_l} = \left. \begin{aligned} u_r^{(l)}(r_1, \theta_1) \\ u_\theta^{(l)}(r_1, \theta_1) \end{aligned} \right\} \Big|_{r_1=b_l}, \quad (7a)$$

$$\left. \begin{matrix} t_{rr}^{(l-1)}(r_1, \theta_1) \\ t_{r\theta}^{(l-1)}(r_1, \theta_1) \end{matrix} \right|_{r_1=b_l} = \left. \begin{matrix} t_{rr}^{(l)}(r_1, \theta_1) \\ t_{r\theta}^{(l)}(r_1, \theta_1) \end{matrix} \right|_{r_1=b_l}, \quad (7b)$$

上式中, t 表示应力, u 表示位移.

3 散射波的势函数

在求解散射波位移场之前, 为方便地引入地表零应力边界条件, 仍采用文献[16]的方法, 即用一个半径非常大的圆弧来近似模拟水平地表, 该圆弧半径为 R , 圆心为 O_2 , 如图 2 所示. 这样, 在坐标系 $r_2-\theta_2$ 下, 零应力条件(6)式变为

$$\left. \begin{matrix} t_{rr}^{(l)}(r_2, \theta_2) \\ t_{r\theta}^{(l)}(r_2, \theta_2) \end{matrix} \right|_{r_2=R} = 0, l = 0, 1, 2, \dots, L \quad (6)$$

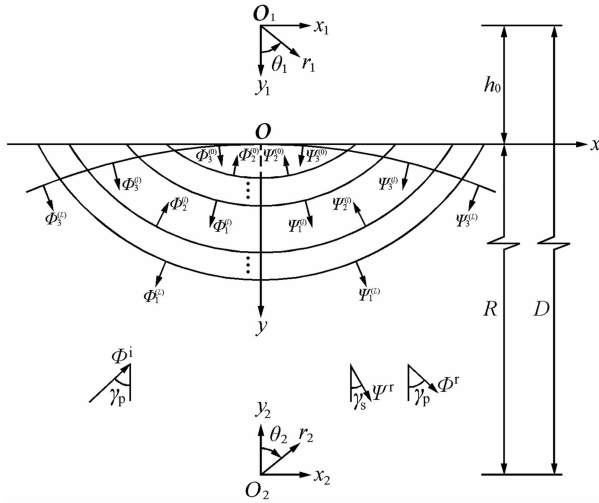


图 2 波的散射图

Fig. 2 The scattering of waves

3.1 半空间介质中散射波的势函数

半空间介质的自由场波函数包括入射 P 波 Φ^i 、反射 P 波 Φ^r 、以及反射 SV 波 Ψ^r . 在坐标系 $x-y$ 下, 反射 P 波以及反射 SV 波势函数的表达式如下:

$$\left. \begin{matrix} \Phi^r(x, y) \\ \Psi^r(x, y) \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} \omega_1 \exp[ik_p^{(L)}(x \sin \gamma_p + y \cos \gamma_p)] \\ \omega_2 \exp[ik_s^{(L)}(x \sin \gamma_s + y \cos \gamma_s)] \end{matrix} \right\}, \quad (8)$$

式中

$$\frac{\sin \gamma_p}{c_p^{(L)}} = \frac{\sin \gamma_s}{c_s^{(L)}}, \quad (9)$$

$$\omega_1 = \frac{\sin 2\gamma_p \sin 2\gamma_s - \left[\frac{c_p^{(L)}}{c_s^{(L)}} \right]^2 \cos^2 2\gamma_s}{\sin 2\gamma_p \sin 2\gamma_s + \left[\frac{c_p^{(L)}}{c_s^{(L)}} \right]^2 \cos^2 2\gamma_s},$$

$$\omega_2 = \frac{-2 \sin 2\gamma_p \cos 2\gamma_s}{\sin 2\gamma_p \sin 2\gamma_s + \left[\frac{c_p^{(L)}}{c_s^{(L)}} \right]^2 \cos^2 2\gamma_s}, \quad (10)$$

应用如下坐标转换关系

$$\begin{cases} x = r_1 \sin \theta_1 \\ y = r_1 \cos \theta_1 - h_0 \end{cases}, \quad (11)$$

与展开公式^[17]

$$\exp(\pm ikr \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (\pm i)^n J_n(kr) \cos n\theta, \quad (12)$$

自由场中 P 波与 SV 波的势函数在坐标系 $r_1-\theta_1$ 中可表示为

$$\begin{cases} \Phi^{i+r}(r_1, \theta_1) \\ \Psi^r(r_1, \theta_1) \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ J_n(k_p^{(L)} r_1) (A_{0,n} \cos n\theta_1 + B_{0,n} \sin n\theta_1) \right. \\ \left. J_n(k_s^{(L)} r_1) (C_{0,n} \sin n\theta_1 + D_{0,n} \cos n\theta_1) \right\}, \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} A_{0,n} \\ B_{0,n} \end{cases} = \epsilon_n i^n [\pm (-1)^n \exp(ik_p^{(L)} h_0 \cos \gamma_p) + \omega_1 \exp(-ik_p^{(L)} h_0 \cos \gamma_p)] \begin{cases} \cos n\gamma_p \\ \sin n\gamma_p \end{cases}, \quad (14)$$

$$\begin{cases} C_{0,n} \\ D_{0,n} \end{cases} = \epsilon_n i^n \omega_2 \exp(-ik_s^{(L)} h_0 \cos \gamma_s) \begin{cases} \sin n\gamma_s \\ \cos n\gamma_s \end{cases}, \quad (15)$$

在(12)、(14)、(15)式中, 当 $n = 0$ 时, $\epsilon_n = 1$; 当 $n > 0$ 时, $\epsilon_n = 2$.

在半空间介质中, 除上述自由场之外, 还有由于圆弧形多层沉积谷地的存在而产生的散射波, 如图 2 所示. 其中, $\Phi_1^{(L)}$ 与 $\Psi_1^{(L)}$ 表示由圆心 O_1 点向外辐射的柱面波; $\Phi_3^{(L)}$ 与 $\Psi_3^{(L)}$ 表示在“弯曲”的地表与小圆弧边界(圆弧 L)之间的柱面驻波, 在坐标系 $r_1-\theta_1$ 与 $r_2-\theta_2$ 下, 这两种波具有如下 Fourier-Bessel 级数形式:

$$\begin{cases} \Phi_1^{(L)}(r_1, \theta_1) \\ \Psi_1^{(L)}(r_1, \theta_1) \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ H_n^{(1)}(k_p^{(L)} r_1) (A_{11,n}^{(L)} \cos n\theta_1 + B_{11,n}^{(L)} \sin n\theta_1) \right. \\ \left. H_n^{(1)}(k_s^{(L)} r_1) (C_{11,n}^{(L)} \sin n\theta_1 + D_{11,n}^{(L)} \cos n\theta_1) \right\}, \quad (16)$$

$$\begin{cases} \Phi_3^{(L)}(r_2, \theta_2) \\ \Psi_3^{(L)}(r_2, \theta_2) \end{cases} = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ J_m(k_p^{(L)} r_2) (A_{32,m}^{(L)} \cos m\theta_2 + B_{32,m}^{(L)} \sin m\theta_2) \right. \\ \left. J_m(k_s^{(L)} r_2) (C_{32,m}^{(L)} \sin m\theta_2 + D_{32,m}^{(L)} \cos m\theta_2) \right\}, \quad (17)$$

利用如下内域型 Graf 加法公式^[17]:

$$\begin{aligned}
l_n^{(q)}(r_1) \begin{Bmatrix} \cos n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 \end{Bmatrix} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2} [l_{m+n}^{(q)}(D)] \\
&\pm (-1)^n l_{m-n}^{(q)}(D) J_m(r_2) \begin{Bmatrix} \cos m\theta_2 \\ \sin m\theta_2 \end{Bmatrix}, \\
l_m^{(q)}(r_2) \begin{Bmatrix} \cos m\theta_2 \\ \sin m\theta_2 \end{Bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{2} [l_{n+m}^{(q)}(D)] \\
&\pm (-1)^m l_{n-m}^{(q)}(D) J_n(r_1) \begin{Bmatrix} \cos n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \quad (18)$$

上述波函数在另外坐标系中具有如下形式:

