

变荷载下双曲线模型修正土体一维固结理论

张 磊^{1, 2}, 孙树林^{2, 3}

(1. 浙江大学 岩土工程研究所, 浙江 杭州 310027; 2. 河海大学 土木工程学院, 江苏 南京 210098;
3. 河海大学 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210098)

摘要: 假定土体本构关系满足双曲线模型, 把利用该模型得出的孔隙比 e 和有效应力 σ' 的双曲线关系应用到一维单层均质地基固结理论的研究中, 通过假定土体的初始有效应力沿深度均匀分布和渗透系数的降低与压缩系数的减小成正比, 推导出任意荷载作用下一维非线性固结理论的方程。对于所得到的非线性偏微分方程, 通过 ξ - σ' 代换化成线性偏微分方程, 并按照具体的初始和边界条件采用分离变量法求出土体有效应力 σ' 和超静孔隙水压力 u 的解, 由此分别推导出按沉降定义的平均固结度 U_s 和按平均孔隙水压力定义的平均固结度 U_p 的表达式。采用 MATLAB 语言编制相应的计算程序, 结合具体算例与已有的修正非线性固结理论解的结果进行对比来论证本修正的正确性。计算结果表明: 固结度随着时间的增长而增长, 其增长速率逐渐减小; U_s 值稍大于 U_p 值; 2 种修正的计算结果中存在微小的差异, 其原因是在推导固结方程时采用了不同的本构模型以及不同的对渗透系数变化规律的假定。

关键词: 土力学; 变荷载; 一维固结; 双曲线模型; 分离变量法

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2007)增 2 - 4306 - 05

ONE-DIMENSIONAL CONSOLIDATION THEORY BASED ON HYPERBOLA MODEL UNDER TIME-DEPENDENT LOADING FOR SATURATED SOIL

ZHANG Lei^{1, 2}, SUN Shulin^{2, 3}

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China; 2. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China; 3. State Key Laboratory of Hydrology-water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China)

Abstract: It is supposed that the constitutive relation of soil is the hyperbola model. The hyperbolic relationship between e and σ' , which was achieved from this model, is applied to the study on one-dimensional nonlinear consolidation of one-layered and homogeneous saturated soil. With the assumptions that the decrease of the hydraulic conductivity is proportional to the decrease of the compression conductivity and the distribution of initial effective pressure does not vary with depth, the one-dimensional nonlinear partial differential consolidation equation, which is under arbitrary loading, is deduced. With the ξ - σ' transform, the nonlinear partial differential equation is changed into a linear one. According to the idiographic initial condition and the boundary conditions, the equation is then solved by using the variable separation method. Then the effective stress of soil and the excess water pore pressure can be achieved. So the correlation approach of the average consolidation degree, which is defined according to the settlement, and the correlation approach of the average consolidation degree that is

收稿日期: 2006 - 07 - 13; **修回日期:** 2006 - 10 - 09

基金项目: 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室开放研究基金资助项目(2005408911)

作者简介: 张 磊(1981 -), 男, 2007 年于河海大学土木工程学院地质工程专业获硕士学位, 现为博士研究生, 主要从事土体非线性固结理论和复合地基等方面的研究工作。E-mail: 10712023@zju.edu.cn

defined according to the excess pore pressure are both deduced. The relevant computer program has been developed by MATLAB language. The results using this program are gained with the data from a specific example and the nonlinear consolidation theory with the same data. Both of the results are drawn in two charts. By comparing the curves from the charts, it is found that the differences between the two results are very small, which shows the rationality of this theory. The calculation shows that the consolidation degrees increase with the increment of time; and the value of the U_s is a little bigger than that of the U_p . When the consolidation equation is deduced, the different relationships between e and σ' can be obtained. The different changing laws of hydraulic conductivity are adopted, and it clearly displays that the small differences in the results with the two different theories.

Key words: soil mechanics; time-dependent loading; one-dimensional consolidation; hyperbola model; variable separation method

