

单轴压缩下中心裂纹巴西试样的权函数分析*

陈 枫 孙宗顺 徐纪成

(中南工业大学测试中心力学开放实验室 长沙 410083)

摘要 用权函数方法对中心裂纹巴西试样的对径加载作了 I-II 复合型断裂分析。运用 Edlac 裂纹线应力的解析解和 Wu-Carlsson 半解析权函数推导了中心裂纹巴西试样在对径加载下的应力强度因子公式。结果与 Atkinson 数值解非常一致。由于巴西圆盘试样可直接利用岩芯,而且可以通过改变裂纹与载荷线的夹角即可获得任意 K_{I}/K_{II} 比例的复合型加载,因此所提出的方法和结果对岩石断裂强度和复合型断裂准则的研究十分有用。

关键词 巴西圆盘试样, 压缩, 复合断裂, 权函数

分类号 O 346.1

文献标识码 A

文章编号 1000-6915(2000)05-0599-05

1 前言

在岩石压剪断裂研究中,常用的二种加载路径是比例和非比例加载。前者大多采用有倾斜边裂纹或中心裂纹的矩形试样受单轴压缩,而后者则采用二套独立的加载装置,即先将压力加到某一数值后固定,再逐级增加剪切力,直至破坏,如文[1]对压剪断裂核的研究,文[2]对岩石复合判据的研究。这种试样加工复杂,很难保证加载面的平行度,且难于实现 $K_{I}-K_{II}$ 成任意比例的复合加载。除了用数值方法或用拉剪状态下的公式计算应力强度因子外,几乎没有解析或半解析公式可利用。本文用权函数方法对中心裂纹巴西圆盘试样在对径加载下的复合断裂问题进行了分析,提出了 I, II 型应力强度因子的计算公式,其结果与 Atkinson 数值解十分吻合。巴西圆盘试样可直接利用岩芯,通过任意改变裂纹面与载荷作用线之间的夹角,方便地实现从纯 I 型或纯 II 型加载到 $K_{I}-K_{II}$ 成任意比例的复合型加载,在岩石断裂强度和复合型断裂判据的研究中具有广泛的应用。在下面的研究中, K, U 为有量纲应力强度因子和裂纹面位移, f 和 u 则为相应的无量纲量。

2 理论基础

文[3, 4]提出的权函数是分析有限裂纹体应力

强度因子的一个十分有用的方法,根据这一方法,应力强度因子可以通过积分权函数 $m_i(x, a)$ 和裂纹面上的应力 $\sigma_i(x)$ 的乘积得到

$$K_i = \int_0^a \sigma_i(x) m_i(x, a) dx \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

式中: a 为裂纹长度; $\sigma_i(x)$ ($i = 1, 2$) 分别是作用于裂纹面上的正应力和剪应力; $m_i(x, a)$ ($i = 1, 2$) 分别为 Bueckner 和 Rice I, II 型权函数,可通过参考载荷作用下同一裂纹体的参考应力强度因子 $K_{i,r}(a)$ 和参考位移 $U_{i,r}(x, a)$ ($i = 1, 2$), 用下式求得

$$m_i(x, a) = \frac{E}{K_{i,r}(a)} \frac{\partial U_{i,r}(x, a)}{\partial a} \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

式中: E 为弹模,对平面应力, $E = E$, 平面应变, $E = E/(1-\nu)$; ν 为泊松比。由于权函数仅与裂纹体几何性质有关,而与载荷无关,因此,可以从某一简单载荷(如均布载荷)下求出裂纹体的权函数,再应用于复杂加载条件。从式(1)不难看出权函数的物理意义,它相当于裂纹面上的一对单位集中力产生的应力强度因子, $m_i(x, a)$ 相当于 Green 函数,所以权函数法有时也称为 Green 函数法。对于图 1 所示的中心裂纹巴西试样,可利用无裂纹圆盘直径线上应力的 Edlac 解^[5],

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2P}{\pi R} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{[1 - (\rho/R) \cos \theta] \sin^2 \theta}{[1 + (\rho/R)^2 - 2(\rho/R) \cos \theta]^2} - \frac{[1 + (\rho/R) \cos \theta] \sin^2 \theta}{[1 + (\rho/R)^2 + 2(\rho/R) \cos \theta]^2} \right\} \quad (3a)$$

