第32卷 第14期 计 算 机 工 程 2006年7月
Vol.32 № 14 Computer Engineering July 2006
·多媒体技术及应用· 文章编号：1000—3428(2006)14—0193—03 文献标识码：A 中图分类号：TP249

# 机器人逆运动学求解的可视化算法

周芳芳，樊晓平，赵 颖
(中南大学信息科学与工程学院自动化工程研究中心，长沙 410075)

**摘 要：**机器人逆运动学求解的可视化算法包含两部分，数值求解两个(或一个)非线性方程和4(或5)自由度机器人封闭解，实现了任意结构的6自由度机器人的逆运动学方程的求解，根据D-H参数表生成机器人三维模型实现机器人结构的可视化，有效地判断逆解的合理性，并为机器人学习提供了辅助工具。

**关键词：**机器人；逆运动学；可视化；数值计算

# Visual Algorithm of Robot Inverse Kinematics

ZHOU Fangfang, FAN Xiaoping, ZHAO Ying
(Research Center for Automation Engineering, College of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410075)

**【Abstract】**This paper introduces the robotic inverse kinematics visual algorithm which includes two parts. Firstly two (or one) non-linear equations are numerically computed, and then the remaining four (or five) joint values are determined in closed form once two (or one) joint values are known. And the visualization of the robot models produced by D-H parameters is used to determine the solutions effectively.

**【Key words】**Robot manipulator; Inverse kinematics; Visualization; Numerical computer

机器人的可视化技术的研究可以帮助学习和研究机器人，减少分析和学习的时间，深入理解机器人的基本概念和研究的难点。机器人逆运动学求解的可视化算法通过数值计算快速求解任意结构的6自由度机器人的逆解，并将求解的结果可视化，有效地判断逆解的合理性，同时为机器人运动学的学习提供了辅助工具。

Pieper最早提出含有3个相邻关节轴互相垂直(或平行)的6自由度机器人可以求逆运动学封闭解[1],求解的过程被简化为计算四元多项式方程。为了机器人的学习和研究需要求解一般结构的6自由度机器人的逆运动学方程，目前多采用数值计算的方法通过计算逆Jacobin矩阵求解任意结构的6自由度机器人的运动学方程[3,4]。但该方法需要数值求解6个非线性方程，不仅计算量大，而且会产生不符合实际物理约束的多余解。

本论文介绍的求解方法建立在4、5自由度机器人的运动学求解的基础之上[5]，将6自由度机器人逆运动学方程求解的过程简化为计算两个非线性方程。并且利用D-H参数表产生机器人模型，利用解的可视化来判断解的有效性，排除不合理的逆解。

## 1 运动学的定义

机器人运动学方程定义为

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6=P \tag{1}$$

矩阵$A_i$定义为

$$A_i=\begin{bmatrix} C_i & -\gamma_i S_i & \sigma_i C_i & a_i S_i \\ S_i & \sigma_i C_i & -\gamma_i S_i & a_i C_i \\ 0 & \sigma_i & \gamma_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中$C_i=\cos\theta_i$，$S_i=\sin\theta_i$，$\sigma_i=\sin\alpha_i$，$\gamma_i=\cos\alpha_i$。已知方程(1)中的角度$\theta$，求解目标点的位姿P为正运动学求解。

末端执行器的位姿矩阵可表示为

$$P=\begin{bmatrix} n_x & b_x & t_x & p_x \\ n_y & b_y & t_y & p_y \\ n_z & b_z & t_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & b & t & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中$n$，$b$，$t$，$p$是3×1向量。已知末端执行器的位姿P求解关节变量角$\theta$为逆运动学求解。