1 引 言

Terzaghi 一维固结理论在解决软土地基变形控制和预测中发挥着重要作用, 可其假定条件偏离实际情况, 所得结果与实测资料相差较大。国内外学者不断地对该理论的假设进行修正, 如考虑荷载变化^[1]、土体分层^[2~4]和半透水边界^[5, 6]等, 取得了很多有益的成果。但是, 土体本构关系具有明显的非线性, 以上解答均没有考虑土体这一重要性质。E. H. Davis 和 G. P. Raymond^[7]把根据由经验得到的孔隙比 e 和土体有效应力 σ' 之间的半对数关系应用到对土体固结理论的修正中, 同时假定渗透系数 k 的降低和压缩系数 a_v 的减小成正比以及土体的初始有效应力 σ'_0 沿深度均匀分布等得出了瞬时加载情况下的解析解; K. H. Xie 等^[8, 9]在 E. H. Davis 和 G. P. Raymond^[7]工作的基础上求出了单步加载及低频循环荷载作用下的解; 魏汝龙教授通过大量的实验指出: 软黏土应力 - 应变关系更适合双曲线特征而不是半对数关系^[10]。施建勇等^[11]根据相关研究^[10]中所建议的土体本构关系, 并采用与 E. H. Davis 和 G. P. Raymond^[7]中相类似的其他假定, 即固结过程中渗透系数 k 的降低和压缩系数 a_v 的减小成正比及土体的初始有效应力 σ'_0 沿深度均匀分布, 得出了瞬时加载情况下的解析解。在现实中瞬时加载是少见的, 所加荷载大多是随时间变化的, 而现存文献中没有既考虑土体本构关系满足双曲线模型, 又考虑荷载变化的对一维固结理论修正的研究。

本文在施建勇等^[11]工作的基础上, 求出了任意荷载下的土体一维非线性固结解。所得解答与谢康和等在 K. H. Xie 等^[8, 9]中的解答用同一个算例进行计算和比较, 计算结果相当吻合, 从而证明了本文

的修正是正确的; 并对固结性状进行分析。对于 2 种修正所得结果中存在的微小差异也指出了其原因。

2 问题的描述及求解

2.1 问题的描述

地基荷载以及边界情况如图 1 所示。黏土层厚度为 H , 地基的排水条件分为单面和双面排水 2 种, 地面作用着随时间任意变化的荷载 $p=q(t)$, 初始值为 q_0 ; 且当 $t > t_1$ 时, 所加荷载为恒荷载 q_1 (见图 2)。对于 $t > t_1$ 时恒荷载的情况, 可以参考施建勇等^[11]中的解答并把初始有效应力看作是本文所求得的 $t = t_1$ 时刻的有效应力来求解即可。本文所采用的假定条件为:

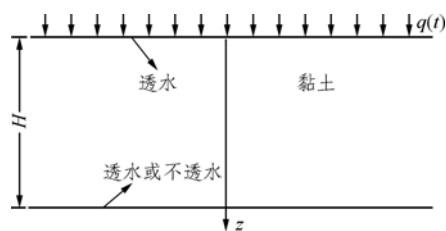


图 1 地基荷载以及边界情况

Fig.1 Loads and boundary conditions of soil layer

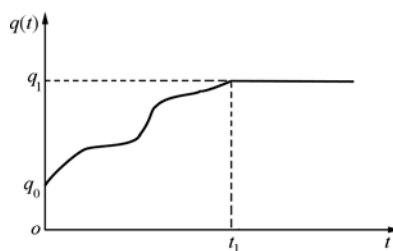


图 2 荷载与时间的关系

Fig.2 Relationship between load and time

(1) 应力 - 应变关系满足双曲线模型, 即

$$\sigma' / \varepsilon = E_0 + n\sigma' \quad (1)$$

式中: ε 为应变, E_0 为土的初始压缩模量, n 为 $\sigma' / \varepsilon - \sigma'$ 压缩曲线的斜率。

(2) 渗透系数 k 和压缩系数 a_v 成比例减小, 即

$$k / a_v = \text{const} = \gamma_w c_v / (1 + e_0) \quad (2)$$

式中: γ_w 为孔隙水重度, c_v 为固结系数, e_0 为初始孔隙比。

(3) 土体的初始有效应力 σ'_0 沿深度均匀分布。

对于 σ'_0 , 通常采用下式确定:

$$\sigma'_0 = \frac{\int_0^H \gamma' z dz}{H} = \frac{1}{2} \gamma' H \quad (3)$$

式中: γ' 为土体有效重度。其他相关条件的假设与 Terzaghi 一维固结理论相同。

根据以上假设和图 1, 类似于施建勇等^[11]的研究, 可得出该问题的控制方程:

$$-c_v E_0 \left[\frac{1}{(E_0 + n\sigma')^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2n}{(E_0 + n\sigma')^3} \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \frac{E_0}{(E_0 + n\sigma')^2} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (4)$$

根据式(3), 由总应力相等有

$$\sigma' + u + \gamma_w z = q(t) + \sigma'_0 + \gamma_w z \quad (5)$$

将式(5)对时间 t 求一阶导数和深度 z 求二阶导数并代入式(4)中, 可得

$$c_v E_0 \left[\frac{1}{(E_0 + n\sigma')^2} \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial z^2} - \frac{2n}{(E_0 + n\sigma')^3} \left(\frac{\partial \sigma'}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{E_0}{(E_0 + n\sigma')^2} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (6)$$