1999年6月14日收到初稿,1999年7月28日收到修改稿。

* 高等学校博士点专项基金(98053318)资助。

作者陈枫简介:男,1949年生,1981年毕业于中南工业大学固体力学系,1989年赴瑞典皇家工学院固体力学系工作,高级访问学者,现为副教授,在职博士生,主要从事岩石强度与断裂,边界元和权函数方法在断裂力学中的应用等方面的研究工作。

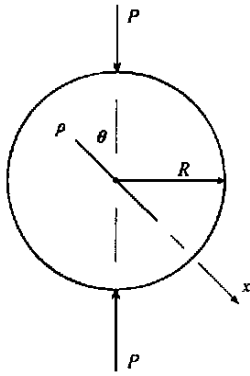


图 1 中心裂纹巴西试样的几何形状

Fig 1 Geometry of central cracked Brazilian specimen

$$\sigma_{\theta} = \frac{2P}{\pi R} \left\{ \frac{[1 - (\rho/R)\cos\theta(\cos\theta - \rho/R)]\sin\theta}{[1 + (\rho/R)^2 - 2(\rho/R)\cos\theta]^2} + \frac{(1 + (\rho/R)\cos\theta)(\cos\theta + \rho/R)\sin\theta}{[1 + (\rho/R)^2 + 2(\rho/R)\cos\theta]^2} \right\} \quad (3b)$$

将式(3a), (3b)展开为 ρ/R 的幂级数:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{\pi R} \sum_{i=1}^n A_i(\theta) (\rho/R)^{2i-2} \quad (4a)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{2P\sin\theta}{\pi R} \sum_{i=1}^n B_i(\theta) (\rho/R)^{2i-2} \quad (4b)$$

式中: P 为单位厚度上的集中力, 角常数 $A_i(\theta)$, $B_i(\theta)$ 的前 5 项列于表 1 中。

表 1 公式(4)中 $A_i(\theta)$, $B_i(\theta)$ 的前 5 项^[5]
 Table 1 The first five coefficients $A_i(\theta)$, $B_i(\theta)$ for formula (4)^[5]

A_1 $1 - 4s^2$	B_1 1
A_2 $8s^2(1 - 4c^2)$	B_2 $-5 + 8c^2$
A_3 $-4s^2(3 - 36c^2 + 48c^4)$	B_3 $-3 + 8(1 - 2c^2)(2 - 3c^2)$
A_4 $-16s^2(-1 + 24c^2 - 80c^4 + 64c^6)$	B_4 $3 + 16(1 - 2c^2) - 12(1 - 2c^2)^2 - 32(1 - 2c^2)^3$
A_5 $-20s^2(1 - 40c^2 + 240c^4 - 448c^6 + 256c^8)$	B_5 $5 - 16(1 - 2c^2) - 60(1 - 2c^2)^2 + 32(1 - 2c^2)^3 + 80(1 - 2c^2)^4$

注: $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$

应力的前 5 项级数近似解绘于图 2 中, 可以看出 5 项级数近似已相当接近于解析解, 因此, 取该级数的前 5 项来推导对径加载下中心裂纹巴西试样应力强度因子的权函数解。

3 巴西圆盘试样对径加载下的权函数分析

3.1 I 型裂纹权函数及应力强度因子

由式(2)可知, Bueckner-Rice 权函数可以通过参考载荷下的应力强度因子和位移场求得, 通常选择最简单的裂纹面均布载荷(见图 3(a), 3(b)), 分别获得 I, II 型权函数。

