

# 高湿度 $Q_2$ 黄土的非线性流变本构模型及参数

郭增玉<sup>1</sup> 张朝鹏<sup>2</sup> 夏旺民<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>西安理工大学岩土工程研究所 西安 710048) (<sup>2</sup>西安市政设计院 西安 710068)

**摘要** 为满足逆作法施工的宝鸡火车站地下商场工程设计与施工分析的需要,根据土的非线性流变理论,通过对工程所在场地的室内单轴和三轴流变试验,建立了高湿度  $Q_2$  黄土的非线性流变本构模型,并确定了相应的模型参数。

**关键词** 高湿度,黄土,非线性,流变模型,参数

**分类号** TU 444

**文献标识码** A

**文章编号** 1000-6915(2000)06-0780-05

## 1 引言

宝鸡火车站地下商场是首次在西北黄土地区推广逆作法施工的地下人防工程。该工程的设计主要采用工程类比法。为了进一步优化设计,更科学地组织施工,需要对原设计方案进行较深入的计算分析。工程经验表明:采用逆作法的地下结构稳定性和施工工效与施工过程中的时空分配合理性密切相关;高湿度  $Q_2$  黄土在施工开挖中具有明显的时效性质。有限元法是较好考虑这种时空分配的有效分析方法。为了进行有限元时空效应分析,本文的研究在于确定高湿度  $Q_2$  黄土的非线性流变本构模型和参数。

## 2 建模的基本理论依据

根据传统流变“模型理论”的构架,本文以室内土工试验成果加以补充修正的思路构造高湿度  $Q_2$  黄土的非线性流变本构模型。

确定新模型的基本出发点是将流变产生的总变形分解为线性流变和非线性流变两部分。前者用模型理论描述,后者用实验成果的经验模型描述,即

$$\epsilon_v = \epsilon_{l,v} + \epsilon_{n,v} \quad (1)$$

式中:  $\epsilon_v$  为粘性总应变;  $\epsilon_{l,v}$ 、 $\epsilon_{n,v}$  分别为粘性应变的线性部分和非线性部分。

对于粘弹性问题,流变方程可表示为

$$\epsilon_{ve} = \epsilon_{l,ve} + \epsilon_{n,ve} =$$

$$J_{l,ve}(t)\sigma + J_{n,ve}(t, \sigma)\sigma = J_{ve}(t, \sigma)\sigma \quad (2)$$

式中:  $\epsilon_{ve}$ 、 $\epsilon_{l,ve}$ 、 $\epsilon_{n,ve}$  分别为粘弹效应产生的总应变、线性粘弹性应变和非线性粘弹性应变;  $\sigma$  为当前应力;  $J_{l,ve}(t)$  为线性粘弹性蠕变柔量;  $J_{n,ve}(t, \sigma)$  为非线性粘弹性蠕变柔量;  $J_{ve}(t, \sigma)$  为粘弹性总的蠕变柔量。

对于粘塑性问题,流变方程可表示为

$$\begin{aligned} \epsilon_{vp} &= \epsilon_{l,vp} + \epsilon_{n,vp} = J_{l,vp}(t)(\sigma - \sigma_s) + \\ J_{n,vp}(t, \sigma - \sigma_s)(\sigma - \sigma_s) &= J_{vp}(t, \sigma - \sigma_s)(\sigma - \sigma_s) \end{aligned} \quad (3)$$

式中:  $\epsilon_{vp}$ 、 $\epsilon_{l,vp}$ 、 $\epsilon_{n,vp}$  分别为粘塑效应产生的总应变、线性粘塑性应变和非线性粘塑性应变;  $\sigma_s$  为材料的屈服强度;  $\sigma - \sigma_s$  为超过屈服强度的应力值,也称过应力;  $J_{vp}(t)$  为线性粘塑性蠕变柔量;  $J_{vp}(t, \sigma)$  为非线性粘塑性蠕变柔量;  $J_{n,vp}(t, \sigma)$  为粘塑性总的蠕变柔量。

