

多变量灰色系统预测模型在深基坑围护结构 变形预测中的应用

冯志, 李兆平, 李 玮

(北京交通大学 土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘要: 深基坑围护桩体上各监测点之间的变形是相互影响的, 在现代信息化施工过程中, 对围护桩体变形的预测应该考虑到监测点之间的相关信息, 应该从变形观测系统的高度统一来描述变形体的整体变形趋势和变形规律, 从整体上对变形观测的数据进行正确的处理, 建立合理的模型, 对变形值作出准确的预报。基于这一思想, 通过对传统的单点 GM(1, 1)模型的扩展, 考虑 n 个点之间相互关联和影响, 以 MATLAB 语言编程, 实现对变形体上相互关联的多点变形预测模型的建模和预测, 并运用该模型对北京市地铁奥运支线深基坑的围护桩变形进行预测。研究表明, 预测值与实测值吻合较好, 能够更为准确地预测出后续施工过程中围护桩体的水平位移, 在指导该工程信息化施工和规避工程风险等方面起到积极的作用。同时通过与传统 GM(1, 1)模型预测结果比较, 证明了多变量灰色系统预测模型具有更高的准确性, 显示了该方法进行深基坑变形预测的有效性。

关键词: 土力学; 灰色系统; 多变量灰色预测; 深基坑; 围护结构

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2007)增2 - 4319 - 06

APPLICATION OF A MULTI-POINT GREY MODEL TO DEFORMATION PREDICTIN OF SUPPORTING STRUCTURE FOR DEEP PIT

FENG Zhi, LI Zhaoping, LI Yi

(School of Civil Engineering and Architecture, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: During the information construction times, with the aim of accurately predicting the deformation of supporting piles, the correlations between the measurement points in supporting piles should be taken into account in predicting the deformation of supporting structure for deep pit excavations; and the analysis of monitoring data and establishment of a proper model should be performed on the basis of the deformation behavior of the entirely deformed system; and because deformation of one measuring point has an influence on another in the same supporting pile of deep pit. Based on such concept, a single deformation prediction model is extended into a multi-point model and coded with MATLAB. A multi-point prediction model is established, and its application to a case study is presented to verify the multi-point model. The results indicate that the proposed model is effective for predicting the deformation of supporting structures for deep excavations, more effective than the grey prediction model GM(1, 1) for information construction of the engineering.

Key words: soil mechanics; grey system; multi-point grey prediction model; deep foundation pit; supporting structure

收稿日期: 2006 - 07 - 21; **修回日期:** 2006 - 10 - 14

作者简介: 冯志(1979 -), 男, 2004年毕业于北京交通大学土木工程专业, 现为硕士研究生, 主要从事隧道与岩土工程方面的研究工作。E-mail: sun_alive@126.com

1 引言

深基坑工程中的围护结构变形是引起深基坑工程事故的主要因素。目前，基坑设计时主要采用 m 法和有限元^[1, 2]等方法进行变形估算，但由于理想模型与实际工况的差别以及计算参数难以正确确定等因素的影响，使得计算得到的变形值与实际变形值相差较大。因此，至关重要的是寻求一种对基坑变形更为有效的预测方法，能根据现场前期监测系统的实测信息，预测下一阶段施工中可能出现的新动态，为施工期间的优化设计和合理施工提供可靠信息。

