

含水层参数识别的Monte-Carlo方法*

李守巨 刘迎曦 王登刚

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室 大连 116024)

摘要 采用Monte-Carlo随机模拟方法模拟观测数据,根据水头和流量观测数据识别含水层的导水系数。通过对经典最小二乘法目标函数的修正,添加了流量残差平方和最小一项,保证参数识别结果的唯一性。研究表明,当观测误差为正态分布时,参数识别结果也为正态分布。采用本文所提出的含水层参数识别方法,即使水头观测标准差达到1m,参数识别结果的平均值与理论值的相对误差小于1%。

关键词 含水层,参数识别,正态分布, Monte-Carlo方法,标准差

分类号 TV 223.1

文献标识码 A

文章编号 1000-6915(2001)01-0095-04

1 引言

在已知含水层的水文地质参数和边界条件以及地下水流动的微分方程类型的前提下,求解渗流区域的水头分布规律的数值方法,这就是水文地质计算中的正演问题。然而在很多情况下,含水层的水文地质参数(如渗透系数)往往是未知的,需要根据水文地质勘察资料和水头观测数据来确定,这就是水文地质计算中的反演问题。同时,正演结果的准确性与否与含水层参数的选取或反演结果的可靠性密切相关。因此,如何准确选取含水层的渗透系数参数是十分棘手和重要的问题。传统的方法是采用注水试验,通过测得的单位吸水率计算渗透系数^[1];其缺点是数据离散、工艺复杂、费用高。渗透系数与单位吸水率之间关系的为

$$\kappa = 23.6\omega \quad (1)$$

式中: κ 为渗透系数 (10^{-6} m/s); ω 为单位吸水率 ($L/m \cdot m \cdot min$)。

随着反演方法的日臻完善^[2~5],利用水头和流量观测数据识别含水层的渗透系数或导水系数的方法已经成熟。但是,由于仪器精度和其他偶然误差,所测的水头或流量是一随机值,因此,含水层参数识别结果也应为随机变量。而传统的识别方法大多是确定性识别方法,所得到的识别结果为一确定值,无法准确反映实际情况。Monte-Carlo随机模拟方法为含

水层参数识别问题提供更可靠的一种参数估计。

2 含水层参数识别的Levenberg-Marquardt法

按照Neuman的分类方法,含水层参数识别方法可分为两类,即直接法和间接法。无论是直接法还是间接法,最终都归结为数学规划中的求极小化平方和函数问题或求极小残差问题。

2.1 经典目标函数的修正

经典的最小二乘法所建立的目标函数并没有考虑流量条件,只是将水头残差平方和最小作为目标函数^[6,7]

$$\min E = H_c - H_m^2 \quad (2)$$

由于反问题的不唯一性^[8],按上式所得到的反演结果是不唯一的,因此本文提出如下形式的目标函数,它既考虑了水头残差平方和最小,又考虑流量残差平方和最小:

$$\min E = H_c - H_m^2 + \beta Q_c - Q_m^2 \quad (3)$$

式中: H_c 为计算水头矢量; H_m 为观测水头矢量; Q_c 为计算漏水量矢量; Q_m 为观测漏水量矢量; β 为权因子, $\beta > 0$, β 的选取根据具体问题而定。

2.2 含水层参数识别的迭代方法

在进行迭代计算过程中,有时会遇到搜索方向

1999年6月15日收到初稿,1999年10月29日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目(59779003)和工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目。

作者 李守巨 简介: 男,41岁,硕士,1982年毕业于阜新矿业学院采矿系矿井建设专业,现任副教授,主要从事岩石力学及其反问题的研究工作。

矩阵 $[G]^T[G]$ 病态或奇异问题^[4, 6], 本文采用 Levenberg Marquardt 法搜索迭代方向:

$$T^{K+1} = T^K - \alpha D^K \quad (4)$$

$$D^K = \{ [G^K]^T [G^K] + \gamma I \}^{-1} [G^K]^T [H_c^K - H_m^K] \quad (5)$$

式中: α 为步长; $[G^K]$ 为梯度矩阵(又称雅可比矩阵); I 为单位矩阵; γ 为阻尼系数; D^K 为搜索方向。 γ 和 $[G]$ 具体选取和计算方法见参考文献[5, 9]。