对于粘弹塑性问题,流变方程可表示为

$$\begin{aligned} \epsilon_v &= \epsilon_{l,v} + \epsilon_{n,v} = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp} = (\epsilon_{l,ve} + \epsilon_{l,ve}) + \\ (\epsilon_{l,vp} + \epsilon_{n,vp}) &= (\epsilon_{l,ve} + \epsilon_{l,vp}) + (\epsilon_{n,ve} + \epsilon_{n,vp}) = \\ [J_{l,ve}(t)\sigma + J_{l,vp}(t)(\sigma + \sigma_s)] + \\ [J_{n,ve}(t, \sigma)\sigma + J_{n,vp}(t, \sigma - \sigma_s)(\sigma - \sigma_s)] \end{aligned} \quad (4)$$

式中: 各符号同式(1)~(3)符号。

## 3 粘弹性阶段流变的本构模型及参数

### 3.1 粘弹性流变阶段的本构模型

根据高湿度  $Q_2$  黄土的流变试验,其等时应力-应变曲线如图1。因非线性部分不明显,粘弹性流变

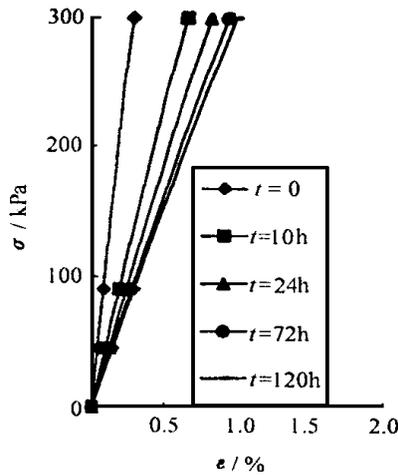


图 1 线性粘弹性等时应力-应变曲线

Fig 1 Isochronous stress-strain curves with linear visco-elasticity

可只考虑线性部分, 因此, 粘弹性流变阶段的本构模型可直接用模型理论来描述。

从线性粘弹性应力应变等时曲线的斜率可得到线性粘弹性模量  $E_{l, ve}(t)$  随时间变化的规律, 再由线性粘弹蠕变柔量  $J_{l, ve}(t)$  与线性粘弹性模量  $E_{l, ve}(t)$  互为倒数的关系可得到线性粘弹性蠕变柔量  $J_{l, ve}(t)$  随时间的变化规律, 如图 2, 3。

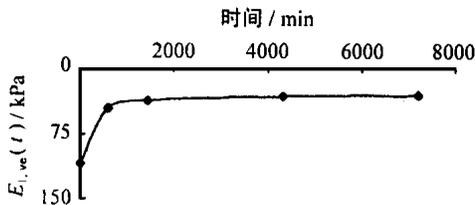


图 2 线性粘弹性模量  $E_{l, ve}(t)$  与时间  $t$  的关系

Fig 2 Relation of linear visco-elastic modulus  $E_{l, ve}(t)$  versus time  $t$

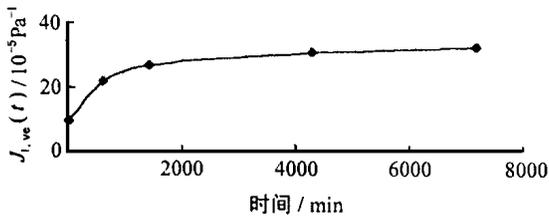


图 3 线性粘弹性蠕变柔量  $J_{l, ve}(t)$  与时间  $t$  的关系

Fig 3 Relation of linear visco-elastic creep flexibility  $J_{l, ve}(t)$  versus time  $t$

图示表明, 高湿度 Q<sub>2</sub> 黄土当应力较小时具有瞬时弹性和衰减稳定的蠕变特性。因此, 其本构模型可用一个 Hooke 元件与多个 Kelvin 元件串联组成的广义 Kelvin 模型较精确地表示, 即

$$\epsilon_{l, ve}(t) = \frac{\sigma}{E_H} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_{ki}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{ki}}{\eta_{ki}} t\right) \right] \sigma = j_{l, ve}(t) \sigma \quad (5)$$