目前所采用的预测模型和方法多种多样，主要有：传统灰色预测、时间序列分析(如 AR 法、ARMA 法、NAR 法、TAR 法、NARMA 法和 SMD 法等，这些方法本质上都属于回归分析的范畴)和将人工神经网络的非线性映射能力和遗传算法的全局随机搜索能力相结合的遗传 - 神经网络方法等。但这些方法大多局限于单点建模和预测，即取围护结构中一点的初期实测变形数据来建立模型，以此得到对该点后续变形的预测，这种预测模型无法顾及到监测点之间的相互影响，其仅仅是一种对变形体的局部变形研究，没有充分利用监测点之间的相关信息^[3~6]。实际上，在采用以钻孔灌注桩为围护结构的深基坑工程中，同一根围护桩体上监测点的变形发生都不是孤立的(见图 1)，它要受到此桩上其他监测点的影响，同时它也在影响着其他监测点的变形，所以应该从变形观测系统的高度统一来描述变形体的整体变形趋势和变形规律，从整体上对变形观测的数据进行正确的处理，建立合理的模型，对变形值作出准确预报。本文介绍的多变量灰色预测模型便是以此思想为出发点，在传统 GM(1, 1)模型的基础上，考虑 n 个点之间相互关联和相互影响，通过扩展，建立 n 元一阶常微分方程组，以 MATLAB 软件为计算平台，导出多变量灰色模型，进而实现了空间相互影响的多点变形预测模型的建模和预测。该多变量灰色系统预测模型已经应用于北京地铁奥运支线的奥体中心站及熊奥地铁区间深基坑围护结构变形预测中。根据北京熊奥地铁区间段深基坑的围护桩前期施工的实时监测数据，建立多变量灰色预测模型，准确地预测出后续施工过程中围护

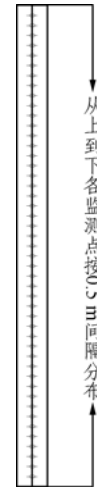


图 1 围护桩上监测点的分布示意图

Fig.1 Layout of measured points above protection piles

桩体的水平位移，这对指导工程信息化施工、规避工程风险等方面起到积极的作用。

本文将结合北京熊奥地铁区间工程，以同一围护桩上连续 3 个监测点的初期实测变形数据为基准，分别采用多变量灰色模型和传统的 GM(1, 1)模型来进行建模和预测，并以工程实测数据验证了在深基坑围护结构的变形预测中多点灰色预测模型的预测要更优于传统的单点 GM(1, 1)模型的预测，是解决深基坑变形预测的有效方法。

2 多变量灰色系统模型的建立

设某变形体有 n 个相互关联的变形观测点，获得了 m 个周期的变形观测资料，其相应的变形观测序列为 $\{x_i^{(0)}(k)\}$ ($k=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, n$)，其一次累加生成序列为 $x_i^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^k x_i^{(0)}(j)$ ($k=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, n$)。

考虑 n 个点相互关联和相互影响，对此生成序列建立 n 元一阶常微分方程组^[7, 8]：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1^{(1)}(t)}{dt} &= a_{11}x_1^{(1)}(t) + a_{12}x_2^{(1)}(t) + \dots + a_{1n}x_n^{(1)}(t) + b_1 \\ \frac{dx_2^{(1)}(t)}{dt} &= a_{21}x_1^{(1)}(t) + a_{22}x_2^{(1)}(t) + \dots + a_{2n}x_n^{(1)}(t) + b_2 \\ &\vdots \\ \frac{dx_n^{(1)}(t)}{dt} &= a_{n1}x_1^{(1)}(t) + a_{n2}x_2^{(1)}(t) + \dots + a_{nn}x_n^{(1)}(t) + b_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)写成矩阵形式为

$$\frac{dx_1^{(1)}(t)}{dt} = AX^{(1)}(t) + B \quad (2)$$

其中,

$$X^{(1)}(t) = \{x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), x_3^{(1)}(t), \dots, x_n^{(1)}(t)\}^T$$