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} \Phi_1^{(L)}(r_2, \theta_2) \\ \Psi_1^{(L)}(r_2, \theta_2) \end{Bmatrix} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} J_m(k_p^{(L)} r_2) (A_{12,m}^{(L)} \cos m\theta_2 + B_{12,m}^{(L)} \sin m\theta_2) \\ J_m(k_s^{(L)} r_2) (C_{12,m}^{(L)} \sin m\theta_2 + D_{12,m}^{(L)} \cos m\theta_2) \end{Bmatrix}, \\
&\quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} \Phi_3^{(L)}(r_1, \theta_1) \\ \Psi_3^{(L)}(r_1, \theta_1) \end{Bmatrix} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} J_n(k_p^{(L)} r_1) (A_{31,n}^{(L)} \cos n\theta_1 + B_{31,n}^{(L)} \sin n\theta_1) \\ J_n(k_s^{(L)} r_1) (C_{31,n}^{(L)} \sin n\theta_1 + D_{31,n}^{(L)} \cos n\theta_1) \end{Bmatrix}, \\
&\quad (20)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{Bmatrix} A_{12,m}^{(L)} \\ B_{12,m}^{(L)} \\ C_{12,m}^{(L)} \\ D_{12,m}^{(L)} \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} E_{nm}^{(3)+}(k_p^{(L)} D) A_{11,n}^{(L)} \\ E_{nm}^{(3)-}(k_p^{(L)} D) B_{11,n}^{(L)} \\ E_{nm}^{(3)-}(k_s^{(L)} D) C_{11,n}^{(L)} \\ E_{nm}^{(3)+}(k_s^{(L)} D) D_{11,n}^{(L)} \end{Bmatrix}, \quad (21a)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(L)} \\ B_{31,n}^{(L)} \\ C_{31,n}^{(L)} \\ D_{31,n}^{(L)} \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} E_{nm}^{(1)+}(k_p^{(L)} D) A_{32,m}^{(L)} \\ E_{nm}^{(1)-}(k_p^{(L)} D) B_{32,m}^{(L)} \\ E_{nm}^{(1)-}(k_s^{(L)} D) C_{32,m}^{(L)} \\ E_{nm}^{(1)+}(k_s^{(L)} D) D_{32,m}^{(L)} \end{Bmatrix}, \quad (21b)$$

式中

$$E_{jk}^{(q)\pm}(x) = \frac{\epsilon_j}{2} [l_{j+k}^{(q)}(x) \pm (-1)^k l_{j-k}^{(q)}(x)], \quad (22)$$

在(18)与(22)式中, $l_n^{(q)}(x)$ 表示 Bessel 函数: 当 $q=1$ 时, $l_n^{(q)}(x)$ 表示 $J_n(x)$; 当 $q=3$ 时, $l_n^{(q)}(x)$ 表示 $H_n^{(1)}(x)$. 在(21)式中, D 为圆心 O_1 与 O_2 之间的距离, 如图 2 所示.

3.2 沉积介质中散射波的势函数

在第 l 层 ($l=0, 1, 2, \dots, L-1$) 沉积介质中存在两种柱面驻波: 小圆弧 $l+1$ 处的散射波 $\Phi_2^{(l)}$ 、 $\Psi_2^{(l)}$ 和大圆弧处的散射波 $\Phi_3^{(l)}$ 、 $\Psi_3^{(l)}$; 以及小圆弧 l 处由圆心 O_1 点向外辐射的柱面波 $\Phi_1^{(l)}$ 和 $\Psi_1^{(l)}$ (当 $l=0$ 时, 该柱面波不存在), 如图 2 所示. 在坐标系 $r_1-\theta_1$ 与 $r_2-\theta_2$ 下, 这三种散射波具有如下形式:

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} \Phi_1^{(l)}(r_1, \theta_1) \\ \Psi_1^{(l)}(r_1, \theta_1) \end{Bmatrix} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} H_n^{(1)}(k_p^{(l)} r_1) (A_{11,n}^{(l)} \cos n\theta_1 + B_{11,n}^{(l)} \sin n\theta_1) \\ H_n^{(1)}(k_s^{(l)} r_1) (C_{11,n}^{(l)} \sin n\theta_1 + D_{11,n}^{(l)} \cos n\theta_1) \end{Bmatrix}, \\
&\quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} \Phi_2^{(l)}(r_1, \theta_1) \\ \Psi_2^{(l)}(r_1, \theta_1) \end{Bmatrix} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} J_n(k_p^{(l)} r_1) (A_{21,n}^{(l)} \cos n\theta_1 + B_{21,n}^{(l)} \sin n\theta_1) \\ J_n(k_s^{(l)} r_1) (C_{21,n}^{(l)} \sin n\theta_1 + D_{21,n}^{(l)} \cos n\theta_1) \end{Bmatrix}, \\
&\quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} \Phi_3^{(l)}(r_2, \theta_2) \\ \Psi_3^{(l)}(r_2, \theta_2) \end{Bmatrix} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} J_m(k_p^{(l)} r_2) (A_{32,m}^{(l)} \cos m\theta_2 + B_{32,m}^{(l)} \sin m\theta_2) \\ J_m(k_s^{(l)} r_2) (C_{32,m}^{(l)} \sin m\theta_2 + D_{32,m}^{(l)} \cos m\theta_2) \end{Bmatrix}, \\
&\quad (25)
\end{aligned}$$

利用 Graf 加法公式, 上述波函数在另外坐标系中的表达式如下:

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} \Phi_1^{(l)}(r_2, \theta_2) \\ \Psi_1^{(l)}(r_2, \theta_2) \end{Bmatrix} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} J_m(k_p^{(l)} r_2) (A_{12,m}^{(l)} \cos m\theta_2 + B_{12,m}^{(l)} \sin m\theta_2) \\ J_m(k_s^{(l)} r_2) (C_{12,m}^{(l)} \sin m\theta_2 + D_{12,m}^{(l)} \cos m\theta_2) \end{Bmatrix}, \\
&\quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} \Phi_2^{(l)}(r_2, \theta_2) \\ \Psi_2^{(l)}(r_2, \theta_2) \end{Bmatrix} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} J_m(k_p^{(l)} r_2) (A_{22,m}^{(l)} \cos m\theta_2 + B_{22,m}^{(l)} \sin m\theta_2) \\ J_m(k_s^{(l)} r_2) (C_{22,m}^{(l)} \sin m\theta_2 + D_{22,m}^{(l)} \cos m\theta_2) \end{Bmatrix}, \\
&\quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} \Phi_3^{(l)}(r_1, \theta_1) \\ \Psi_3^{(l)}(r_1, \theta_1) \end{Bmatrix} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} J_n(k_p^{(l)} r_1) (A_{31,n}^{(l)} \cos n\theta_1 + B_{31,n}^{(l)} \sin n\theta_1) \\ J_n(k_s^{(l)} r_1) (C_{31,n}^{(l)} \sin n\theta_1 + D_{31,n}^{(l)} \cos n\theta_1) \end{Bmatrix}, \\
&\quad (28)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{Bmatrix} A_{12,m}^{(l)} \\ B_{12,m}^{(l)} \\ C_{12,m}^{(l)} \\ D_{12,m}^{(l)} \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} E_{nm}^{(3)+}(k_p^{(l)} D) A_{11,n}^{(l)} \\ E_{nm}^{(3)-}(k_p^{(l)} D) B_{11,n}^{(l)} \\ E_{nm}^{(3)-}(k_s^{(l)} D) C_{11,n}^{(l)} \\ E_{nm}^{(3)+}(k_s^{(l)} D) D_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix}, \quad (29a)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{22,m}^{(l)} \\ B_{22,m}^{(l)} \\ C_{22,m}^{(l)} \\ D_{22,m}^{(l)} \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} E_{nm}^{(1)+}(k_p^{(l)} D) A_{21,n}^{(l)} \\ E_{nm}^{(1)-}(k_p^{(l)} D) B_{21,n}^{(l)} \\ E_{nm}^{(1)-}(k_s^{(l)} D) C_{21,n}^{(l)} \\ E_{nm}^{(1)+}(k_s^{(l)} D) D_{21,n}^{(l)} \end{Bmatrix}, \quad (29b)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(l)} \\ B_{31,n}^{(l)} \\ C_{31,n}^{(l)} \\ D_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} E_{mm}^{(1)+}(k_p^{(l)} D) A_{32,m}^{(l)} \\ E_{mm}^{(1)-}(k_p^{(l)} D) B_{32,m}^{(l)} \\ E_{mm}^{(1)-}(k_s^{(l)} D) C_{32,m}^{(l)} \\ E_{mm}^{(1)+}(k_s^{(l)} D) D_{32,m}^{(l)} \end{Bmatrix}, \quad (29c)$$

当 $l=0$ 时,式(23)与(26)所示柱面波不存在,从而有

$$\begin{Bmatrix} A_{11,n}^{(0)} \\ B_{11,n}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11,n}^{(0)} \\ D_{11,n}^{(0)} \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} A_{12,m}^{(0)} \\ B_{12,m}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{12,m}^{(0)} \\ D_{12,m}^{(0)} \end{Bmatrix} = 0. \quad (30)$$