式(6)为一个非线性的偏微分方程, 直接求解尚有困难, 现采用变量代换:

$$\xi = \frac{(1 + e_0)\sigma'}{E_0 + n\sigma'} - \frac{(1 + e_0)[\sigma'_0 + q(t)]}{E_0 + n[\sigma'_0 + q(t)]} \quad (7)$$

由式(7)可得出用 ξ 表示的 $\partial \sigma' / \partial t$, $\partial \sigma' / \partial z$ 和 $\partial^2 \sigma' / \partial z^2$, 将其代入式(6)中化简, 并令

$$f(t) = \frac{E_0(1 + e_0)q'(t)}{[E_0 + n\sigma'_0 + nq(t)]^2}$$

可得线性偏微分方程:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - f(t) \quad (8)$$

令

$$Q(t) = \frac{(1 + e_0)\sigma'_0}{E_0 + n\sigma'_0} - \frac{(1 + e_0)[\sigma'_0 + q(t)]}{E_0 + n[\sigma'_0 + q(t)]}$$

则有如下定解条件:

$$\left. \begin{aligned} t = 0, \quad 0 \leq z \leq H, \quad u = q(0) \\ \sigma' = \sigma'_0, \quad \xi = Q(0) \end{aligned} \right\} \text{(初始条件)} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} t > 0, \quad z = 0, \quad u = 0 \\ \sigma' = \sigma'_0 + q(t), \quad \xi = 0 \end{aligned} \right\} \text{(顶面边界条件(透水))} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} t > 0, \quad z = H, \quad u = 0 \\ \sigma' = \sigma_0 + q(t), \quad \xi = 0 \end{aligned} \right\} \text{(底面边界条件(透水))} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} t > 0, \quad z = H, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \text{(底面边界条件(不透水))} \quad (12)$$

2.2 方程的求解

双面透水的情况采用定解条件式(9)~(11)。根据陈才生^[12]中所述采用分离变量法, 由此可得

$$\xi(z, t) = -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4}{m\pi} \left[\int_0^t f(\tau) e^{c_v \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \tau} d\tau - Q(0) \right] e^{-c_v \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 t} \sin \frac{m\pi z}{H} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (13)$$

其中,

$$f(\tau) = \frac{E_0(1 + e_0)q'(\tau)}{[E_0 + n\sigma'_0 + nq(\tau)]^2}$$

$$Q(0) = \frac{(1 + e_0)\sigma'_0}{E_0 + n\sigma'_0} - \frac{(1 + e_0)[\sigma'_0 + q(0)]}{E_0 + n[\sigma'_0 + q(0)]}$$

由式(7)推出双面排水条件下土体的有效应力为

$$\sigma' = \frac{E_0 \xi(z, t)[E_0 + n\sigma'_0 + nq(t)] + E_0(1 + e_0)[\sigma'_0 + q(t)]}{E_0(1 + e_0) - n\xi(z, t)[E_0 + n\sigma'_0 + nq(t)]} \quad (14)$$

由式(5)推出超静孔隙水压力为

$$u = q(t) + \sigma'_0 - \sigma' \quad (15)$$

对于顶面透水且底面不透水也即单面排水的情况, 可将式(13)中的 H 改成 $2H$ 并把 $\xi(z, t)$ 代入式(14)和(15)中即可求出有效应力 σ' 和超静孔隙水压力 u 的值。

2.3 固结度

固结度分为两种: 一种是按沉降定义的平均固结度 U_s , 即表征土体固结过程中沉降完成程度的物理量; 另一种是按照平均孔隙水压力定义的平均固

结度 U_p , 即表征固结过程中超静孔隙水压力消散程度的物理量。这两者在太沙基的线弹性固结理论中是相同的, 即可以通过计算 U_p 来预测沉降量, 而在非线性固结理论中这两者是不同的^[9]。

按沉降定义的平均固结度 U_s :

$$U_s = \frac{\int_0^H \varepsilon dz}{\int_0^H \varepsilon_f dz} = \frac{\int_0^H \frac{\sigma'}{E_0 + n\sigma'} dz - \int_0^H \frac{\sigma'_0}{E_0 + n\sigma'_0} dz}{\int_0^H \frac{\sigma'_f}{E_0 + n\sigma'_f} dz - \int_0^H \frac{\sigma'_0}{E_0 + n\sigma'_0} dz} = \frac{\int_0^H \frac{\sigma'}{E_0 + n\sigma'} dz - \frac{H\sigma'_0}{E_0 + n\sigma'_0}}{(q_1 + \sigma'_0)H - \frac{H\sigma'_0}{E_0 + n\sigma'_0}} \quad (16)$$