由积分生成变换原理, 对式(2)两边左乘 e^{-At} 可得

$$e^{-At} \left(\frac{dx_1^{(1)}}{dt} - AX^{(1)} \right) = e^{-At} B$$

在区间 $[0, t]$ 上积分, 整理后有

$$X^{(1)}(t) = e^{-At}(X^{(1)}(0) + A^{-1}B) - A^{-1}B \quad (3)$$

式(3)即为生成序列模型的一般形式。

为求模型参数 A 和 B , 通过对式(1)离散化, 并由最小二乘法得到估值:

$$H = (L^T L)^{-1} L^T Y \quad (4)$$

其中,

$$L = \begin{bmatrix} \hat{x}_1^{(1)}(2) & \hat{x}_2^{(1)}(2) & \dots & \hat{x}_n^{(1)}(2) & 1 \\ \hat{x}_1^{(1)}(3) & \hat{x}_2^{(1)}(3) & \dots & \hat{x}_n^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{x}_1^{(1)}(m) & \hat{x}_2^{(1)}(m) & \dots & \hat{x}_n^{(1)}(m) & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) & x_2^{(0)}(2) & \dots & x_n^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) & x_2^{(0)}(3) & \dots & x_n^{(0)}(3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(0)}(m) & x_2^{(0)}(m) & \dots & x_n^{(0)}(m) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\hat{x}_i^{(1)}(k) = \frac{1}{2} (\hat{x}_i^{(1)}(k) + \hat{x}_i^{(1)}(k+1)) \quad (7)$$

$(i = 1, 2, \dots, n; k = 2, 3, \dots, m)$

由式(6)可得

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

将式(3)写成离散形式的模型:

$$\hat{x}^{(1)}(k) = e^{A(k-1)}(\hat{x}^{(1)}(1) + A^{-1}B) - A^{-1}B \quad (9)$$

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

模型的平均拟合精度为

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n V_i^T V_i}{nm} \quad (11)$$

其中,

$$V_i = \{v_i(1), v_i(2), \dots, v_i(m)\}^T$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m)$$

$$v_i(k) = x_i^{(0)}(k) - \hat{x}_i^{(0)}(k)$$

3 单点和多变量预测模型在工程实例中的对比分析

北京市地铁十号线熊奥地铁区间工程, 采用明挖法施工, 并以 $\phi 800 \text{ mm} @ 1400$ 的钻孔灌注桩为基坑围护结构(见图 2), 基坑开挖深度最深为 20 m。由于该工程所处地质条件较为复杂, 基坑开挖深。为确保结构及周围建筑物的安全, 进行基坑的变形预测, 除了指导安全施工外, 还可验证、改正设计。



图 2 钻孔灌注桩分布图
Fig.2 Layout of cast-in-place piles

围护桩桩体的水平位移采用 CX-01 型测斜仪进行监测, 将测斜管绑扎在桩的钢筋笼上, 通过测斜探头的倾角变化而推算桩体的倾斜变位。

以图 2 中所取的围护桩上间隔为 0.5 m 的相邻 3 个监测点(见图 3)的同时期实测位移数据为基准, 通过对原始数据进行比较、筛选取得 3 组具有代表性且真实反应基坑变形规律的原始数据列, 建立多变量预测模型。

3.1 多变量模型建立及预测结果分析

取多点变形数 $n = 3$, 原始数据以 4 d 为一个周期, 总共采用 $m = 10$ 个周期的累积位移值序列, 其中前 8 个周期用来建模, 后 2 个周期用来检验预测值的准确性。其位移原始观测序列为



图3 模型中所取的3个相邻监测点示意图

Fig.3 Schematic diagram of three adjacent measuring points used in model

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 5.35 & 5.91 & 6.41 \\ 8.48 & 9.29 & 10.07 \\ 12.77 & 13.67 & 14.52 \\ 15.10 & 16.23 & 17.28 \\ 17.87 & 19.00 & 20.05 \\ 19.66 & 20.84 & 21.84 \\ 22.30 & 23.33 & 24.28 \\ 24.32 & 25.39 & 26.34 \\ 26.10 & 27.22 & 28.15 \\ 28.90 & 29.35 & 30.40 \end{bmatrix}$$