迭代过程如下: (1) 选取渗透系数的初始值; (2) 计算梯度矩阵和水头矢量; (3) 计算搜索方向和步长; (4) 按照式(3)进行迭代; (5) 执行收敛准则, 若满足则迭代过程结束, 否则, 返回第二步。

收敛准则选取以下形式:

$$\begin{cases} T^{K+1} - T^K / T^{K+1} < \epsilon_1 \\ E^{K+1} - E^K / E^{K+1} < \epsilon_2 \\ D^{K+1} - D^K / D^{K+1} < \epsilon_3 \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 为给定的常数。

3 观测信息处理的 Monte-Carlo 方法

由于测量仪器精度和多种因素的影响, 使得观测数据带有随机误差。实践已经证明, 观测数据误差可视成正态分布, 并且各测值误差相互独立。其概率密度函数一般可采用二阶高斯分布描述:

$$f(H) = 1 / [(2\pi)^{0.5} \sigma] \cdot$$

$$\exp[-1/2 \times \sigma^2 (H - H_m)^T C_m^{-1} (H - H_m)] \quad (7)$$

式中: C_m 为观测矢量的协方差矩阵, 即观测误差矩阵; σ 为观测数据的标准差。

$$C_m = E(\Delta H \Delta H^T) \quad (8)$$

式中: ΔH 为观测误差矢量; H 为真实响应值。如果所有的观测是统计上相互独立的, 则 C_m 是一对角矩阵。

$$\Delta H = H - H_m \quad (9)$$

$$E|\Delta H| = 0 \quad (10)$$

式中: $E|\Delta H|$ 为观测误差矢量的数学期望。

设第 J 个测点的水头或流量的均值和标准差经统计分析已经得出, 则该测点的第 K 次抽样为

$$H_J(K) = H_J^E + \xi(K)\sigma \quad (11)$$

式中: $H_J(K)$ 为第 J 测点测值的第 K 次抽样, H_J^E 为第 J 测点测值的均值, $\xi(K)$ 为 $N(0, 1)$ 正态分布的第 K 次抽样, σ 为第 J 测点测值的标准差。

4 数值模拟例题

为了验证本方法的有效性, 进行了二维稳定渗流问题验算。首先假设导水系数已知, 加上边界条

件, 求出正问题的解, 即各点的水头值; 然后, 把计算出的观测点水头值随机加上固定均值的模拟测量误差, 作为反问题的“水头测量值”, 反求导水系数, 分析反演求出的导水系数与真实(正问题中假设的)导水系数的误差, 并研究其统计特性, 包括均值, 标准差和变异系数。设某地下承压含水层, 按导水系数的相对大小分为三个区域, 在每个子区域内假设渗透介质均质各向同性, 如图 1 所示, 在渗流内部区域共设置 4 个水头观测点, 据此反演三个导水系数。边界条件为: AB 段和 CD 段为已知水头边界, $h = h_1 = 255.0\text{m}$, $h = h_2 = 80.0\text{m}$, BC 段和 AD 段为不透水边界, $\partial h / \partial n = 0$ 。导水系数识别时补充的 CD 截面的流量条件为 $Q = 1.2\text{L/s}$ 。含水层正演分析的原始参数和计算结果如下: 各分区导水系数为 $T = 100 \times 10^{-7}\text{m}^2/\text{s}$, $T = 200 \times 10^{-7}\text{m}^2/\text{s}$, $T = 300 \times 10^{-7}\text{m}^2/\text{s}$ 。含水层参数识别选取的初始参数如下: $T = \{150, 250, 230\} \times 10^{-7}\text{m}^2/\text{s}$ 。在实际的水头测量和流量观测过程中, 不可避免的存在误差即噪音, 测量误差的大小和分布特性对反演结果的分布和精度有着重大的影响。在实际水位观测时, 孔内水位采用电测水位计, 测量的绝对误差为 $\pm 1\text{cm}$ 水柱, 当采用压力表观测时观测误差达到 $\pm 1\text{m}$ 水柱。