式中:  $J_{l, ve}(t)$  为广义 Kelvin 模型的蠕变柔量, 即

$$J_{l, ve}(t) = \frac{1}{E_H} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_{ki}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{ki}}{\eta_{ki}} t\right) \right] \quad (6)$$

在广义 Kelvin 模型中, 串联的 Kelvin 元件个数  $N$  越多, 广义模型所描述的蠕变曲线越逼近实际的蠕变特性, 但是, 却带来了模型中待定参数增多的问题, 给实际应用带来较大不便。所以, 在选择  $N$  时, 既要考虑能比较准确地反映土的实际蠕变特性, 又要使模型中的待定参数尽可能少。借鉴以往经验<sup>[3]</sup>, 取  $N = 2$  一般可以满足应用。这里用一个 Hooke 元件和两个 Kelvin 元件串联组成的 5 参数广义 Kelvin 模型描述高湿度 Q<sub>2</sub> 黄土的线性粘弹性流变。

### 3.2 五参数广义 Kelvin 模型的参数确定

在五参数广义 Kelvin 模型中需要确定的参数为  $E_H, E_{k1}, E_{k2}, \eta_{k1}, \eta_{k2}$ 。由式(6)得, 当  $N = 2$  时, 线性粘弹性蠕变柔量为

$$J_{l, ve}(t) = \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_{k1}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{k1}}{\eta_{k1}} t\right) \right] + \frac{1}{E_{k2}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{k2}}{\eta_{k2}} t\right) \right] \quad (7)$$

于是, 由下式:

$$J_{l, ve}(t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{E_H} \quad (8)$$

容易确定  $E_H$ 。其余参数  $E_{k1}, E_{k2}, \eta_{k1}, \eta_{k2}$ , 根据最小二乘法原理, 按高斯-牛顿法确定。

## 4 粘塑性流变阶段的本构模型及参数

根据本文对高湿度 Q<sub>2</sub> 黄土进行的三轴蠕变试验结果, 得到粘塑性等时应力应变曲线如图 4。因等时曲线性状均不为直线, 表明这种土的粘塑性流变具有非线性。同样, 可以把粘塑性应变分成线性和非线性两部分, 得到图 5 和 6 的结果, 其中, 图 5 为粘塑性线性部分的等时应力应变曲线, 图 6 为粘塑性非线性部分的等时应力应变曲线。

### 4.1 线性粘塑性本构模型及参数

线性粘塑性流变可以用模型理论描述。其线性粘塑性模量  $E_{l, vp}(t)$  随时间的变化如图 7, 线性粘塑性蠕变柔量  $J_{l, vp}(t)$  随时间的变化如图 8。

从图 8 可以看出  $J_{l, vp}(t)$  的试验点几乎在同一直线上, 说明线性粘塑性蠕变为等速蠕变。因此, 高湿度 Q<sub>2</sub> 黄土的线性粘塑性本构模型为

$$\epsilon_{l, vp}(t) = \left( \frac{1}{E_M} + \frac{1}{\eta_M} \right) (\sigma - \sigma_0) = J_{l, vp}(t) (\sigma - \sigma_0) \quad (9)$$

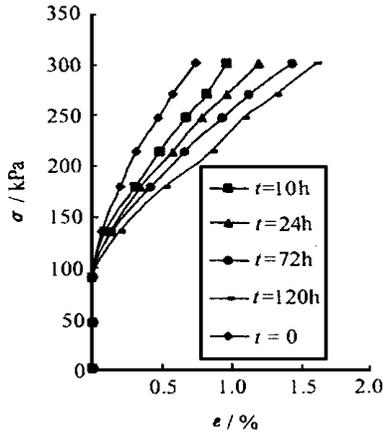


图 4 粘塑性等时应力-应变曲线  
Fig 4 Isochronous stress-strain curves with viscoplasticity

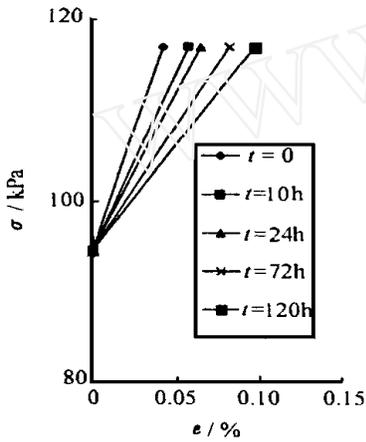


图 5 线性粘塑性等时应力-应变曲线  
Fig 5 Isochronous stress-strain curves with linear viscoplasticity