按平均孔隙水压力定义的平均固结度 U_p 为

$$U_p = \frac{\int_0^H [q(t) - u] dz}{\int_0^H q_1 dz} = \frac{q(t) - \frac{1}{H} \int_0^H u dz}{q_1} \quad (17)$$

3 算例分析

本算例所用土样取自淮安—盐城高速公路某路段的软黏土。通过室内实验得出其液限为 53.1%, 塑限为 26.4%, 有效重度 $\gamma' = 7.92 \text{ kN/m}^3$, 压缩系数 $a_{v0.1-0.2} = 0.79 \text{ MPa}^{-1}$, 固结系数 $c_v = 0.67 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$, 初始孔隙比 $e_0 = 1.164$; 采用最小二乘法拟合由压缩实验得到的孔隙比 e 和有效应力 p 的数据可得:

$E_0 = 1\ 687.8 \text{ kPa}$, $n = 3.3$; 压缩土层厚度为 3.2 m; 荷载经过 30 d 的时间从 0 线性加至 $q_1 = 200 \text{ kPa}$, 后为恒荷载, 荷载与时间的关系曲线如图 3 所示; 地基顶面透水且底面不透水。利用编制的 MATLAB 程序进行计算, 把本文解答与相关理论^[8, 9]解答绘制成图 4 和 5(图中: $T_v = c_v t / H^2$ 为时间因子; H 为最大排水距离, 单面排水时等于土层厚度, 双面排水时取为土层厚度的一半)。

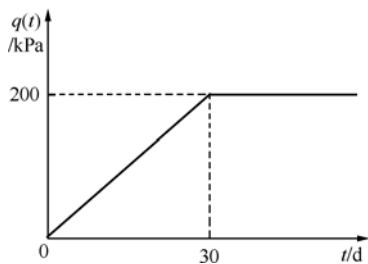


图 3 荷载与时间的关系曲线

Fig.3 Relation curve between load and time

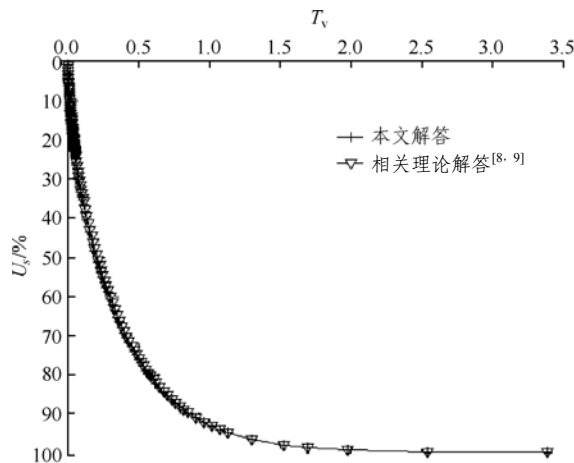


图 4 U_s 和 T_v 的关系曲线

Fig.4 Relation curves between U_s and T_v

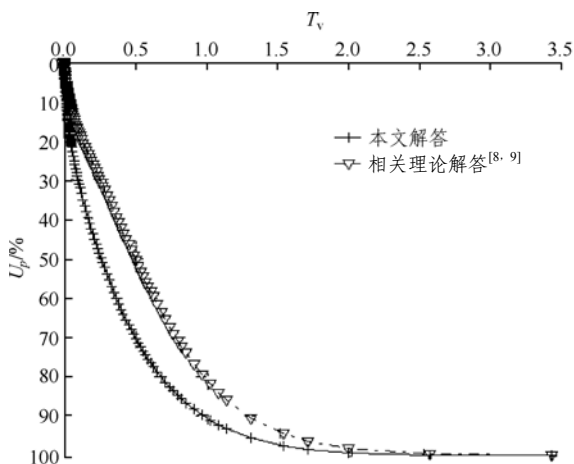


图 5 U_p 和 T_v 的关系曲线

Fig.5 Relation curves between U_p and T_v

从图 4, 5 中可以看出: 2 种修正在对沉降进行预测时, 计算成果在绘制的 U_s - T_v 关系曲线中几乎重合在一起, 这足以说明本文对固结理论的修正是正确的; 在 U_p - T_v 关系曲线中两者有些小的差异, 但曲线的形状以及走势大致相同, 并且在 $T_v \rightarrow 0$ 和 $T_v > 1.5$ 时两者的 U_p 值基本一致。因此, 计算成果中所存在的微小差异并不影响对本文理论正确性的证明。2 种修正在推导固结方程时采用了不同的应力 - 应变关系和不同的渗透系数变化规律, 因此所求得的土体有效应力和超静孔隙水压力的表达式就不同, 导致固结度的表达式也不同, 从而用具体的土体参数和加载函数进行计算时所得出的结果就会产生微小的差异。