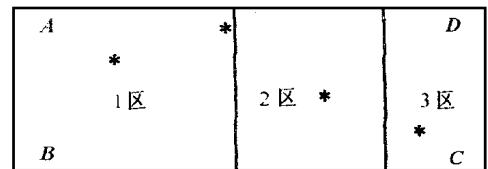


图 1 材料分区和观测点布置

Fig. 1 Dividing regions of material and location of instruments

根据以上的讨论, 水头或流量测值取样按式(11)计算, 当水头观测标准差为 1m , 流量观测标准差为 0.6L/m in 时, 含水层参数识别结果见表 1, 其参数分布特性见图 2~ 4。当水头观测标准差为 0.1m , 流量观测标准差为 0.06L/m in 时, 含水层参数识别结果见表 2, 其参数分布特性见图 5~ 7。

由数理统计理论可知, 在 90% 置信度条件下参

表 1 含水层参数识别结果(1)

Table 1 Identified results of aquifer parameters(1)

导水系数	理论值 $/10^{-7}\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	识别均值 $/10^{-7}\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	标准差 $/10^{-7}\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	变异系数
T_1	100.000	99.990	1.230	0.012
T_2	200.00	201.244	6.556	0.033
T_3	300.00	298.38	8.306	0.029

注: 水头观测标准差 $\sigma = 1\text{m}$ 。

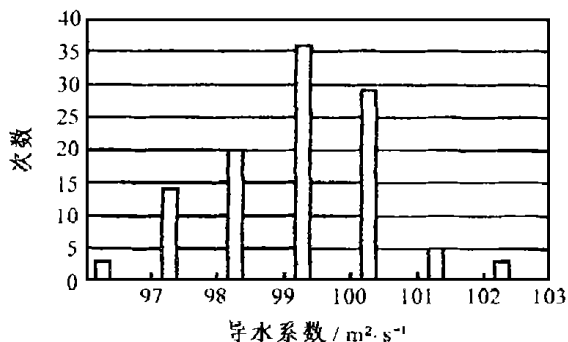


图 2 导水系数 T_1 的柱状图(水头观测标准差为 1 m)

Fig 2 Histogram of estimated transmissivity T_1 with 1 m of standard error of observed water head

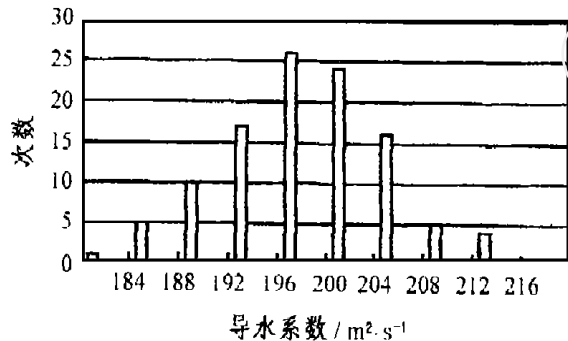


图 3 导水系数 T_2 的柱状图(水头观测标准差为 1 m)

Fig 3 Histogram of estimated transmissivity T_2 with 1 m of standard error of observed water head

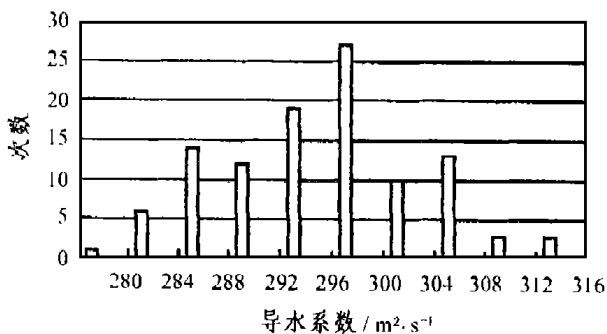


图 4 导水系数 T_3 的柱状图(水头观测标准差为 1 m)

Fig 4 Histogram of estimated transmissivity T_3 with 1 m of standard error of observed water head