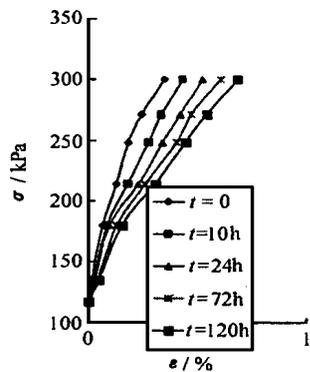


图 6 非线性粘塑性等时应力-应变曲线  
Fig 6 Isochronous stress-strain curves with nonlinear viscoplasticity

式中:  $E_M$  为瞬时线性粘塑性模量, 即  $J_{l, vp}(t)$  初始值的倒数:

$$E_M = \frac{1}{J_{l, vp}(0)} \quad (10)$$

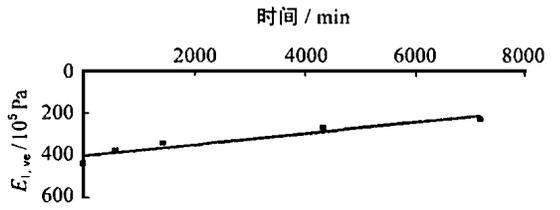


图 7 线性粘塑性模量  $E_{l, vp}(t)$  与时间  $t$  的关系  
Fig 7 Relation of linear viscoplastic modulus  $E_{l, vp}(t)$  versus time  $t$

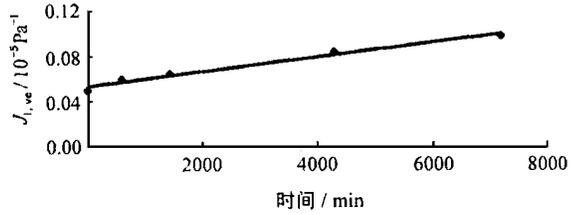


图 8 线性粘塑性蠕变柔量  $J_{l, vp}(t)$  与时间  $t$  的关系  
Fig 8 Relation of linear viscoplastic creep flexibility  $J_{l, vp}(t)$  versus time  $t$

$\eta_M$  为  $J_{l, vp}(t)$  直线斜率的倒数, 即

$$\eta_M = \frac{1}{dJ_{l, vp}/dt} \quad (11)$$

#### 4.2 非线性粘塑性本构模型及参数

##### 4.2.1 经验本构模型的建立

按照上述讨论, 非线性粘塑性蠕变可用一经验模型来描述。从图 6 看出: 高湿度  $Q_2$  黄土的非线性粘塑性等时应力-应变曲线与幂函数曲线的性状基本一致, 且在坐标原点处与应力轴垂直。因此, 选幂函数形式为非线性粘塑性流变的经验模型较符合高湿度  $Q_2$  黄土的实际特性。

令经验模型为

$$(\sigma - \sigma_s) = A \epsilon_{n, vp}^{m_1} \quad (12)$$

或

$$\epsilon_{n, vp} = \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{A} \right)^{\frac{1}{m_1}} \quad (13)$$

式中:  $\sigma - \sigma_s$  为过应力;  $\epsilon_{n, vp}$  为非线性粘塑性应变;  $A, m_1$  分别为非线性变形系数和硬化系数。

由于非线性流变问题的等时应力-应变曲线随时间而变化, 所以幂函数的系数均与时间有关。

根据文[2]的建议, 对于各种类型的土, 其非线性变形系数  $A$  与时间  $t$  的关系可以用幂函数来表示, 即

$$A = A_0 t^a \quad (14)$$

式中:  $a > 0$ 。

根据文[2]的另一建议, 若等时应力-应变曲线相似,  $\frac{1}{m_1}$  可取为常数  $m$ 。这样由式(13)及(14)得

$$\epsilon_{n, vp} = \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{A t^{-a}} \right)^m = \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{A t} \right)^m t^{\beta} \quad (15)$$