4 位移场与应力场

为了使得推导过程简洁,在介质 L 中,令

$$\begin{Bmatrix} A_{21,n}^{(L)} \\ B_{21,n}^{(L)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{0,n} \\ B_{0,n} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} C_{21,n}^{(L)} \\ D_{21,n}^{(L)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{0,n} \\ D_{0,n} \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

引入上述变量之后,在坐标系 $r_1-\theta_1$ 下,第 l 层 ($l=0, 1, 2, \dots, L$) 介质中的位移与应力可表示为

$$\begin{Bmatrix} u_r^{(l)}(r_1, \theta_1) \\ u_\theta^{(l)}(r_1, \theta_1) \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \cos n\theta_1 & 0 \\ 0 & \sin n\theta_1 \end{bmatrix} \left[[U_{l,n}^{(3)+}(r_1)] \begin{Bmatrix} A_{11,n}^{(l)} \\ C_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + [U_{l,n}^{(1)+}(r_1)] \left\{ \begin{Bmatrix} A_{21,n}^{(l)} \\ C_{21,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(l)} \\ C_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix} \right\} \right] \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \sin n\theta_1 & 0 \\ 0 & \cos n\theta_1 \end{bmatrix} \left[[U_{l,n}^{(3)-}(r_1)] \begin{Bmatrix} B_{11,n}^{(l)} \\ D_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + [U_{l,n}^{(1)-}(r_1)] \left\{ \begin{Bmatrix} B_{21,n}^{(l)} \\ D_{21,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{31,n}^{(l)} \\ D_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix} \right\} \right], \quad (32)$$

$$\begin{Bmatrix} t_{rr}^{(l)}(r_1, \theta_1) \\ t_{\theta\theta}^{(l)}(r_1, \theta_1) \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \cos n\theta_1 & 0 \\ 0 & \sin n\theta_1 \end{bmatrix} \left[[T_{l,n}^{(3)+}(r_1)] \begin{Bmatrix} A_{11,n}^{(l)} \\ C_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + [T_{l,n}^{(1)+}(r_1)] \left\{ \begin{Bmatrix} A_{21,n}^{(l)} \\ C_{21,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(l)} \\ C_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix} \right\} \right] \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \sin n\theta_1 & 0 \\ 0 & \cos n\theta_1 \end{bmatrix} \left[[T_{l,n}^{(3)-}(r_1)] \begin{Bmatrix} B_{11,n}^{(l)} \\ D_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + [T_{l,n}^{(1)-}(r_1)] \left\{ \begin{Bmatrix} B_{21,n}^{(l)} \\ D_{21,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{31,n}^{(l)} \\ D_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix} \right\} \right], \quad (33)$$

其中

$$[U_{l,n}^{(q)\pm}(r)] = \begin{bmatrix} U_{11,n}^{(q)}(k_p^{(l)} r) & U_{12,n}^{(q)\pm}(k_s^{(l)} r) \\ U_{21,n}^{(q)\mp}(k_p^{(l)} r) & U_{22,n}^{(q)}(k_s^{(l)} r) \end{bmatrix}, \quad [T_{l,n}^{(q)\pm}(r)] = \begin{bmatrix} T_{11,n}^{(q)}(k_p^{(l)} r) & T_{12,n}^{(q)\pm}(k_s^{(l)} r) \\ T_{21,n}^{(q)\mp}(k_p^{(l)} r) & T_{22,n}^{(q)}(k_s^{(l)} r) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$U_{11,n}^{(q)}(k_p r) = \frac{1}{r} [k_p r l_{n-1}^{(q)}(k_p r) - n l_n^{(q)}(k_p r)], \quad U_{12,n}^{(q)\pm}(k_s r) = \frac{1}{r} [\pm n l_n^{(q)}(k_s r)],$$

$$U_{21,n}^{(q)\pm}(k_p r) = \frac{1}{r} [\pm n l_n^{(q)}(k_p r)], \quad U_{22,n}^{(q)}(k_s r) = \frac{1}{r} [-k_s r l_{n-1}^{(q)}(k_s r) + n l_n^{(q)}(k_s r)], \quad (35)$$

$$T_{11,n}^{(q)}(k_p r) = \frac{2\mu}{r^2} [-k_p r l_{n-1}^{(q)}(k_p r) + (n^2 + n - \frac{1}{2} k_s^2 r^2) l_n^{(q)}(k_p r)],$$

$$T_{12,n}^{(q)\pm}(k_s r) = \frac{2\mu}{r^2} (\pm n) [k_s r l_{n-1}^{(q)}(k_s r) - (n+1) l_n^{(q)}(k_s r)],$$

$$T_{21,n}^{(q)\pm}(k_p r) = \frac{2\mu}{r^2} (\pm n) [k_p r l_{n-1}^{(q)}(k_p r) - (n+1) l_n^{(q)}(k_p r)],$$

$$T_{22,n}^{(q)}(k_s r) = \frac{2\mu}{r^2} [k_s r l_{n-1}^{(q)}(k_s r) - (n^2 + n - \frac{1}{2} k_s^2 r^2) l_n^{(q)}(k_s r)]. \quad (36)$$

坐标系 $r_2-\theta_2$ 主要用于引入地表零应力条件,在该坐标系下,应力场可表示成

$$\begin{Bmatrix} t_{rr}^{(l)}(r_2, \theta_2) \\ t_{\theta\theta}^{(l)}(r_2, \theta_2) \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \cos m\theta_2 & 0 \\ 0 & \sin m\theta_2 \end{bmatrix} [T_{l,m}^{(1)+}(r_2)] \left\{ \begin{Bmatrix} A_{12,m}^{(l)} \\ C_{12,m}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{22,m}^{(l)} \\ C_{22,m}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{32,m}^{(l)} \\ C_{32,m}^{(l)} \end{Bmatrix} \right\} \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \sin m\theta_2 & 0 \\ 0 & \cos m\theta_2 \end{bmatrix} [T_{l,m}^{(1)-}(r_2)] \left\{ \begin{Bmatrix} B_{12,m}^{(l)} \\ D_{12,m}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{22,m}^{(l)} \\ D_{22,m}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{32,m}^{(l)} \\ D_{32,m}^{(l)} \end{Bmatrix} \right\}. \quad (37)$$

5 边界条件的引入及散射波场的确定

5.1 地表零应力边界条件的引入

考虑到自由场波函数对地表应力贡献为零,在大圆弧边界处,将(37)式代入零应力边界条件(6)式中,并利用(21)与(29)式,可以得到如下关系:

$$\begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(l)} \\ B_{31,n}^{(l)} \\ C_{31,n}^{(l)} \\ D_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} F_{nj}^{(2)+}(k_p^{(l)} D) A_{11,j}^{(l)} \\ F_{nj}^{(2)-}(k_p^{(l)} D) B_{11,j}^{(l)} \\ F_{nj}^{(2)-}(k_s^{(l)} D) C_{11,j}^{(l)} \\ F_{nj}^{(2)+}(k_s^{(l)} D) D_{11,j}^{(l)} \end{Bmatrix} + \sum_{j=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} F_{nj}^{(1)+}(k_p^{(l)} D) A_{21,j}^{(l)} \\ F_{nj}^{(1)-}(k_p^{(l)} D) B_{21,j}^{(l)} \\ F_{nj}^{(1)-}(k_s^{(l)} D) C_{21,j}^{(l)} \\ F_{nj}^{(1)+}(k_s^{(l)} D) D_{21,j}^{(l)} \end{Bmatrix}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L-1, \quad (38a)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(L)} \\ B_{31,n}^{(L)} \\ C_{31,n}^{(L)} \\ D_{31,n}^{(L)} \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} F_{nj}^{(2)+}(k_p^{(L)} D) A_{11,j}^{(L)} \\ F_{nj}^{(2)-}(k_p^{(L)} D) B_{11,j}^{(L)} \\ F_{nj}^{(2)-}(k_s^{(L)} D) C_{11,j}^{(L)} \\ F_{nj}^{(2)+}(k_s^{(L)} D) D_{11,j}^{(L)} \end{Bmatrix}, \quad (38b)$$

其中

$$\begin{Bmatrix} F_{nj}^{(1)\pm}(x) \\ F_{nj}^{(2)\pm}(x) \end{Bmatrix} = - \sum_{m=0}^{\infty} E_{nm}^{(1)\pm}(x) \begin{Bmatrix} E_{mj}^{(1)\pm}(x) \\ E_{mj}^{(3)\pm}(x) \end{Bmatrix}. \quad (39)$$