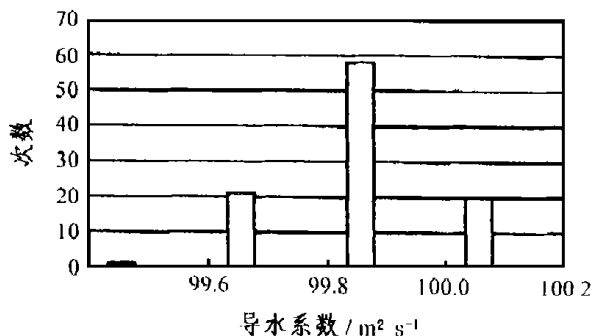


图 5 导水系数 T_1 的柱状图(水头观测标准差为 0.1 m)

Fig 5 Histogram of estimated transmissivity T_1 with 0.1 m of standard error of observed water head

表 2 含水层参数识别结果(2)

Table 2 Identified results of aquifer parameters(2)

导水系数	理论值 $/10^{-7} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	识别均值 $/10^{-7} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	标准差 $/10^{-7} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	变异系数
T_1	100.00	99.999	0.124	0.001
T_2	200.00	200.122	0.650	0.003
T_3	300.00	299.818	0.837	0.003

注: 水头观测标准差 $\sigma = 0.1 \text{ m}$ 。

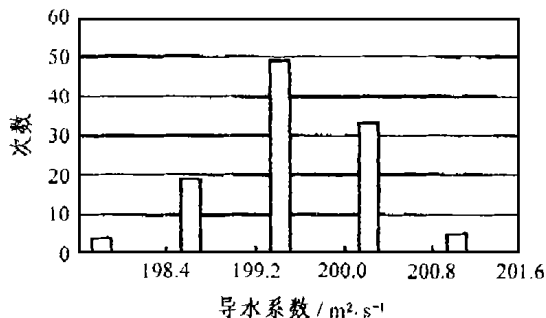


图 6 导水系数 T_2 的柱状图(水头观测标准差为 0.1 m)

Fig 6 Histogram of estimated transmissivity T_2 with 0.1 m of standard error of observed water head

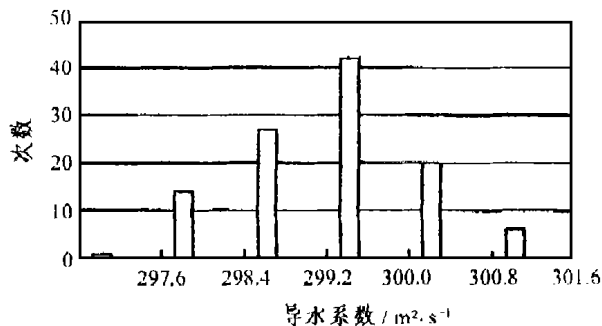


图 7 导水系数 T_3 的柱状图(水头观测标准差为 0.1 m)

Fig 7 Histogram of estimated transmissivity T_3 with 0.1 m of standard error of observed water head

数置信区间为

$$T = T^E \pm 1.645\sigma_T \quad (12)$$

式中: T 参数的取值范围; T^E 为参数的平均值; σ_T 为识别参数的标准差。从表 1 和 2 的对比中可以看出, 当水头观测标准差为 1 m, 及流量观测标准差为 0.6 L/m in 时, 90% 置信度条件下含水层识别参数的置信区间为: $T_1 = \{97.967 \times 10^{-7} - 102.0137 \times 10^{-7}\}$, $T_2 = \{190.459 \times 10^{-7} - 212.028 \times 10^{-7}\}$, $T_3 = \{284.717 \times 10^{-7} - 312.043 \times 10^{-7}\}$ 。当水头观测标准差为 0.1 m, 流量观测标准差为 0.06 L/m in 时, 在 90% 置信度条件下含水层识别参数置信区间为: $T_1 = \{99.795 \times 10^{-7} - 100.203 \times 10^{-7}\}$, $T_2 = \{199.053 \times 10^{-7} - 201.191 \times 10^{-7}\}$, $T_3 = \{298.441 \times 10^{-7} - 301.195 \times 10^{-7}\}$, 由此可见, 观测误差的大小对参数识别结果的置信区间有非常明显的影响。