图 3(c)中 A 为裂纹半长, 引入无量纲量 $a =$

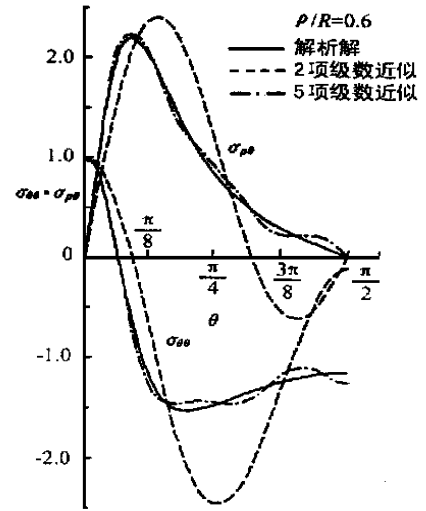


图 2 无裂纹圆盘内应力分布的比较

Fig 2 Comparison of stress distribution in the uncracked disk for $\rho/R = 0.6$

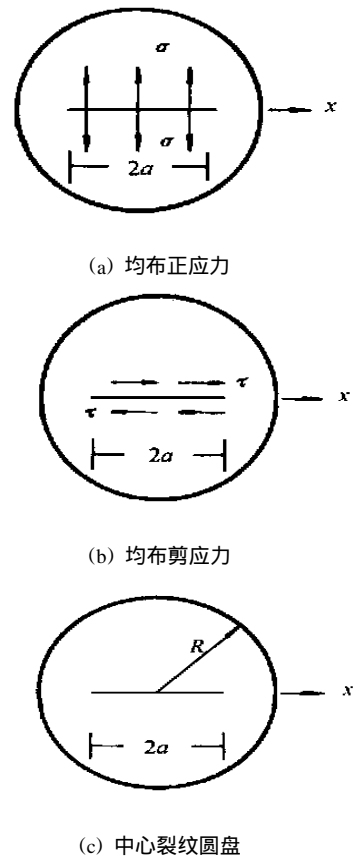


图 3 中心裂纹巴西试样及 I, II 型参考载荷
 Fig 3 Center-cracked Brazilian specimen and reference loads of model I and II

A/R , $x = X/R$, 对图 3(a) 和 3(b) 用有限元法计算不同裂纹长度 a 时的无量纲 I, II 型参考应力强度因子 $f_{i,r}(a)$ ($i = 1, 2$)。对于 I 型权函数, 采用文 [6] 的方法, 先将所得结果及 $a = 1$ 时的极限值, $2/\sqrt{(\pi^2 - 4)(1 - a)} = 0.826/\sqrt{1 - a}$, 拟合如下多项式^[6]:



$$f_{1,r}(a) = K_{1,r}(a) / \sigma \sqrt{\pi a R} = \sum_{i=1}^8 \alpha_i a^{i-1} / \sqrt{1-a} \quad (5)$$

式中: 系数 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 分别为 1.0000, -0.4963, 1.5581, -3.1816, 10.0961, -20.7782, 20.7781, -7.5066。在 σ 作用下, 图 3(a) 中裂纹面 I 型参考位移场 $u_{11,r}$ 为

$$u_{11,r}(x, a) = \frac{\sigma a^2}{E} \sum_{j=1}^2 F_j(a) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{i-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

式中: 系数 F_1, F_2 可用裂纹尖端张开位移和自相似条件确定如下:

$$F_1(a) = 2f_{1,r}(a), F_2(a) = \frac{16}{3} [\Phi(a) - f_{1,r}(a)/2]$$

$$\Phi(a) = \frac{1}{a^2} \int_0^a [s f_{1,r}(s)] ds = -\frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \left[\sum_{k=2}^{i+j} \frac{\alpha_k - 1}{k-1} \ln(1-a) \right]$$

将式(5), (6)代入式(2)得中心裂纹巴西圆盘的 I 型权函数:

$$m_1(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sum_{i=1}^3 \beta_i(a) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{i-\frac{3}{2}} \quad (7)$$

式中: $\beta_1(a) = 2,$

$$\beta_2(a) = [2a f_{1,r}(a) + 3F_2(a)] / f_{1,r}(a),$$

$$\beta_3(a) = [a F_2(a) - 2F_2(a)] / f_{1,r}(a).$$

对式 4(a) 作坐标变换: $\rho/R = X/R = x$, 取前 5 项, 得无量纲 I 型裂纹面应力:

$$\sigma_{11}(x) = \frac{\sigma_0}{P/\pi R} = \sum_{i=1}^5 A_i(\theta) x^{2i-2} \quad (8)$$

将式(7), (8)代入式(1), 得中心裂纹巴西试样对径加载下的 I 型应力强度因子:

$$f_{1,r}(a, \theta) = K_{1,r} / \sigma_0 \sqrt{\pi a R} = \int_0^a \sigma_{11}(x) m_1(x, a) dx =$$

$$\frac{1}{\pi a} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 A_i(\theta) B_j(a) \int_0^a x^{2i-2} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{i-\frac{3}{2}} dx \quad (9)$$