按本文的计算步骤，得到模型参数 A, B 为

$$A = \begin{bmatrix} 23.474 & 4 & -51.194 & 1 & 27.751 & 2 \\ 26.125 & 7 & -56.872 & 6 & 30.772 & 8 \\ 28.876 & 3 & -62.638 & 2 & 33.790 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6.674 & 8 \\ 7.382 & 2 \\ 8.108 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}^{(1)}(1) = \begin{bmatrix} 5.35 \\ 5.91 \\ 6.41 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}^{(1)}(1) + A^{-1}B = \begin{bmatrix} 8.611 & 7 \\ 9.131 & 3 \\ 9.834 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \begin{bmatrix} 8.611 & 7 \\ 9.131 & 3 \\ 9.834 & 0 \end{bmatrix} e^{A(k-1)} - \begin{bmatrix} 8.611 & 7 \\ 9.131 & 3 \\ 9.834 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(k = 1, 2, \dots, m)$$

由此求得一次累加序列的预测值为

$$\hat{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5.350 & 0 & 5.910 & 6.410 \\ 14.502 & 0 & 15.870 & 17.155 \\ 26.768 & 0 & 29.113 & 31.319 \\ 41.978 & 0 & 45.412 & 48.621 \\ 59.798 & 0 & 64.369 & 68.606 \\ 79.836 & 0 & 85.530 & 90.766 \\ 101.792 & 0 & 108.550 & 114.728 \\ 125.649 & 0 & 133.406 & 140.474 \\ 151.889 & 0 & 160.622 & 168.588 \\ 181.718 & 3 & 191.511 & 200.499 \end{bmatrix}$$

此多点变形的预测与实测序列见表1。

3.2 GM(1, 1)模型预测结果分析

取 $x^{(0)}$ 中的原始数据序列，按照GM(1, 1)^[9~11] 建立模型，可得

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}_1^{(1)}(k) &= \left(x_1^{(0)}(1) - \frac{u_1}{a_1} \right) e^{-a_1 k} + \frac{u_1}{a_1} = \\ & 71.21e^{0.1419k} + 65.86 \\ \hat{s}_2^{(1)}(k) &= \left(x_2^{(0)}(1) - \frac{u_2}{a_2} \right) e^{-a_2 k} + \frac{u_2}{a_2} = \\ & 80.9e^{0.1357k} + 74.999 \\ \hat{s}_3^{(1)}(k) &= \left(x_3^{(0)}(1) - \frac{u_3}{a_3} \right) e^{-a_3 k} + \frac{u_3}{a_3} = \\ & 90.76e^{0.1301k} + 84.35 \\ \hat{s}_i^{(0)}(k) &= \hat{s}_i^{(1)}(k+1) - \hat{s}_i^{(1)}(k) \\ & (i=1, 2, 3; k=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} (12)$$

GM(1, 1)模型的预测与实测值序列见表2。分别取多点模型与GM(1, 1)模型中的第2序列作预测与实测比较图(见图4, 5)。

从图4, 5及表1, 2的比较结果可以看出，多点模型要比GM(1, 1)的预测值更接近于实测值，从而说明多点模型更精确、更有效。

表 1 多点模型的预测与实测值序列

Table 1 Comparison between results from multi-point model prediction and those of actual measurements

序号 k	预测序列/mm			实测值序列/mm			残差序列/mm		
	$\hat{x}_1^{(0)}(k)$	$\hat{x}_2^{(0)}(k)$	$\hat{x}_3^{(0)}(k)$	$x_1^{(0)}(k)$	$x_2^{(0)}(k)$	$x_3^{(0)}(k)$	$v_1(k)$	$v_2(k)$	$v_3(k)$
1	5.35	5.91	6.41	5.35	5.91	6.41	0.00	0.00	0.00
2	9.15	9.96	10.75	8.48	9.29	10.07	-0.67	-0.67	-0.68
3	12.27	13.24	14.16	12.77	13.67	14.52	0.50	0.43	0.36
4	15.21	16.30	17.30	15.10	16.23	17.28	-0.11	-0.07	-0.02
5	17.82	18.96	19.98	17.87	19.00	20.05	0.05	0.04	0.07
6	20.04	21.16	22.16	19.66	20.84	21.84	-0.38	-0.32	-0.32
7	21.96	23.02	23.96	22.30	23.33	24.28	0.34	0.31	0.32
8	23.86	24.86	25.75	24.32	25.39	26.34	0.46	0.53	0.59
9	26.24	27.22	28.11	26.10	27.22	28.15	-0.14	0.00	0.04
10	29.83	30.89	31.91	28.90	29.35	30.40	-0.93	-1.54	-1.51

注: 此多变量模型的平均拟合精度为: $\sigma^2 = 0.3$.