## 2 机器人逆运动学求解

本文求解的是任意结构的6自由度机器人的逆运动学方程。求解的方法有以下3个特点：

(1)该方法建立在4、5自由度机器人的运动学求解的基础之上[5]，可以更好地理解6自由度机器人的结构和计算；

(2)把6自由度机器人逆运动学方程求解的过程简化为数值计算两个非线性方程；

(3)利用末端执行器的非完整性约束可进一步简化求解过程。

求解思路：考虑6自由度机器人杆件结构，对不同的结构采用不同的求解方法。通过分析主要有3种情况，如图1。

(1)对无垂直或无平行关节轴的6自由度机器人，首先化简为4自由度机器人，然后二维迭代求解2个关节变量，最后封闭求解其余4个变量；

(2)对包含一对垂直或平行的关节轴的机器人，则化简为5自由度机器人，一维迭代求解1个关节变量，封闭求解另外5个变量；

(3)对于包含3个相邻或3个以上的垂直或平行的关节轴机器人，可以直接求解6个关节变量。

**基金项目：**国家自然科学基金资助项目(69975003)
**作者简介：**周芳芳(1980—)，女，博士，主研方向：虚拟现实技术，计算机网络，机器人仿真；樊晓平，博士、教授、博导；赵 颖，硕士
**收稿日期：**2005-07-27 **E-mail：**zff@mail.csu.edu.cn

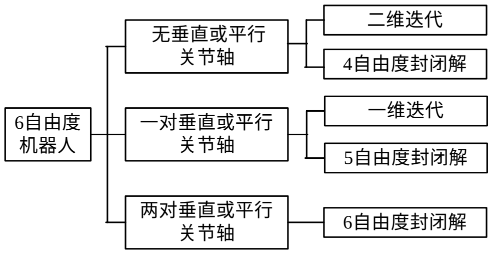


**图 1 任意结构机器人的求解方法**

### 2.1 化简到 5 自由度机器人

对于无垂直(或无平行)和一对垂直(或平行)关节轴的 6 自由度机器人的计算，首先通过矩阵变换将运动学方程转化成 5 自由度机器人运动学方程，方程(1)变换为

$$\begin{cases} A_2A_3A_4A_5A_6 = Q & (2)\\ Q = A_1^{-1}P & (3)\end{cases}$$

或

$$\begin{cases} A_1A_2A_3A_4A_5 = Q & (4)\\ Q = PA_6^{-1} & (5)\end{cases}$$

当矩阵 Q 已知时,方程(2)和(4)表示 5 自由度机器人的运动学方程。对包含一对垂直(或平行)关节轴的机器人,方程(2)和(4)可作为一维迭代求解逆运动学方程的基础。

### 2.2 化简到 4 自由度机器人

对于无垂直(或无平行)关节轴的 6 自由度机器人的计算需要将运动学方程进一步化简到 4 自由度运动学方程。方程(1)简化到 4 自由度机器人的方法有 3 种：

第 1 种为

$$\begin{cases} A_3A_4A_5A_6 = Q & (6)\\ Q = A_2^{-1}A_1^{-1}P & (7)\end{cases}$$

第 2 种为

$$\begin{cases} A_2A_3A_4A_5 = Q & (8)\\ Q = A_1^{-1}PA_6^{-1} & (9)\end{cases}$$

第 3 种为

$$\begin{cases} A_1A_2A_3A_4 = Q & (10)\\ Q = PA_6^{-1}A_5^{-1} & (11)\end{cases}$$

如果已知矩阵Q，方程(6)、(8)、(10)可作为 4 自由度机器人逆运动学方程。Manseur提出了任意 4 自由度结构的机器人运动学方程的求解方法[5]，利用该方法可以根据已知的Q矩阵求解方程(6)、(8)、(10)获得逆运动学的封闭解。

### 2.3 二维迭代求解法

对于无垂直(或无平行)关节轴的 6 自由度机器人逆运动方程的求解问题简化为先求解 2 个关节变量，然后封闭的求出另外 4 个解的问题。理论上，方程(6)、(8)、(10)都可以二维迭代求解两个关节变量，下面以方程(6)为例进行说明。

采用数值计算的方法来求解两个非线性方程的$\theta_1$和$\theta_2$。

$$\begin{cases} f(\theta_1,\theta_2)=0\\ g(\theta_1,\theta_2)=0\end{cases} \quad (12)$$