式中:  $\beta = ma > 0$ , 为蠕变指数。

由于式(15)不能反映瞬时非线性粘塑性变形, 与实际不符, 为此, 可对式(15)增加一项与时间无关的瞬时非线性粘塑性变形  $\epsilon_{n, vp}^0$  进行修正。

令  $\epsilon_{n, vp}^0$  为

$$\epsilon_{n, vp}^0 = \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{A_0} \right)^{m_0} \quad (16)$$

于是, 总的非线性粘塑性应变为

$$\epsilon_{n, vp} = \epsilon_{n, vp}^0 + \epsilon'_{n, vp} = \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{A_0} \right)^{m_0} + \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{A t} \right)^m t^{\beta} \quad (17)$$

式中:  $\epsilon'_{n, vp}$  是从总非线性粘塑性应变中扣除瞬时非线性粘塑性应变后的剩余非线性粘塑性应变, 与时间有关, 且满足  $t = 0$  时  $\epsilon'_{n, vp} = 0$ ; 其余符号的意义如前所述。式(17)就是一般非线性粘塑性流变部分的经验本构模型。

#### 4.2.2 经验本构模型的参数确定

根据式(17), 经验模型的参数为  $A t$ ,  $m_0$ ,  $A_0$ ,  $m$ ,  $m t$  和  $\beta$

这些参数的确定方法如下:

- (1) 计算非线性粘塑性剩余变形  $\epsilon'_{n, vp0}$
- (2) 在双对数坐标中分别按直线回归整理  $\ln \epsilon'_{n, vp} - \ln(\sigma - \sigma_s)$  关系,  $\ln \epsilon'_{n, vp} - \ln(\sigma - \sigma_s)$  关系和  $\ln(\sigma - \sigma_s) = 0$  时  $\ln \epsilon'_{n, vp} - \ln t$  关系。
- (3) 根据  $\ln \epsilon'_{n, vp} = m_0 \ln(\sigma - \sigma_s) - m_0 \ln A_0$  和  $\ln \epsilon'_{n, vp} = \ln(\sigma - \sigma_s) - m_0 \ln A t$ , 并令  $\ln \epsilon'_{n, vp} - \ln(\sigma - \sigma_s)$  直线的截距等于  $-m_0 \ln A_0$ , 可求得  $A_0$ ; 令  $\ln \epsilon'_{n, vp} - \ln(\sigma - \sigma_s)$  直线的截距等于  $-m \ln A t$ , 可求得  $A_0$ 。

由  $\ln \epsilon'_{n, vp} - \ln(\sigma - \sigma_s)$  直线及  $\ln \epsilon'_{n, vp} - \ln t$  直线的斜率和截距, 可得  $m_0$ ,  $m$ ,  $\beta$  的值。

由式(9)和式(17)可得高湿度 Q<sub>2</sub> 黄土的粘塑性流变的本构模型为

$$\epsilon_p = \epsilon_{e, vp} + \epsilon_{n, vp} = \left( \frac{1}{E_M} \right) + \frac{1}{\eta_M} (\sigma - \sigma_s) + \left[ \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{A_0} \right)^{m_0} + \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{A t} \right)^m t^{\beta} \right] \quad (18)$$

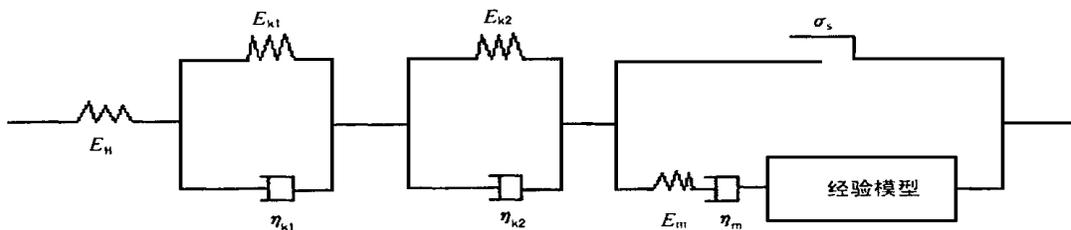


图 9 高湿度 Q<sub>2</sub> 黄土非线性流变本构模型示意图

Fig 9 Schematic diagram of the nonlinear rheological constitutive model of high moisture Q<sub>2</sub> loess