表 2 GM(1, 1)模型的预测与实测值序列

Table 2 Comparison between single point model prediction and those of actual measurements

序号 k	预测序列/mm			实测值序列/mm			残差序列/mm		
	$\hat{s}_1^{(0)}(k)$	$\hat{s}_2^{(0)}(k)$	$\hat{s}_3^{(0)}(k)$	$x_1^{(0)}(k)$	$x_2^{(0)}(k)$	$x_3^{(0)}(k)$	$v_1(k)$	$v_2(k)$	$v_3(k)$
1	5.35	5.91	6.41	5.35	5.91	6.41	0.00	0.00	0.00
2	10.86	11.76	12.61	8.48	9.29	10.07	-2.38	-2.47	-2.54
3	12.51	13.47	14.36	12.77	13.67	14.52	0.26	0.20	0.16
4	14.42	15.43	16.36	15.10	16.23	17.28	0.68	0.80	0.92
5	16.62	17.67	18.63	17.87	19.00	20.05	1.25	1.33	1.42
6	19.04	20.12	21.11	19.66	20.84	21.84	0.62	0.72	0.73
7	22.19	23.29	24.28	22.30	23.33	24.28	0.11	0.04	0.00
8	25.44	26.54	27.53	24.32	25.39	26.34	-1.12	-1.15	-1.19

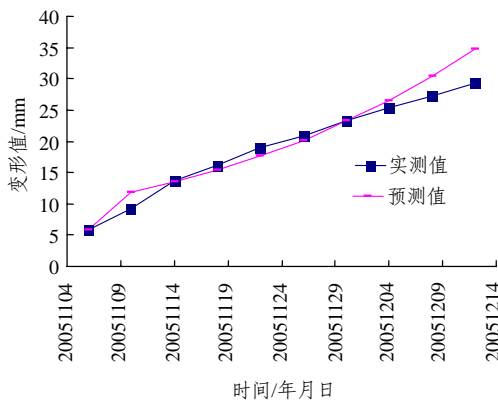


图 4 GM(1, 1)模型预测与实测值比较图

Fig.4 Comparison between single point model prediction curve and actual measurements

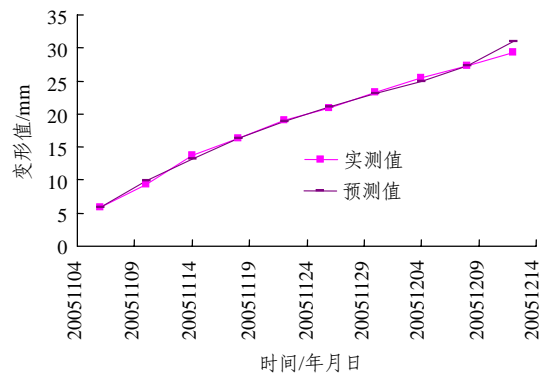


图 5 多变量灰色模型预测与实测值比较图

Fig.5 Comparison between multi-point model prediction curve and actual measurements

4 结 论

深基坑围护结构的变形具有其内在规律性,同时,又具有一定的随机性。深基坑监测时间序列蕴涵着系统的变形演化规律。通过上述的实例对比研究可以看出,多变量灰色预测系统能够克服目前众多预测模型中单点局部分析的不足,综合同一变形体上各监测点之间的相关信息,从整体上对变形观测的数据进行正确的处理,建立合理的模型,对变形发生的值作出准确的预报。随着监测新数据的不断补充,不断调整模型参数,实时建模,对下一时步进行预报。从北京熊奥地铁区间段的运用来看,预测值与实测值基本吻合,预测精度高,能满足工程要求,该方法是一种行之有效的深基坑变形预报方法。