可以采用二维的Newton-Rhphson算法来求解非线性方程组(12)。为了使求出的$\theta_1$和$\theta_2$满足方程(1)的要求，必须选择合适的方程$f$和$g$。文献[5]提出了末端执行器的期望位姿和实际位姿的关系，用一个 6×1 的向量表示：

$$x_c = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_L\cdot(p-p_L)\\ b_L\cdot(p-p_L)\\ t_L\cdot(p-p_L)\\ (t_L\cdot b - t\cdot b_L)/2\\ (n_L\cdot t - n\cdot t_L)/2\\ (b_L\cdot n - b\cdot n_L)/2\end{bmatrix} \quad (13)$$

其中向量$n$，$b$，$t$，$p$表示的是末端执行器P期望的位姿，向量$n_L$，$b_L$，$t_L$，$p_L$则是由方程(1)的左边计算出的实际位姿。受末端执行器位姿完全约束的两个运动学方程可以表示为

$$\begin{cases} f(\theta_1,\theta_2) = x_1^2+x_2^2+x_3^2\\ g(\theta_1,\theta_2) = x_4^2+x_5^2+x_6^2\end{cases} \quad (14)$$

Doty 提出了方程 $f$ 和 $g$ 的另一种选择方法。$f$ 和 $g$ 根据旋转距离来定义，其中 $g$ 是一般的欧式距离：

$$\begin{cases} f(\theta_1,\theta_2) = d(R_L,R) = \sqrt{3-trace(R_L^TR)}\\ g(\theta_1,\theta_2) = |P_L - P|\end{cases} \quad (15)$$

方程(14)、(15)是二维运动学方程的 2 个例子。如果末端执行器不是完全约束的，运动学方程还可以进一步简化。

### 2.4 二维 Newton-Rhphson 方法

只要可以求解方程$f(\theta_1,\theta_2)$和$g(\theta_1,\theta_2)$，那么它们对$\theta_1$，$\theta_2$的偏微分方程$f_1$，$f_2$和$g_1$，$g_2$的近似值可表示为

$$f_1(\theta_1,\theta_2) = \frac{\partial f}{\partial\theta_1} = \frac{[f(\theta_1+\Delta\theta_1,\theta_2) - f(\theta_1,\theta_2)]}{\Delta\theta_1} \quad (16)$$

$$f_2(\theta_1,\theta_2) = \frac{\partial f}{\partial\theta_2} = \frac{[f(\theta_1,\theta_2+\Delta\theta_2) - f(\theta_1,\theta_2)]}{\Delta\theta_2}$$

和

$$g_1(\theta_1,\theta_2) = \frac{\partial g}{\partial\theta_1} = \frac{[g(\theta_1+\Delta\theta_1,\theta_2) - g(\theta_1,\theta_2)]}{\Delta\theta_1}$$

$$g_2(\theta_1,\theta_2) = \frac{\partial g}{\partial\theta_2} = \frac{[g(\theta_1,\theta_2+\Delta\theta_2) - g(\theta_1,\theta_2)]}{\Delta\theta_2} \quad (17)$$

其中△$\theta_1$，△$\theta_2$是$\theta_1$，$\theta_2$的微小增量。利用Newton-Rhphson算法求解任意结构的 6 自由度机器人的逆运动学方程的步骤如下：

(1)根据估计值$\theta_1$，$\theta_2$计算方程(7)中的Q矩阵；

(2)求解方程(6)的 4 自由度机器人的 4 个关节变量$\theta_3$，$\theta_4$，$\theta_5$，$\theta_6$。

(3)计算方程$f(\theta_1,\theta_2)$和$g(\theta_1,\theta_2)$ 。

(4)计算方程 $f$ 和 $g$ 的偏微分方程(16)和(17)。

(5)根据Newton-Rhphson方法获得一组新的估计值$\theta_1$，$\theta_2$，即

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}_{new} = \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 & f_2\\ g_1 & g_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f(\theta_1,\theta_2)\\ g(\theta_1,\theta_2)\end{bmatrix}$$

(6)循环步骤(1)～(5)，直到满足精度范围。

由上面的算法可以计算出$\theta_1$，$\theta_2$，然后根据方程(6)可以封闭地求解出另外 4 个关节变量。由于求解时不考虑杆件的结构关系，会出现多解的情况。