5.2 连续条件的引入

根据(30)式可得

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} A_{11,n}^{(0)} \\ C_{11,n}^{(0)} \end{Bmatrix} = [S_{1,n}^{(0)}] \begin{Bmatrix} A_{21,n}^{(0)} \\ C_{21,n}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(0)} \\ C_{31,n}^{(0)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} B_{11,n}^{(0)} \\ D_{11,n}^{(0)} \end{Bmatrix} = [S_{2,n}^{(0)}] \begin{Bmatrix} B_{21,n}^{(0)} \\ D_{21,n}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{31,n}^{(0)} \\ D_{31,n}^{(0)} \end{Bmatrix} \end{cases}, \quad (40)$$

其中

$$[S_{1,n}^{(0)}] = [S_{2,n}^{(0)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

利用第 l 个 ($l = 1, 2, \dots, L$) 圆弧边界处的连续条件(7)式及(32)、(33)式可得到如下关系

$$\begin{cases} [{}^u S_{11,n}^{(l)}] \begin{Bmatrix} A_{11,n}^{(l)} \\ C_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + [{}^u S_{12,n}^{(l)}] \begin{Bmatrix} A_{21,n}^{(l)} \\ C_{21,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(l)} \\ C_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{21,n}^{(l-1)} \\ C_{21,n}^{(l-1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(l-1)} \\ C_{31,n}^{(l-1)} \end{Bmatrix} \\ [{}^t S_{11,n}^{(l)}] \begin{Bmatrix} A_{11,n}^{(l)} \\ C_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + [{}^t S_{12,n}^{(l)}] \begin{Bmatrix} A_{21,n}^{(l)} \\ C_{21,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(l)} \\ C_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{21,n}^{(l-1)} \\ C_{21,n}^{(l-1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(l-1)} \\ C_{31,n}^{(l-1)} \end{Bmatrix} \end{cases}, \quad (42)$$

$$\begin{cases} [{}^u S_{21,n}^{(l)}] \begin{Bmatrix} B_{11,n}^{(l)} \\ D_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + [{}^u S_{22,n}^{(l)}] \begin{Bmatrix} B_{21,n}^{(l)} \\ D_{21,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{31,n}^{(l)} \\ D_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{21,n}^{(l-1)} \\ D_{21,n}^{(l-1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{31,n}^{(l-1)} \\ D_{31,n}^{(l-1)} \end{Bmatrix} \\ [{}^t S_{21,n}^{(l)}] \begin{Bmatrix} B_{11,n}^{(l)} \\ D_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + [{}^t S_{22,n}^{(l)}] \begin{Bmatrix} B_{21,n}^{(l)} \\ D_{21,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{31,n}^{(l)} \\ D_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{21,n}^{(l-1)} \\ D_{21,n}^{(l-1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{31,n}^{(l-1)} \\ D_{31,n}^{(l-1)} \end{Bmatrix} \end{cases}, \quad (43)$$

其中

$$[{}^v S_{i,j,n}^{(l)}] = [{}^v G_{i5,n}^{(l)}]^{-1} [{}^v G_{i,j,n}^{(l)}]. \quad (44)$$

上式中,字母 i, j 分别代表 1, 2; 字母 v 代表 u 或 t . 方阵 $[{}^v G_{i,j,n}^{(l)}]$ (其中 $i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4, 5$; 字母 v 代表 t 或 u) 的表达式如下:

$$\begin{Bmatrix} [{}^u G_{11,n}^{(l)}] \\ [{}^u G_{12,n}^{(l)}] \\ [{}^u G_{13,n}^{(l)}] \\ [{}^u G_{14,n}^{(l)}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [U_{l,n}^{(3)+}(b_l)] \\ [U_{l,n}^{(1)+}(b_l)] \\ [U_{l-1,n}^{(3)+}(b_l)] \\ [U_{l-1,n}^{(1)+}(b_l)] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} [{}^t G_{11,n}^{(l)}] \\ [{}^t G_{12,n}^{(l)}] \\ [{}^t G_{13,n}^{(l)}] \\ [{}^t G_{14,n}^{(l)}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [T_{l,n}^{(3)+}(b_l)] \\ [T_{l,n}^{(1)+}(b_l)] \\ [T_{l-1,n}^{(3)+}(b_l)] \\ [T_{l-1,n}^{(1)+}(b_l)] \end{Bmatrix}, \quad (45a)$$

$$\begin{Bmatrix} [{}^u G_{21,n}^{(l)}] \\ [{}^u G_{22,n}^{(l)}] \\ [{}^u G_{23,n}^{(l)}] \\ [{}^u G_{24,n}^{(l)}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [U_{l,n}^{(3)-}(b_l)] \\ [U_{l,n}^{(1)-}(b_l)] \\ [U_{l-1,n}^{(3)-}(b_l)] \\ [U_{l-1,n}^{(1)-}(b_l)] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} [{}^t G_{21,n}^{(l)}] \\ [{}^t G_{22,n}^{(l)}] \\ [{}^t G_{23,n}^{(l)}] \\ [{}^t G_{24,n}^{(l)}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [T_{l,n}^{(3)-}(b_l)] \\ [T_{l,n}^{(1)-}(b_l)] \\ [T_{l-1,n}^{(3)-}(b_l)] \\ [T_{l-1,n}^{(1)-}(b_l)] \end{Bmatrix}, \quad (45b)$$

$$\begin{Bmatrix} [{}^u\mathbf{G}_{15,n}^{(l)}] \\ [{}^t\mathbf{G}_{15,n}^{(l)}] \\ [{}^u\mathbf{G}_{25,n}^{(l)}] \\ [{}^t\mathbf{G}_{25,n}^{(l)}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [{}^u\mathbf{G}_{13,n}^{(l)}][\mathbf{S}_{1,n}^{(l-1)}] \\ [{}^t\mathbf{G}_{13,n}^{(l)}][\mathbf{S}_{1,n}^{(l-1)}] \\ [{}^u\mathbf{G}_{23,n}^{(l)}][\mathbf{S}_{2,n}^{(l-1)}] \\ [{}^t\mathbf{G}_{23,n}^{(l)}][\mathbf{S}_{2,n}^{(l-1)}] \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [{}^u\mathbf{G}_{14,n}^{(l)}] \\ [{}^t\mathbf{G}_{14,n}^{(l)}] \\ [{}^u\mathbf{G}_{24,n}^{(l)}] \\ [{}^t\mathbf{G}_{24,n}^{(l)}] \end{Bmatrix}, \quad (45c)$$

矩阵 $[U_{l,n}^{(q)\pm}(r)]$ 与 $[T_{l,n}^{(q)\pm}(r)]$ 的表达式参见(34)~(36)式。

根据方程(42)、(43),可以得到如下关系:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} A_{11,n}^{(l)} \\ C_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} = [\mathbf{S}_{1,n}^{(l)}] \begin{Bmatrix} A_{21,n}^{(l)} \\ C_{21,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(l)} \\ C_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} B_{11,n}^{(l)} \\ D_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} = [\mathbf{S}_{2,n}^{(l)}] \begin{Bmatrix} B_{21,n}^{(l)} \\ D_{21,n}^{(l)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{31,n}^{(l)} \\ D_{31,n}^{(l)} \end{Bmatrix}, \end{cases}, \quad (46)$$

其中

$$\begin{cases} [\mathbf{S}_{1,n}^{(l)}] = ([{}^t\mathbf{S}_{11,n}^{(l)}] - [{}^u\mathbf{S}_{11,n}^{(l)}])^{-1} ([{}^t\mathbf{S}_{12,n}^{(l)}] - [{}^u\mathbf{S}_{12,n}^{(l)}]), \\ [\mathbf{S}_{2,n}^{(l)}] = ([{}^t\mathbf{S}_{21,n}^{(l)}] - [{}^u\mathbf{S}_{21,n}^{(l)}])^{-1} ([{}^t\mathbf{S}_{22,n}^{(l)}] - [{}^u\mathbf{S}_{22,n}^{(l)}]), \end{cases} \quad (47)$$

自(41)式($l=0$)开始,利用(44)、(45)与(47)式可以递推地求出 $l=1,2,\dots,L$ 时,关系矩阵 $[\mathbf{S}_{1,n}^{(l)}]$ 与 $[\mathbf{S}_{2,n}^{(l)}]$ 的表达式。

5.3 待定系数的求解

当 $l=L$ 时,将(38b)与(31)式代入(46)式中可得:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} [P_{1,nj}] \begin{Bmatrix} A_{11,j}^{(L)} \\ C_{11,j}^{(L)} \end{Bmatrix} = \{q_{1,n}\}, \\ \sum_{j=0}^{\infty} [P_{2,nj}] \begin{Bmatrix} B_{11,j}^{(L)} \\ D_{11,j}^{(L)} \end{Bmatrix} = \{q_{2,n}\}, \end{cases} \quad (48)$$