参考文献(References):

- [1] 崔宏环, 张立群, 赵国景. 深基坑开挖中双排桩支护的三维有限元模拟[J]. 岩土力学, 2006, 27(4): 662 - 666.(CUI Honghuan, ZHANG Liqun, ZHAO Guojing. Numerical simulation of deep foundation pit excavation with double-row piles[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(4): 662 - 666.(in Chinese))
- [2] 刘 苹, 刘前曦. 考虑施工工况的深基坑计算方法及实例分析[J]. 结构工程师, 2003, 14(2): 41 - 45.(LIU Ping, LIU Qianxi. Computation method and case analysis of deep excavation considering construction steps[J]. Structural Engineers, 2003, 14(2): 41 - 45.(in Chinese))
- [3] 刘 榕, 李维滨, 梁培新. 深基坑工程信息化施工中的监测技术应用[J]. 建筑技术开发, 2005, 32(11): 114 - 115, 144.(LIU Rong, LI Weibin, LIANG Peixin. Monitoring in the communication construction of deep foundation pit[J]. Building Technique Development, 2005, 32(11): 114 - 115, 144.(in Chinese))
- [4] 袁金荣, 赵福勇. 基坑变形预测的时间序列分析[J]. 土木工程学报, 2001, 34(6): 55 - 59.(YUAN Jinrong, ZHAO Fuyong. Time series analysis in predicting deformation of foundation pit[J]. China Civil Engineering Journal, 2001, 34(6): 55 - 59.(in Chinese))
- [5] 刘勇健, 李彰明, 张建龙, 等. 基于遗传 - 神经网络的深基坑变形实时预报方法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(6): 1 010 - 1 014.(LIU Yongjian, LI Zhangming, ZHANG Jianlong, et al. Real time prediction method based on genetic algorithm and neural network for deformation caused by deep excavation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(6): 1 010 - 1 014.(in Chinese))
- [6] 陶 津, 刘 燕, 贺可强. 神经网络在深基坑工程变形预测中的应用研究[J]. 青岛理工大学学报, 2005, 26(6): 39 - 42.(TAO Jin, LIU Yan, HE Keqiang. Application of neural networks to deep foundation pit deformity prediction[J]. Journal of Qingdao Technological University, 2005, 26(6): 39 - 42.(in Chinese))
- [7] 潘国荣, 刘大杰. 顾及邻近点变形因素项的动态模型辨识与预测[J]. 测绘学报, 2001, 30(1): 32 - 35.(PAN Guorong, LIU Dajie. Dynamic modeling identification and predication in consideration of the adjacent point deformation[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2001, 30(1): 32 - 35.(in Chinese))
- [8] 王穗辉, 潘国荣. 基于 MATIAB 多变量灰色模型及其在变形预测中的应用[J]. 土木工程学报, 2005, 38(5): 24 - 27.(WANG Suihui, PAN Guorong. A MATIAB-based multi-variable grey model and its application to deformation prediction[J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(5): 24 - 27. (in Chinese))
- [9] 邓聚龙. 灰色系统理论教程[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990.(DENG Julong. Gray system theory tutorial[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1990.(in Chinese))
- [10] 邓聚龙. 灰色预测与决策[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1988.(DENG Julong. Grey prediction and decision[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1988.(in Chinese))
- [11] 王玲玲. 深基坑变形的灰色预测模型[J]. 华北水利水电学院学报, 1999, 20(3): 41 - 43.(WANG Lingling. Modeling deformation of deep excavation by grey system theory[J]. Journal of North China Institution of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 1999, 20(3): 41 - 43.(in Chinese))