### 2.5 一维迭代求解法

如方程(2)、(4)所示，当第 1 个关节变量$\theta_1$或者最后 1 个关节变量$\theta_6$为已知时,6 自由度机器人的逆运动学求解问题可简化为 5 自由度机器人的逆运动求解。因此，可采用一维迭代方法求解$\theta_1$或$\theta_6$，然后封闭求出其余 5 个变量。

文献[5]研究了 5 自由度机器人的运动学求解问题，并提出 5 自由度机器人的封闭解的充分条件是机器人结构中包含一对互相垂直或互相平行的关节轴，求解简化为计算一个四元多项式。如果 5 自由度机器人包含特殊 4 旋转轴结构可以以更加简单的形式进行求解。

## 3 机器人逆运动可视化系统的实现

机器人的运动学分析一般不考虑机器人关节的形状、尺寸等物理约束，当末端执行器位姿确定时，各关节可以有多种位姿。在求出的多解中，如何有效地判断解的合理性，这是本文需要解决的另外一个问题。采用机器人可视化来直观地判断解的有效性。

### 3.1 三维机器人的生成算法

根据 D-H 参数的一般定义来生成机器人模型。首先需要

构造机器人的机座，接着生成旋转关节或移动关节，然后以活动关节为起始点，继续生成机械臂，手臂的长度由参数 $d$、$a$ 决定，关节间的角度由参数 $\alpha$ 和 $\theta$ 决定。为了将这个问题阐述清楚，下面举例说明。假设关节 B 由前一个相邻关节 A 通过 4 个 D-H 参数 $d$、$a$、$\alpha$ 和 $\theta$ 确定。如图 2 所示，关节 B 的位姿可以通过以下步骤确定：

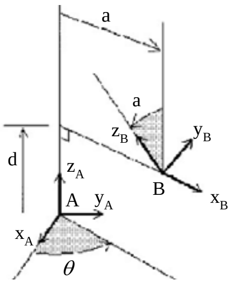


**图 2 D-H 参数表生成机器人**

DH 算法：

(1)确定机器人的自由度 $n$；

(2)沿着$Z_A$轴移动距离$d$。$d$是代数变量可正可负；

(3)$X_A$轴绕$Z_A$轴旋转$\theta$角度，得到$X_B$轴；

(4)沿$X_B$方向移动距离$a$，此时坐标原点到达关节$B$的中心。$X_B$轴的方向完全确定；

(5)$Z_A$轴绕$X_B$轴旋转$\alpha$角度，确定$Z$轴的方向。

(6)重复步骤 2~5 直至生成 $n$ 自由度的机器人模型。

需要注意以下几种特殊情况：如果$Z_{i-1}$和$Z_i$的中垂线与$Z_{i-1}$轴相交于关节$F_{i-1}$坐标原点，则$di=0$；如果$Z_{i-1}$和$Z_i$互相平行，则$\alpha_i=0$；机器人的第 1 个关节$F_0$位于$Z_0$和$Z_1$中垂线上，可设置参数$d_1$为零；末端执行器$F_n$($n$为机器人的自由度)是唯一可以不与关节中心轴相连的杆件。如果关节$n$是旋转关节，那么参数$d_n$、$a_n$、$\alpha_n$为 0；而如果关节$n$是移动关，那么$a_n$、$\alpha_n$、$\theta_n$为 0。

### 3.2 模型库

模型库提供了生成三维机器人模型的基本部件，如移动关节、旋转关节。在生成机器人模型时，系统根据 D-H 参数调用模型库的模型，在视图窗口中绘制机器人模型。模型库中的模型采用的是简单的三维模型，如立方体、圆柱体。虽然是简单的模型，但是它们却代表了一定的含义，简便地实现了机器人的可视化，如图 3 所示。