其中

$$[P_{1,nj}] = \begin{bmatrix} \delta_{nj} - [S_{1,n}^{(L)}]_{11} F_{nj}^{(2)+}(k_p^{(L)} D) & - [S_{1,n}^{(L)}]_{12} F_{nj}^{(2)-}(k_s^{(L)} D) \\ - [S_{1,n}^{(L)}]_{21} F_{nj}^{(2)+}(k_p^{(L)} D) & \delta_{nj} - [S_{1,n}^{(L)}]_{22} F_{nj}^{(2)-}(k_s^{(L)} D) \end{bmatrix}, \quad (49a)$$

$$[P_{2,nj}] = \begin{bmatrix} \delta_{nj} - [S_{2,n}^{(L)}]_{11} F_{nj}^{(2)-}(k_p^{(L)} D) & - [S_{2,n}^{(L)}]_{12} F_{nj}^{(2)+}(k_s^{(L)} D) \\ - [S_{2,n}^{(L)}]_{21} F_{nj}^{(2)-}(k_p^{(L)} D) & \delta_{nj} - [S_{2,n}^{(L)}]_{22} F_{nj}^{(2)+}(k_s^{(L)} D) \end{bmatrix}, \quad (49b)$$

$$\{q_{1,n}\} = [S_{1,n}^{(L)}] \begin{Bmatrix} A_{0,n} \\ C_{0,n} \end{Bmatrix}, \quad (50a)$$

$$\{q_{2,n}\} = [S_{2,n}^{(L)}] \begin{Bmatrix} B_{0,n} \\ D_{0,n} \end{Bmatrix}, \quad (50b)$$

式中,当 $n=j$ 时, $\delta_{nj}=1$, 否则 $\delta_{nj}=0$; 符号 $[S]_{ij}$ 表示矩阵 $[S]$ 的第 i 行、第 j 列元素。

将无穷级数自有项截断,求解方程(48)即可得到待定系数 $\{A_{11,n}^{(L)}\}$ 、 $\{C_{11,n}^{(L)}\}$ 、 $\{B_{11,n}^{(L)}\}$ 与 $\{D_{11,n}^{(L)}\}$; 然后,利用(38b)式可以求得系数 $\{A_{31,n}^{(L)}\}$ 、 $\{C_{31,n}^{(L)}\}$ 、 $\{B_{31,n}^{(L)}\}$ 与 $\{D_{31,n}^{(L)}\}$. 至此,半空间介质(即介质 L)中散射波的所有待定系数均已确定。

对于介质 $l=L-1, L-2, \dots, 0$, 首先利用(42)、(43)与(46)式可求出系数 $\{A_{11,n}^{(l)}\}$ 、 $\{C_{11,n}^{(l)}\}$ 、 $\{B_{11,n}^{(l)}\}$ 与 $\{D_{11,n}^{(l)}\}$:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} A_{11,n}^{(l)} \\ C_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} = [S_{1,n}^{(l)}] \left[[{}^u\mathbf{S}_{11,n}^{(l+1)}] \begin{Bmatrix} A_{11,n}^{(l+1)} \\ C_{11,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} + [{}^u\mathbf{S}_{12,n}^{(l+1)}] \left[\begin{Bmatrix} A_{21,n}^{(l+1)} \\ C_{21,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(l+1)} \\ C_{31,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} \right] \right] \\ \begin{Bmatrix} B_{11,n}^{(l)} \\ D_{11,n}^{(l)} \end{Bmatrix} = [S_{2,n}^{(l)}] \left[[{}^u\mathbf{S}_{21,n}^{(l+1)}] \begin{Bmatrix} B_{11,n}^{(l+1)} \\ D_{11,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} + [{}^u\mathbf{S}_{22,n}^{(l+1)}] \left[\begin{Bmatrix} B_{21,n}^{(l+1)} \\ D_{21,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{31,n}^{(l+1)} \\ D_{31,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} \right] \right] \end{cases} \quad (51)$$

其次,将式(38a)代入(42)与(43)式中可得如下方程组:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} [P_{1,nj}] \begin{Bmatrix} A_{21,j}^{(l)} \\ C_{21,j}^{(l)} \end{Bmatrix} = \{q_{1,n}\}, \\ \sum_{j=0}^{\infty} [P_{2,nj}] \begin{Bmatrix} B_{21,j}^{(l)} \\ D_{21,j}^{(l)} \end{Bmatrix} = \{q_{2,n}\}, \end{cases} \quad (52)$$

其中

$$[P_{1,nj}] = \begin{bmatrix} \delta_{ij} + F_{nj}^{(1)+}(k_p^{(l)} D) & F_{nj}^{(1)-}(k_s^{(l)} D) \\ F_{nj}^{(1)+}(k_p^{(l)} D) & \delta_{ij} + F_{nj}^{(1)-}(k_s^{(l)} D) \end{bmatrix}, \quad (53a)$$

$$[P_{2,nj}] = \begin{bmatrix} \delta_{ij} + F_{nj}^{(1)-}(k_p^{(l)} D) & F_{nj}^{(1)+}(k_s^{(l)} D) \\ F_{nj}^{(1)-}(k_p^{(l)} D) & \delta_{ij} + F_{nj}^{(1)+}(k_s^{(l)} D) \end{bmatrix}, \quad (53b)$$

$$\{q_{1,n}\} = [{}^u S_{11,n}^{(l+1)}] \begin{Bmatrix} A_{11,n}^{(l+1)} \\ C_{11,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} + [{}^u S_{12,n}^{(l+1)}] \left\{ \begin{Bmatrix} A_{21,n}^{(l+1)} \\ C_{21,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31,n}^{(l+1)} \\ C_{31,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} \right\} - \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \begin{Bmatrix} F_{nj}^{(2)+}(k_p^{(l)} D) A_{11,j}^{(l)} \\ F_{nj}^{(2)-}(k_s^{(l)} D) C_{11,j}^{(l)} \end{Bmatrix} \right\}, \quad (54a)$$

$$\{q_{2,n}\} = [{}^u S_{21,n}^{(l+1)}] \begin{Bmatrix} B_{11,n}^{(l+1)} \\ D_{11,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} + [{}^u S_{22,n}^{(l+1)}] \left\{ \begin{Bmatrix} B_{21,n}^{(l+1)} \\ D_{21,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{31,n}^{(l+1)} \\ D_{31,n}^{(l+1)} \end{Bmatrix} \right\} - \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \begin{Bmatrix} F_{nj}^{(2)-}(k_p^{(l)} D) B_{11,j}^{(l)} \\ F_{nj}^{(2)+}(k_s^{(l)} D) D_{11,j}^{(l)} \end{Bmatrix} \right\}. \quad (54b)$$

求解方程组(52)即可得到系数 $\{A_{21,n}^{(l)}\}$ 、 $\{C_{21,n}^{(l)}\}$ 、 $\{B_{21,n}^{(l)}\}$ 与 $\{D_{21,n}^{(l)}\}$; 然后利用(38a)式可得系数 $\{A_{31,n}^{(l)}\}$ 、 $\{C_{31,n}^{(l)}\}$ 、 $\{B_{31,n}^{(l)}\}$ 与 $\{D_{31,n}^{(l)}\}$. 至此,第 l 层 ($l = L-1, L-2, \dots, 1, 0$) 介质中散射波的所有待定系数均已按上述递推方式求出,利用(32)与(33)式即可求出坐标系 $r_1-\theta_1$ 下的位移场与应力场.

利用坐标转换关系(11)式可以求出坐标系 $x-y$ 与 $r_1-\theta_1$ 之间的转换矩阵:

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \\ \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

应用张量转换关系

$$T_{i'j'} = \beta_{im} \beta_{j'n} T_{mn}, \quad (56)$$

坐标系 $x-y$ 下的位移场和应力场可表示如下:

$$\begin{Bmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \\ \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r(r_1,\theta_1) \\ u_\theta(r_1,\theta_1) \end{Bmatrix}, \quad (57)$$

$$\begin{Bmatrix} t_{xx}(x,y) \\ t_{yy}(x,y) \\ t_{xy}(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cos^2\theta_1 \\ \cos^2\theta_1 & -\sin 2\theta_1 & \sin^2\theta_1 \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta_1 & \cos 2\theta_1 & -\frac{1}{2}\sin 2\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{rr}(r_1,\theta_1) \\ t_{r\theta}(r_1,\theta_1) \\ t_{\theta\theta}(r_1,\theta_1) \end{Bmatrix}. \quad (58)$$

6 结果分析

首先,定义无量纲参数

$$\eta = \frac{2a_L}{\lambda_s^{(L)}} = \frac{\omega a_L}{\pi c_s^{(L)}}. \quad (59)$$

该参数的物理意义为谷地总宽度 $2a_L$ 与半空间中 S 波波长 $\lambda_s^{(L)}$ ($= \lambda_p^{(L)} c_s^{(L)} / c_p^{(L)}$, $\lambda_p^{(L)}$ 为入射 P 波波长) 之间的比值,它间接地描述了入射波的频率: η 越大,入射波波长 $\lambda_p^{(L)}$ 越小,其频率 ω 越高.