式中: $\sigma_0 = \frac{P}{\pi a R}$, P 为单位厚度上的集中力。不同裂纹长度 a 的 β 系数列于表 2。

公式(9)即为 I 型应力强度因子的权函数解, 它是裂纹倾角 θ 和长度 a 的函数。

3.2 II 型权函数及应力强度因子

类似地, 选择图 3(b) 所示的均布剪应力为参考载荷, 将不同裂纹长度 a 的 II 型应力强度因子的有限元解拟合成下列多项式:

$$f_{2,r}(a) = \sum_{i=1}^5 \alpha_i a^{i-1} / \sqrt{1-a} \quad (10)$$

式中: $\alpha_i (i=1, 2, \dots, 5)$ 分别为 1, -0.5, 0.9273, -0.8841, 0.2823, 而 II 型参考位移场则拟合为

$$u_{12,r}(x, a) = \frac{2\tau a^2}{E} \sum_{j=1}^2 G_j(a) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{j-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

将式(10), (11)代入式(2)得 II 型权函数:

$$m_2(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sum_{i=1}^3 \gamma_i(a) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{i-3/2} \quad (12)$$

不同 a 时的 γ_i 系数列于表 3。

同样地, 对式(4b)作坐标变换: $\rho/R = X/R = x$, 取前 5 项, 得裂纹面无量纲剪应力:

$$\sigma_{12}(x) = \frac{\sigma_0}{P/\pi R} = 2 \sin 2\theta \sum_{i=1}^5 B_i(\theta) X^{2i-2} \quad (13)$$

将式(12), (13)代入式(1)得中心裂纹巴西试样对径加载下的 II 型应力强度因子计算公式:

$$f_{2,r}(a, \theta) = K_{2,r} / \sigma_0 \sqrt{\pi a R} = \int_0^a \sigma_{12}(x) m_2(x, a) dx =$$

表 2 不同裂纹长度 a 时的 β 系数

Table 2 The coefficients β for different crack length a

a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\beta_1(a)$	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
$\beta_2(a)$	0.0627	0.2389	0.5267	0.9218	1.4319	2.1050	3.0622	4.6191
$\beta_3(a)$	0.0002	0.0027	0.0186	0.0680	0.1587	0.7450	0.3906	0.4531

表 3 不同裂纹长度 a 时的 γ_i 系数

Table 3 The coefficients γ_i for different crack length a

a	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\gamma_1(a)$	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
$\gamma_2(a)$	0.0103	0.0405	0.1568	0.3476	0.6229	1.0135	1.5905	2.5196	4.2527
$\gamma_3(a)$	0.0049	0.0199	0.0816	0.1943	0.3777	0.6710	1.1509	1.9818	3.5896

$$\sum_{j=1}^3 B_j(\theta) Y_j(a) \int_0^a x^{2j-2} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right) \right]^{j-3/2} dx \quad (14)$$

式中: $\sigma_0 = P/\pi aR$ 。显然 f_{II} 也是裂纹倾角 θ 和长度 a 的函数, 不同裂纹倾角的无量纲应力强度因子 f_I 和 f_{II} 分别绘于图 4(a) 和 4(b) 中。图中黑点为 Atkinson 数值解。图 5(a) 和 5(b) 分别为裂纹长度 $a = 0.5$ 时 I, II 型应力强度因子 f_I, f_{II} 随裂纹倾角 θ 的变化, 图中黑点为 Atkinson 数值解, 可以看到, 本文的权函数解与数值结果相当一致。