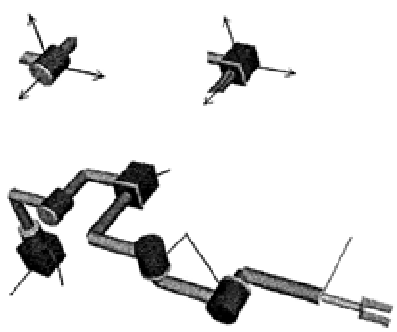

**图 3 模型库**

圆柱代表旋转关节，顶部的小圆盘代表 Z 轴正方向；立方体代表移动关节，顶部的方片代表 Z 轴正方向；D-H 参数中的 a 用浅色的细圆柱体表示，a 的大小为圆柱的长度；D-H 参数中的 d 用深色的细圆柱体表示，d 的大小为圆柱的长度。

### 3.3 逆运动学的可视化

下面以机器人例 1 来说明通过可视化逆解来判断解的有效性。首先根据表 1 的 DH 参数计算运动学方程，求出 8 组关节角，如表 2 所示。仿真系统根据 D-H 参数和 8 组关节角调用模型库生成 8 组机器人模型如图 4 所示。显而易见，模型 2，3，6 的关节交叉不符合实际情况，应该排除。

**表 1 机器人例 1 的 D-H 参数**

| 关节 | a | d | α° | θ° |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.3 | 0 | 90 | Var |
| 2 | 1 | 0 | 0 | Var |
| 3 | 0 | 0.2 | 90 | Var |
| 4 | 1.5 | 0 | 0 | Var |
| 5 | 0 | 0 | 90 | Var |
| 6 | 0 | 0 | 0 | Var |

**表 2 机器人例 1 的逆解**

| 关节 | $\Theta_1$ | $\Theta_2$ | $\Theta_3$ | $\Theta_4$ | $\Theta_5$ | $\Theta_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 107.5 | 112.5 | -7.7 | 0 | 0 |
| 2 | 88.7 | 176.7 | -178.4 | -63.3 | 157.8 | 140 |
| 3 | 113.9 | 4.5 | -179.1 | -56 | -63.7 | -42.5 |
| 4 | 168.7 | -104.2 | 146.6 | -16.4 | -170.9 | 98.2 |
| 5 | 180 | 107.5 | 147.4 | -7.7 | -164.7 | 180 |
| 6 | -120.8 | 173.1 | 178.5 | 31.3 | -146.1 | 142.6 |
| 7 | -96.3 | -5.8 | -179.1 | 38.5 | 51.9 | -39.6 |
| 8 | -11.8 | -105.5 | 65.5 | 178.8 | 173.6 | 100.6 |

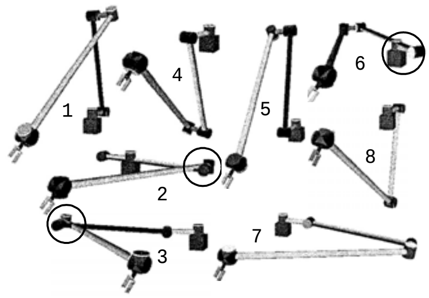


**图 4 机器人例 2 的可视化模型**

## 4 总结

本文提出了一种简单快速的求解 6 自由度机器人逆运动学方程的算法，并根据 D-H 参数表生成机器人模型可视化求出的逆解有效地判断解的合理性。该算法不仅简化了多自由度逆运动学方程的求解过程，并可以直观地通过可视化模型排除错误解，为机器人的学习和研究提供了有效的帮助。

**参考文献**


1 Pieper D L. The Kinematics of Manipulators Under Computer Control[D]. Stanford University, 1969.

2 Craig J J. Introduction to Robotics——Mechanics and Control(2nd Edition)[M]. Eddison-Wesley, 1989.

3 Goldenberg A, Lawrence D L. A Generalized Solution to the Inverse Kinematics of Robotic Manipulators[J]. J. Dyn. Stat. Meas. Control, 1985, 107(3): 103-106.

4 Grudic Z, Lawrence P D. Iterative Inverse Kinematics with Manipulator Configuration Control[J]. IEEE Trans. on Robotics and Automation, 1994, 9(4): 476-483.

5 Manseur R, Doty K L. Fast Inverse Kinematics of Five-revolute-axis Robot Manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 1992, 27(5): 587-598.