在上述解析解的求解过程中,需要将无穷级数自有限项 N 截断,通过求解线性方程组可获得最终散射波场. 级数解的收敛可按 Cauchy 收敛准则判断: 首先计算自有限项 N 截断所得的结果; 然后再计算自 $N+1$ 项截断所得的结果,如果二者之间的误差满足给定的精度要求,则所得结果即为最终解. 在计算地面点的位移幅值时,以谷地中心点 O 为基准,向左右各取 M 个离散空间点(计算范围 $[-2a_L, 2a_L]$),连同 O 点共计 $2M+1$ 个点. 计算相邻截断项数之间的误差时,先计算截断项数为 N 时与截断项数为 $N+1$ 时不同地表点之间位移差值(为复数)的模,共得到 $2M+1$ 个值 e_k ($k=1, 2, \dots, 2M+1$),然后求出这 $2M+1$ 个值的均方根 e , 即:

$$e = \left[\frac{1}{2M+1} \left(\sum_{k=1}^{2M+1} e_k^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (60)$$

将 e 作为与截断项数 N 对应的误差值,可以做出误差图. 通常,入射波的频率越高,级数所需收敛项数越高. 取计算频率 $\eta = 20$, 下面讨论在该频率下级数解的收敛问题. 谷地的沉积层数取为 3 层,其几何参数 $h_1 : h_2 : h_3 : a_3 = 0.4 : 0.7 : 1.0 : 2$, 其横波波速比为 $150 : 200 : 300 : 400$, 其密度比为 $1.5 : 1.6 : 1.7 : 1.8$. 可知,当 $\eta = 20$ 时,半空间介

质 S 波波长 ($= a_3/10$) 小于沉积介质的层厚 $h_2 - h_1$ ($= h_3 - h_2 = 3a_3/20$). P 波垂直入射 ($\gamma_p = 0^\circ$) 与斜入射 ($\gamma_p = 45^\circ$) 情况下, 地表水平位移与竖向位移的误差图(按公式(60) 计算) 如图 3 所示 ($\eta = 20$). 从中可以看出, 对于垂直入射情况, 级数解自 $N = 90$ 开始收敛, 当 $N = 107$ 时, $e_x = 3.328 \times 10^{-7}$, $e_y = 8.491 \times 10^{-9}$; 对于斜入射情况, 级数解自 $N = 146$ 开始收敛, 当 $N = 166$ 时, $e_x = 6.352 \times 10^{-6}$, $e_y = 4.910 \times 10^{-6}$. 因此, 当入射波频率不变时, 其入射角度对级数解的收敛项数有一定的影响.

通过以上讨论可知, 在 $\eta \leq 20$ 范围内, 本文所给出的级数解能够收敛于真实解. 对于模拟水平地表的大圆弧半径 R 的确定, 通常取 $R = 10^2 b_L \sim 10^5 b_L$ (b_L 为谷地最外层圆弧边界半径, 如图 1 所示) 即可

满足精度要求. 谐波入射下谷地稳态动力响应的位移场是以复数形式给出的, 即

$$u(x, y) = |u(x, y)| e^{i\varphi(x, y)}, \quad (61)$$

其中, $|u(x, y)|$ 为地震动的幅值, 其空间变化描述了地震动强度的分布; $\varphi(x, y)$ 为地震动的相位, 其空间变化描述了不同空间点简谐振动的滞后关系. 在下面的讨论中, 本文将以地面运动的幅值 $|u(x, 0)|$ 为参数, 论述入射波及谷地特性对稳态地面运动的影响.

以三层沉积谷地为例研究多层沉积谷地对入射 P 波的散射效应. 为了进行比较, 重点研究如下 3 类沉积谷地: 单层沉积谷地、三层正常沉积谷地与三层非正常沉积谷地, 其几何与物理参数均在表 1 中给出. 所有介质的波松比均取为 0.25. 谷地 3 存在着软弱夹层.

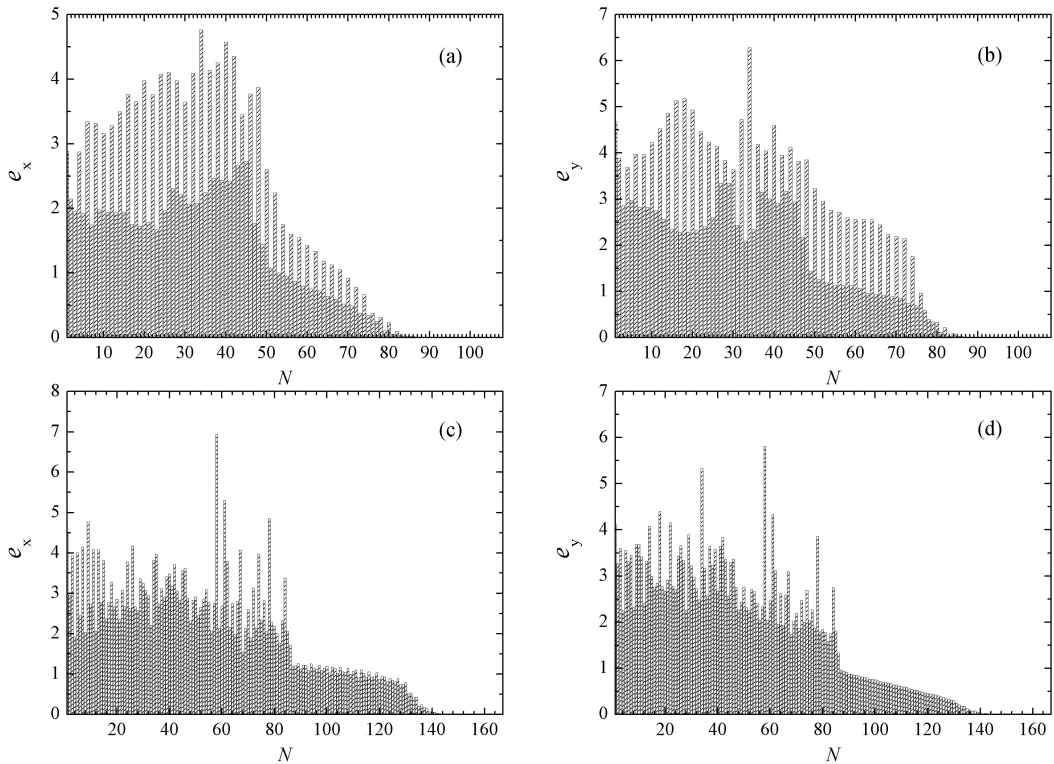


图 3 级数解随截断项数的收敛性

(a) 垂直入射 x 方向位移误差; (b) 垂直入射 y 方向位移误差; (c) 斜入射 x 方向位移误差; (d) 斜入射 y 方向位移误差.

Fig. 3 The convergence of series solution with the truncation number

表 1 沉积谷地的几何参数与物理参数

Table 1 The geometrical parameters and physical parameters of alluvial valleys

谷地类型	几何参数 $h_1 : h_2 : h_3 : a_3$	物理参数	
		S 波波速比	密度比
① 单层沉积	0.4 : 0.7 : 1.0 : 2	200 : 200 : 200 : 400	1.6 : 1.6 : 1.6 : 1.8
② 三层正常沉积	0.4 : 0.7 : 1.0 : 2	150 : 200 : 300 : 400	1.5 : 1.6 : 1.7 : 1.8
③ 三层非正常沉积	0.4 : 0.7 : 1.0 : 2	200 : 300 : 150 : 400	1.6 : 1.7 : 1.5 : 1.8

P 波垂直入射 ($\gamma_p = 0^\circ$) 情况下, 上述 3 类谷地地面运动幅值的空间变化如图 4 所示. 图中给出了 $\eta = 1.0, 4.0, 16.0$ 三种频率入射的结果. $\eta = 1.0$ 相当于半空间介质 S 波波长与谷地宽度 $2a_3$ 相等, 相当于中低频波入射; $\eta = 4.0$ 相当于半空间介质 S 波波长与谷地深度 $h_3 (= a_3/2)$ 相等, 相当于高频波入射; $\eta = 16.0$ 时, 半空间介质 S 波波长为 $a_3/8$, 小于沉积介质的层厚 $h_2 - h_1 (= h_3 - h_2 = 3a_3/20)$, 相当于极高频波入射, 这时散射波之间将会出现复杂的干涉现象.