水头观测标准差 1m 时的参数识别结果的变异系数是水头观测标准差 0.1m 识别结果的 10 倍。

为了分析研究式(3)中权因子对导水系数收敛过程和识别结果的影响,表3给出了不同权因子β条件下导水系数的收敛过程。当β>0时,不同权因子条件下导水系数的识别结果是完全相同。唯一的区别在于不同的β值时,收敛迭代所需要的计算时间是不相同的。合理的选取权因子β的原则是水头残差平方和与流量残差平方和在同一数量级,这尚无理论指导,需调试而定及经验的积累。尤其对于三维有自由面大坝渗透系数识别时,β的选择合理与否,对于迭代收敛所需要的时间有明显的影 响。最后需要强调指出的是,当β=0时所得到的参数识别结果是不唯一的,因为各分区的导水系数增大同一倍数时,各观测点的水头保持不变,只是流量发生变化。

表3 不同权因子β条件下导水系数的收敛过程

Table 3 Convergence process of estimated transmissivity under different weight factor β 10⁻⁷ m² · s⁻¹

权因子 β /‰	迭代次数		
	1	2	3
0.1	99.223	100.034	100.000
0.1	173.222	199.783	199.999
0.1	311.360	298.915	300.001
1.0	99.346	100.017	100.000
1.0	185.143	200.006	200.000
1.0	304.132	299.792	300.000
10	99.246	100.026	100.000
10	174.967	199.813	199.999
10	310.517	299.064	300.001

5 结束语

应用本文所提出的含水层参数识别方法,即使

水头的观测标准差达到 1m 时,参数识别结果的平均值与理论值的相对误差小于 1%;而在实际工程中大多采用孔内水位计,其观测误差仅为 ± 1 cm^[10],可以推测以这样的观测数据为基础进行含水层参数识别,其识别结果具有非常高的置信度。

参 考 文 献

- 洛姆塔汉 . 专门工程地质学[M]. 李长生译 北京:地质出版社,1986,83~91
- 李守巨,刘迎曦,周承芳等 渗流问题反分析的最优化方法[J]. 辽宁工程技术大学学报,1998,17(5):497~510
- Miko Shoji Two-dimensional consolidation back-analysis [J]. Soils and Foundations,1990,30(2):60~78
- William Yeh W-G Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology [J]. Water Resources Research,1986,20(2):95~108
- 李守巨,刘迎曦,周承芳等 岩土渗流问题反分析的非线性最小二乘法[J]. 中国有色金属学报,1998,8(5):726~729
- 李守巨,刘迎曦,李正国等 含水层参数识别的正则化方法[J]. 力学与实践,1999,21(3):32~35
- William Yeh W-G Aquifer parameter identification with optimum dimension in parameterization [J]. Water Resources Research,1981,17(3):664~672
- 李守巨,刘迎曦,周承芳等 含水层参数识别的唯一性和稳定性问题[J]. 中国有色金属学报,1998,8(5):722~725
- 李守巨,刘迎曦,王登刚等 岩石和混凝土材料参数识别的修正高斯-牛顿法[J]. 岩石力学与工程学报,2000,19(1):93~96
- 刘迎曦,李守巨,周承芳等 丰满混凝土重力坝渗透系数反演分析[J]. 武汉水利电力大学学报,1999,32(1):1~3

IDENTIFICATION OF AQUIFER PARAMETERS WITH MONTE-CARLO METHOD

Li Shouju, Liu Yingxi, Wang Denggang

(State Key Lab of Struc Anal of Indust Equip., Dalian University of Technology, Dalian 116024 China)

Abstract Based upon measured data of water head and flow, the transmissivities of aquifer are identified with Monte-Carlo random simulation to simulate the observed data. The uniqueness problem is solved by modifying the least squares method and adding a term of flow to the least squares criterion. The study results show that the identified values appear in normal distribution when the observed errors subject to the normal distribution. The relative error of the mean identified values of the transmissivity is less than 1% by making use of the identifying procedure suggested even if the standard error of observed water head approaches to 1 m.

Key words aquifer, parameter identification, normal distribution, Monte-Carlo simulation, standard error