4 结 论

本文假定土体的应力 - 应变关系满足双曲线模型, 把利用该模型所得到的孔隙比和有效应力的双曲线关系应用到土体一维固结理论的研究中, 通过假定地基土体在受压固结过程中渗透系数的降低和压缩系数的减小成正比以及初始有效应力沿深度均匀分布, 求出了任意荷载作用下双面和单面排水条件下的解。

计算结果表明, 固结度随着时间的增长而增长, 其增长速率逐渐减小; 在固结过程中, U_s 的值稍大于 U_p 的值, 这一点在相关研究^[8, 9]解答中表现得更加明显, 但在 $T_v \rightarrow 0$ 和相当大(如 $T_v > 1.5$)的情况下, U_s 和 U_p 的值趋于一致, 这与孔隙水压力即将消散完成时土体的主固结也将基本结束这一理论相吻合。另外, 本文为了求解方便, 与相关研究^[8, 9]一样也假定初始有效应力沿深度均匀分布, 与实际情况不符, 这为将来的研究提出了方向。

参考文献(References):

- [1] WILSON N E, ELGOHARY M M. Consolidation of soils under cyclic loading[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1974, 11(3): 420 - 423.
- [2] GRAY H. Simultaneous consolidation of contiguous layers of unlike compressible soils[J]. Transactions, ASCE, 1945, 110: 1 327 - 1 356.
- [3] 谢康和. 双层地基一维固结理论与应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(5): 24 - 35.(XIE Kanghe. Theory of one-dimensional consolidation of double-layered ground and its applications[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 16(5): 24 - 35.(in Chinese))
- [4] 谢康和, 潘秋元. 变荷载下任意层地基一维固结理论[J]. 岩土工程学报, 1995, 17(5): 80 - 85.(XIE Kanghe, PAN Qiuyuan. One-dimensional consolidation theory of arbitrary layers under time-dependent loading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 17(5): 80 - 85.(in Chinese))
- [5] 蔡袁强, 梁 旭, 吴世明. 变荷载下半透水边界成层地基的一维固结[J]. 应用数学与力学, 2004, 25(8): 855 - 862(CAI Yuanqiang, LIANG Xu, WU Shiming. One-dimensional consolidation of layered soils with impeded boundaries under time-dependent loadings[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(8): 855 - 862(in Chinese))
- [6] 李西斌, 谢康和. 循环荷载下半透水边界土层一维固结解析解[J]. 岩土力学, 2005, 26(1): 155 - 159.(LI Xibin, XIE Kanghe. Theory of 1D consolidation of soft clayey soil with impeded boundaries under cyclic loading[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(1): 155 - 159.(in Chinese))
- [7] DAVIS E H, RAYMOND G P. A nonlinear theory of consolidation[J]. Geotechnique, 1965, 15(2): 161 - 173.
- [8] XIE K H, LI B H, LI Q L. A nonlinear theory of consolidation under time-dependent loading[C]// Proc. the 2nd Int. Conf. Soft Soil Eng.. [S. l.]: [s. n.], 1996: 193 - 198.
- [9] 谢康和, 周 瑾, 董亚钦. 循环荷载作用下地基一维非线性固结解析解[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(1): 21 - 26.(XIE Kanghe, ZHOU Jin, DONG Yaqin. Analytical solution for one-dimensional nonlinear consolidation of soil under cyclic loading[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(1): 21 - 26.(in Chinese))
- [10] 郑颖人, 龚晓南. 岩土塑性力学基础[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989: 200 - 205.(ZHENG Yingren, GONG Xiaonan. The principle of geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1989: 200 - 205.(in Chinese))
- [11] 施建勇, 杨立昂, 赵维炳, 等. 考虑土体非线性特性的一维固结理论研究[J]. 河海大学学报, 2001, 29(1): 1 - 5.(SHI Jianyong, YANG Lirang, ZHAO Weibing, et al. Research of one-dimensional consolidation theory considering nonlinear characteristics of soil[J]. Journal of Hohai University, 2001, 29(1): 1 - 5.(in Chinese))
- [12] 陈才生. 数学物理方程[M]. 南京: 东南大学出版社, 2002: 59 - 105.(CHEN Caisheng. Partial differential equations in mathematical physics[M]. Nanjing: Southeast University Press, 2002: 59 - 105.(in Chinese))