当 $\eta = 1.0$ 时, 入射波波长较长, 其对谷地中沉积介质的层状不均匀性不是很敏感, 地面运动幅值的空间变化不是很剧烈, 如图 4a 所示. 即便如此, 从中也能看出一些干涉现象: 无论是水平位移 $|u_x| - x/a_3$ 曲线还是竖向位移 $|u_y| - x/a_3$ 曲线, 均出现了一些幅值非常低的局部极小值点, 这些点类似于驻波中的“波节”. 在 $\eta = 1.0$ 的情况下, 在谷地中心地带 $|x| < 0.5a_3$, 谷地 1 与谷地 3 的水平位移高于谷地 2, 而三者的竖向位移相差不大, 谷地介质的成层性对地面运动的影响不是很显著. 当 $\eta = 4.0$ 时, 由于入射波波长减小, 其对沉积介质的层状不均匀性开

始变得较为敏感, 地面运动变化较为剧烈, 而且出现了更多的类“驻波”的波节点, 如图 4b 所示. 在谷地中心地带的大部分空间点处, 与单层沉积相比, 多层沉积的地面运动幅值较大, 尤其对于水平振动而言. 这可能是散射波在沉积层内复杂的干涉所导致的能量汇聚造成的现象. 此外, 对于两种三层沉积谷地而言, 在谷地中心某些地带, 谷地 3 的水平位移幅值低于谷地 2, 软夹层表现出了隔振作用, 但在正中央区段 $|x| < 0.1a_3$, 谷地 3 的水平位移幅值反而略高于谷地 2 的水平位移幅值, 软夹层并未表现出隔振作用; 但是对于竖向位移来说, 在谷地中心地带 $|x| < 0.3a_3$, 谷地 3 的竖向位移幅值明显低于谷地 2, 软夹层表现出了显著的隔振作用. 对于谷地 3, 在其地表软夹层出露地段, 即 $0.8a_3 < |x| < a_3$, 其水平位移与竖向位移幅值均出现了明显的峰值点, 远高于其他两类谷地, 这说明了大量散射波的能量被软夹层所吸收, 从而造成地表软夹层出露地段较大的位移幅值. 这一现象在较低频波 ($\eta = 1.0$) 入射时并未出现. 当 $\eta = 16.0$ 时, 散射波波长与谷地沉积层的厚度相当, 甚至更小, 散射波在不同界面之间往复反射将造成复杂的干涉现象, 这使得在谷地中心区

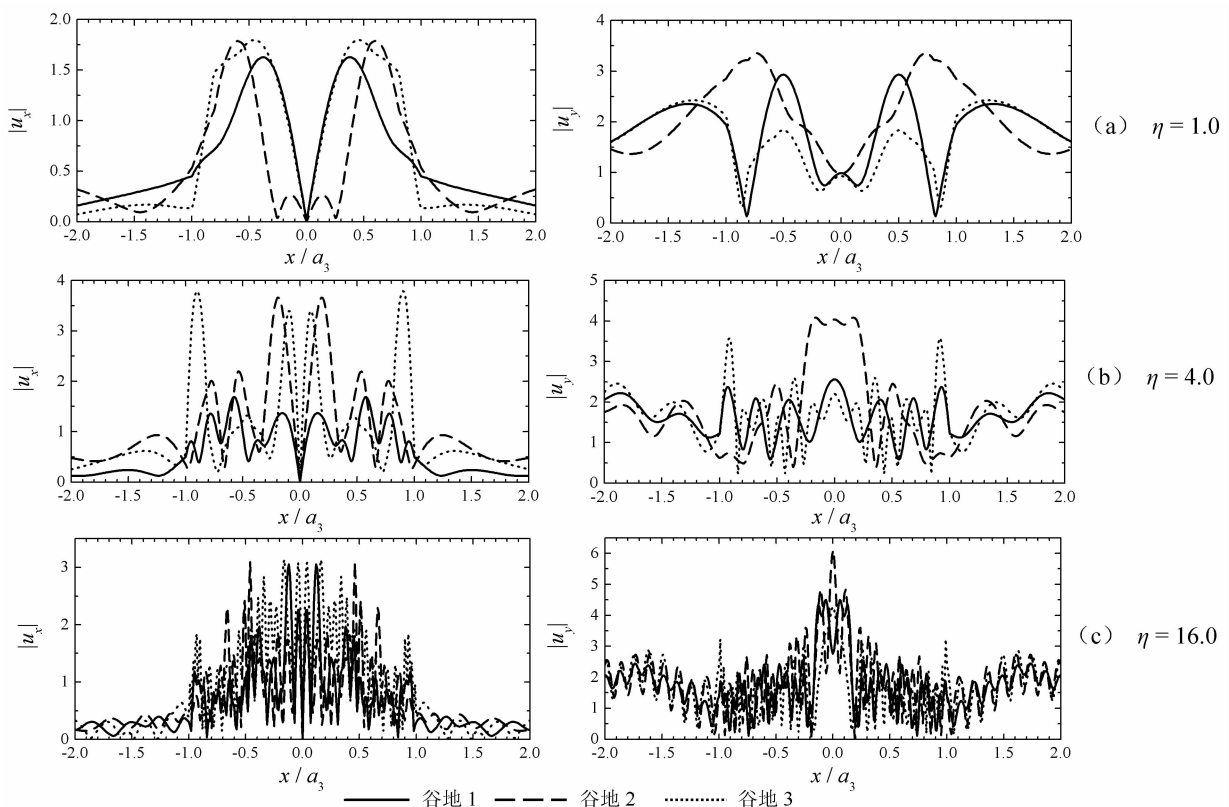


图 4 垂直入射情况 (入射角 $\gamma_p = 0^\circ$) 下 3 类谷地地面运动幅值

Fig. 4 The case of vertical incidence (incident angle $\gamma_p = 0^\circ$)

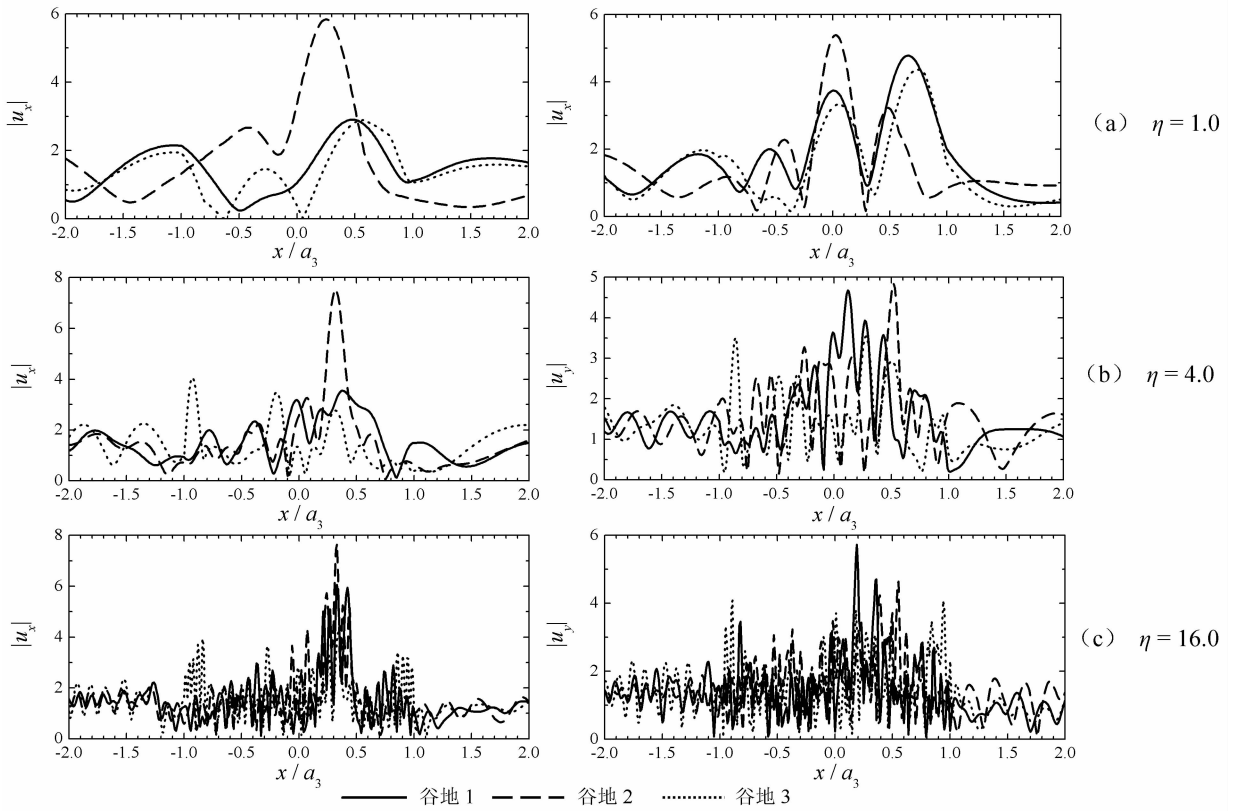


图 5 斜入射情况(入射角 $\gamma_p = 45^\circ$)下 3 类谷地地面运动幅值

Fig. 5 The case of inclined incidence (incident angle $\gamma_p = 45^\circ$)