## 5 高湿度 Q<sub>2</sub> 黄的非线性流变本构模型和参数

根据上述建模的基本理论, 将瞬时弹性变形、粘弹性变形和粘塑性变形三者迭加, 最后得到高湿度 Q<sub>2</sub> 黄土的非线性流变本构模型为

$$\epsilon_v = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp} = \epsilon_{e, ve} + (\epsilon_{e, vp} + \epsilon_{n, vp}) = \left\{ \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_{k1}} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{E_{k1} t}{\eta_{k1}} \right) \right] + \frac{1}{E_{k2}} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{E_{k2} t}{\eta_{k2}} \right) \right] \right\} \sigma + \left\{ \left( \frac{1}{E_M} + \frac{1}{\eta_M} \right) (\sigma - \sigma_s) + \left[ \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{A_0} \right)^{m_0} + \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{A t} \right)^m t^{\beta} \right] \right\} \quad (19)$$

模型结构简图如图 9。

式(19)中各符号的意义如前所述, 模型参数如表 1。

表 1 Q<sub>2</sub> 黄土的非线性流变本构模型参数

Table 1 Parameters of the nonlinear rheological constitutive model of high moisture Q<sub>2</sub> loess

$E_H$ /kPa	$E_{k1}$ /kPa	$E_{k2}$ /kPa	$E_M$ /kPa	$\eta_{k1}$ /kPa·d	$\eta_{k2}$ /kPa·d
$1.08 \times 10^5$	$7.19 \times 10^5$	$1.11 \times 10^5$	$4.78 \times 10^4$	$9.61 \times 10^4$	$8.23 \times 10^4$
$\eta_M$ /kPa·d	$A_0$ /kPa·d	$A t$ /kPa	$m_0$	$m$	$\beta$
$1.38 \times 10^5$	$3.58 \times 10^2$	$14.5 \times 10^2$	4.27	3.17	0.6

## 6 结 语

本文根据非线性流变理论, 通过土的室内单轴和三轴流变试验, 分析论证了高湿度 Q<sub>2</sub> 黄土粘弹性阶段为一线性粘弹性体, 可用 5 参数的广义 Kelvin 模型模拟, 粘塑性阶段为一非线性粘塑性体, 可用一 Maxwell 模型串联一幂函数形式的经验模型模

拟。在此基础上,最后建立了高湿度 $Q_2$ 黄土的非线性流变本构模型和确定了相应的模型参数。

参 考 文 献

1 谢 宁. 上海地区饱和软粘土的流变特性[J]. 同济大学学报,

1996, 24(3): 233~ 237

2 维亚洛夫 C C 著 土力学的流变原理[M]. 杜余培译 北京: 科学出版社, 1987

3 孙 钧, 汪炳钺 地下结构有限元法解析[M]. 同济大学出版社, 1988

NONLINEAR RHEOLOGICAL CONSTITUTIVE MODELS AND THE IR PARAMETERS OF HIGH MOISTURE  $Q_2$  LOESS

Guo Zengyu<sup>1</sup>, Zhang Chaopeng<sup>2</sup>, Xia Wangmin<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>Xi'an University of Technology, Xi'an 710048 China)

(<sup>2</sup>Xi'an Design Institute of Municipal Engineering, Xi'an 710068 China)

**Abstract** The underground market engineering near Baoji Rail Station is a project of top-down construction. In order to meet the needs of the design and construction of the engineering, the rheological constitutive models of high moisture  $Q_2$  loess are proposed. The models and the parameters are wholly determined based on rheological theory of soil and the results of uniaxial, triaxial creep tests of  $Q_2$  loess.

**Key words** high moisture, loess, nonlinear, rheological model, parameter