4 结 论

本文的巴西圆盘试样的半解析权函数解与数值解十分吻合, 得到的无量纲应力强度因子 f_I, f_{II} 可方便地用来计算实际加载下的复合型应力强度因子。

只要查到相应的 f_I, f_{II} 系数和单位厚度上的集中力 P 。从图 5 可见, 当裂纹长度一定, 如 $a = 0.5$ 时, f_I 随裂纹倾角增大而减小。在 $\theta = 25^\circ$ 左右时, $f_I = 0$, 此后随 θ 增加, f_I 变为负值, 此仅说明裂纹在 25° 左右时将发生闭合, 因此, 压剪时的 K_I 计算公式应有一定的适用范围。对于中心裂纹, θ 约小于 25° ; 且随裂纹长度不同而略有不同。许多文献在计算压剪应力强度因子时没有这一限制, 因而得到的断裂准则曲线向负 K_I 方向张开, 类似于莫尔强度曲线, 如文 [2], 这显然是不妥的。因为若闭合, 则裂纹面将引入摩擦力, 应力强度因子必须按另外公式计算。实际上, 对脆性岩石, 通常在裂纹闭合前就发生破裂。这是与拉剪加载不同的地方。 f_{II} 则从 0 增加到最大值, 在 $\theta = 90^\circ$ 又降为 0, f_{II} 取最大值时 f_I 为 0, 这一结果也与作者在研究压缩载荷下裂纹扩展时的结论完全相同^[7]。

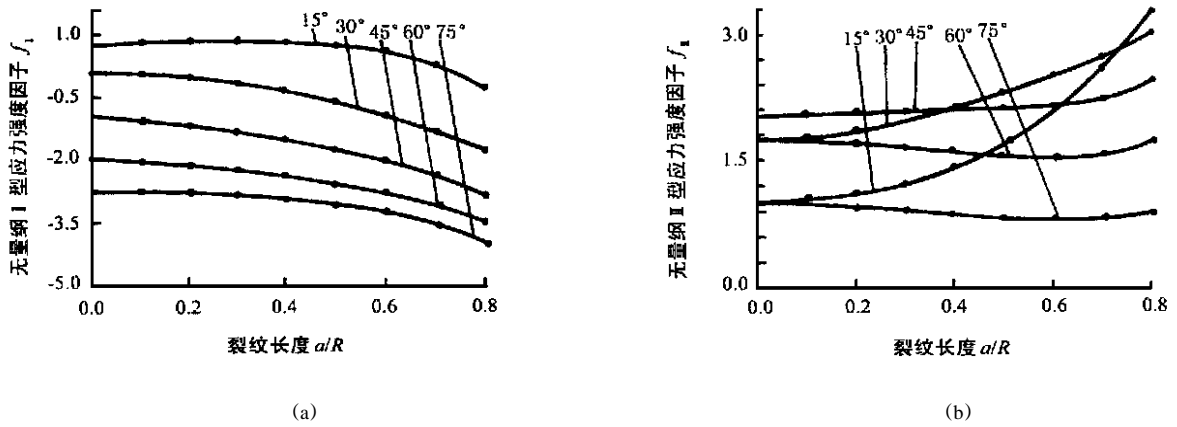


图 4 无量纲应力强度因子随裂纹长度的变化

Fig 4 Normalized stress intensity factors vs crack length

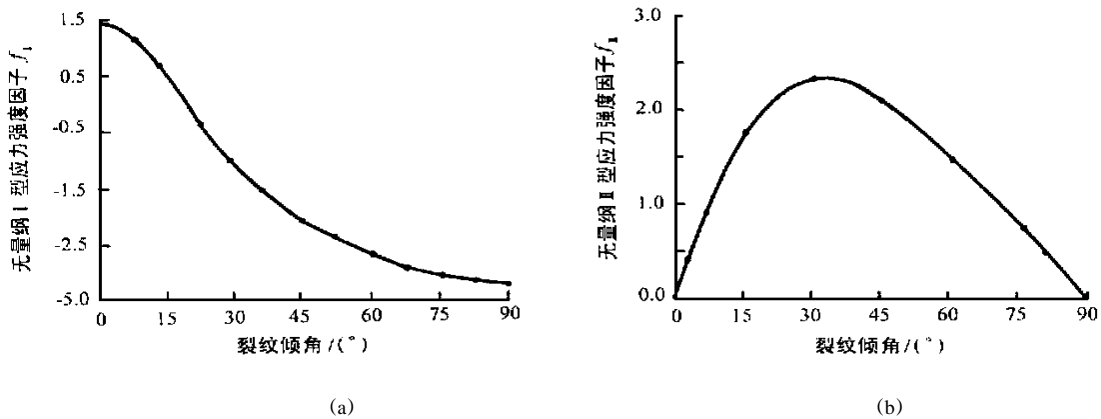


图 5 无量纲应力强度因子随裂纹倾角 θ 的变化 ($a = 0.5$)