段 $|x| < a_3$, 地面运动的空间变化非常剧烈, 如图 4c 所示. 对于两种三层沉积而言, 在谷地中心地带: 谷地 3 的水平位移高于谷地 2, 软夹层的存在反而对地震动有放大作用, 这是值得关注的; 而谷地 3 的竖向位移则低于谷地 2, 软夹层的存在表现出了隔振作用. 与 $\eta = 4.0$ 情况类似, 在谷地 3 的地表软夹层出露地段, 地面运动出现了较为明显的峰值点, 散射波在该地带表现出了较为明显的干涉与能量汇聚现象.

P 波斜入射 ($\gamma_p = 45^\circ$) 情况下, 3 类谷地地面运动的幅值如图 5 所示. 同样, 图中给出了 $\eta = 1.0$ 、 4.0 、 16.0 三种频率入射的结果. 与垂直入射类似, 随着入射波频率的增加, 散射波表现出了越来越明显的干涉现象: 地面运动的空间变化更加剧烈, 地表出现更多的类“波节”点, 地震动呈现出更为显著的“驻波”特性. 与垂直入射相比, 在斜入射情况下, 这 3 类谷地的稳态地面运动表现出了如下规律:

(1) 谷地 1 与谷地 2 地面运动强烈部分出现在“背波面”, 即谷地右侧; 在地面运动强烈区段, 谷地 2 水平振动最大幅值显著地高于谷地 1, 但是二者竖向振动最大幅值相差不大, 如图 5 所示.

(2) 对于谷地 3, 随着入射波频率的增加, 由于

散射波的干涉与能量汇聚效应增强, 软夹层吸收了大量散射波能量, 因此地表软夹层出露段 ($0.8a_3 < |x| < a_3$) 地面运动出现了较为明显的峰值. 此外, 在谷地左侧与软夹层相邻部位出现了一个“阴影区”, 即在地表 $-0.8a_3 < x < -0.5a_3$ 区段, 地面运动的幅值较低, 软夹层对入射波表现出了一定的“屏蔽”效应, 如图 5 所示.

(3) 在谷地的右侧, 除了地表软夹层出露段 ($0.8a_3 < x < a_3$), 谷地 3 水平与竖向振动强烈部分均位于区段 $0 < x < 0.5a_3$, 与谷地 1 一致, 但是相比谷地 1, 在相应地段谷地 3 地面运动的幅值较小, 软夹层表现出了隔振作用, 随着频率的增加, 这种现象变得更为显著.

7 结 论

利用波函数的 Fourier-Bessel 级数展开, 本文推导出了含任意多个圆弧形沉积层的谷地对入射平面 P 波二维散射问题的解析解. 利用该解析解, 以三层沉积谷地为例, 以地面运动的幅值为参数, 在一个较宽的频带范围内讨论了谷地中沉积介质的成层

性对地震地面运动的影响. 其结果表明, 对于多层沉积谷地而言, 当入射地震波频率较高时, 散射波表现出了显著的干涉与能量汇聚现象, 地面运动也显示出了类似于驻波的特性, 出现了大量的类“波节”点, 而且谷地中软弱夹层能够吸收较多的散射波能量, 而造成地表软夹层出露地段地面运动的幅值较高.

参考文献 (References)

- [1] Trifunac M D. Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bull Seism Soc Am*, 1971, **61**(6): 1755~1770
- [2] Wong H L, Trifunac M D. Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bull Seism Soc Am*, 1974, **64**(5): 1389~1403
- [3] Todorovska M I, Lee V W. Surface motion of shallow circular alluvial valleys for incident plane SH wave-analytical solution. *Soil Dyn Earthq Engrg*, 1991, **10**(4): 192~200
- [4] 梁建文, 严林隽, 李军伟等. 圆弧形沉积河谷谷地在平面 P 波入射下的响应. *岩土力学*, 2001, **22**(2): 138~143
Liang J W, Yan L J, Li J W, et al. Response of circular-arc alluvial valleys under incident plane P waves. *Rock and Soil Mechanics* (in Chinese), 2001, **22**(2): 138~143
- [5] 梁建文, 严林隽, 秦东等. 圆弧形沉积河谷谷地在平面 SV 波入射下的动力响应. *土木工程学报*, 2003, **36**(12): 74~82
Liang J W, Yan L J, Qin D, et al. Dynamic response of circular-arc sedimentary valley site under incident plane SV waves. *China Civil Engineering Journal* (in Chinese), 2003, **36**(12): 74~82
- [6] 梁建文, 张秋红, 李方杰. 浅圆沉积谷地对瑞雷波的散射-高频解. *地震学报*, 2006, **28**(2): 176~182
Liang J W, Zhang Q H, Li F J. Scattering of Rayleigh waves by a shallow circular alluvial valley: high-frequency solution. *ACTA Seimologica Sinica* (in Chinese), 2006, **28**(2): 176~182
- [7] Li W H, Zhao C G, Shi P X. Scattering of plane P waves by circular-arc alluvial valleys with saturated soil deposits. *Soil Dyn Earthq Engrg*, 2005, **25**: 997~1014
- [8] 李伟华, 赵成刚. 饱和土沉积谷地对平面 SV 波的散射问题的解析解. *地球物理学报*, 2004, **47**(5): 911~919
Li W H, Zhao C G. Scattering of plane SV waves by circular-arc alluvial valleys with saturated soil deposits. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 2004, **47**(5): 911~919
- [9] Yuan X M, Liao Z P. Scattering of plane SH waves by a cylindrical alluvial valley of circular-arc cross-section. *Earthq Engrg Struct Dyn*, 1995, **24**: 1303~1313
- [10] 王慧文, 刘殿魁, 邱发强等. SH 波入射时多个半圆形沉积谷地附近浅埋圆形孔洞的动力分析. *地震工程与工程振动*, 2006, **26**(4): 18~23
Wang H W, Liu D K, Qiu F Q, et al. Dynamic response of shallow-embedded cylindrical lining structure below semi-cylindrical alluvial valleys to incident SH waves. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration* (in Chinese), 2006, **26**(4): 18~23
- [11] Semblat F, Kham M, Parara E, et al. Seismic wave amplification: Basin geometry vs soil layering. *Soil Dyn Earthq Engrg*, 2005, **25**: 529~538
- [12] Moeen V N, Trifunac M D. Scattering and diffraction of plane SH waves by two-dimensional inhomogeneities. *Soil Dyn Earthq Engrg*, 1988, **7**(4): 179~188
- [13] Moeen V N, Trifunac M D. Scattering and diffraction of plane P and SV waves by two-dimensional inhomogeneities. *Soil Dyn Earthq Engrg*, 1988, **7**(4): 189~200
- [14] 梁建文, 张郁山, 顾晓鲁等. 圆弧形层状沉积河谷谷地在平面 SH 波入射下动力响应分析. *岩土工程学报*, 2000, **22**(4): 396~401
Liang J W, Zhang Y S, Gu X L, et al. Surface motion of circular-arc layered alluvial valleys for incident plane SH waves. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering* (in Chinese), 2000, **22**(4): 396~401
- [15] 梁建文, 严林隽, Lee V W. 圆弧形层状沉积谷地对入射平面 P 波的散射解析解. *地震学报*, 2001, **23**(2): 167~184
Liang J W, Yan L J, Lee V W. Scattering of plane P waves by circular-arc layered alluvial valleys: an analytical solution. *Acta Seimologica Sinica* (in Chinese), 2001, **23**(2): 167~184
- [16] 梁建文, 严林隽, Lee V W. 圆弧形层状沉积谷地对波入射平面 SV 波散射解析解. *固体力学学报*, 2003, **24**(2): 235~243
Liang J W, Yan L J, Lee V W. Diffraction of plane SV waves by a circular-arc layered alluvial valley: analytical solution. *Acta Mechanica Solida Sinica* (in Chinese), 2003, **24**(2): 235~243
- [17] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover Publication, 1972

(本文编辑 胡素芳)