Fig 5 Normalized stress intensity factors vs inclined angle θ of crack ($a = 0.5$)

参 考 文 献

- 1 周群力, 余泳琼, 王良之. 岩石压剪断裂核的试验研究[J]. 固体力学学报, 1996, 12(4): 329~ 336
- 2 傅 钢, 李 贺, 鲜学福等. 压剪应力状态下脆性岩石复合断裂准则的研究[J]. 重庆大学学报, 1990, 13(2): 68~ 73
- 3 Bueckner H F. A novel principle for the computation of stress intensity factors [J]. Zeitschrift Angew Mathematik und Mechanik, 1970, 50(5): 529~ 546
- 4 Rice J R. Some remarks on elastic crack-tip stress fields[J]. Int. J. of Solids and Structure, 1972, 8(7): 751~ 758
- 5 Atkinson C, Smelser R E, Sanchez J. Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test[J]. Int. J. of Fract. 1982, 18(2): 279~ 291
- 6 Wu X R, Carlsson A J. Weight function and stress intensity factor solutions[M]. New York: Pergamon Press, 1991
- 7 Chen Feng, Sun Zongqi. A crack closure model for brittle fracture subjected to compression-shear loading [J]. Trans Nonferrous Met. Soc. China 1999, 2(1): 54~ 60

WEIGHT FUNCTION SOLUTION FOR CENTER-CRACKED BRAZILIAN DISK SPECIMEN SUBJECTED TO UNIAXIAL COMPRESSION

Chen Feng, Sun Zongqi, Xu Jicheng

(Opening Lab of Mechanics, Testing Center of The Central South University of Technology, Changsha 410083 China)

Abstract The mixed-mode fracture of center-cracked Brazilian disk specimen subjected to diametral compression is analysed by weight function method. Wu-Carlsson semi-analytical weight function and Edlcrack crack line stress are used in the present derivation of stress intensity factor formula. The results are in good agreement with Atkinson numerical solutions. Since the disk specimen can be made directly using rock core and the mixed-mode loading with any ration of K_I to K_{II} can be easily obtained by changing inclined angle of crack with respect to load line, the proposed procedure is very useful in the study of rock fracture strength and mixed-mode fracture criterion.

Key words Brazilian disk specimen, compression, mixed-mode fracture, weight function

新书简介

《21 世纪高层建筑基础工程》一书由史佩栋, 高大钊, 钱力航主编, 中国建筑工业出版社近期出版。

该书收入了最近我国土木工程界的一次跨部门、跨系统、跨学会的高层次学术盛会——“21 世纪高层建筑基础工程学术研讨会”(2000 年 7 月 27 日~ 30 日, 昆明)的 133 篇报告和论文, 其中包括: 科技发展水平综述报告 1 篇; 主题报告 8 篇; 设计理论、分析与计算 21 篇; 桩基础 46 篇; 基坑工程 26 篇; 大体积混凝土施工 3 篇; 工程监理 5 篇; 试验研究与检测 9 篇; 场地评价与抗震分析 6 篇; 工程事故分析与处理 5 篇; 地下空间开发利用 3 篇。上述内容涵盖了高层建筑基础工程学科领域的各个方面。有许多篇章精辟地反映了 20 世纪本学科在理论研究、工程实践和室内外试验等方面的发展历程和现状, 以及当前的前沿水平和热点难点问题。

此外, 该书还收入了我国当代高层建筑基础工程科技领域乃至土力学和岩土工程学科的著名专家学者、学科新秀和学术活动的积极参与者共 61 位的近照和传略。

该书可供从事土木建筑工程设计、施工、勘察、监理、质量监督和理论研究工作的科技人员、政府主管部门领导、高校高年级学生、研究生以及房地产开发商的管理者和决策者阅读参考。全书共 130 万字。建设部叶如棠副部长题写了书名, 中国科学院孙钧院士作序。

需要购买本书者可与浙江泛华勘察总工办张美珍同志联系, 每册 73.00 元, 加邮资(15%)11.00 元, 共 84.00 元。

联系地址: 杭州市莫干山路 100 号 耀江国际大厦 A 座 4 层

邮 编: 310005; 电 话: 0571-8806868—287