

基于四元数的姿态变换关系在 SAR 运动补偿中的应用

郭春梅^{①②} 王岩飞^①

^①(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

^②(中国科学院研究生院 北京 100039)

摘要: SAR 运动补偿技术是 SAR 系统获得高质量图像的关键。当雷达载体发生横滚角、俯仰角和偏航角运动时, 天线平台需要得到实时的姿态角以稳定天线的指向, 而捷联惯导系统能满足这一要求。捷联矩阵的实时修正是捷联系统姿态解算的主要任务, 考虑到系统实时性和稳定性的要求, 用一种新的方法推导了四元数与姿态角的变换关系, 并根据此关系分析了载机角运动误差对 SAR 成像的影响。基于四元数的方法能减少 SAR 运动补偿中复杂的三角函数运算, 提高了运算效率, 增强了系统的实时性。

关键词: SAR; 捷联惯性导航; 角运动误差; 四元数; 方向余弦矩阵; 运动补偿

中图分类号: TN958

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)04-0898-04

The Application of Transformation Relationship between Quaternion and Attitudes to SAR Motion Compensation

Guo Chun-mei^{①②} Wang Yan-fei^①

^①(Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

^②(The Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: Since factors such as turbulence and pilot error make it impossible for an aircraft to flight along the nominal straight flight path, SAR motion compensation technology is crucial to acquiring high quality image. When the aircraft changes in the roll, pitch or heading, it is necessary to track the real time attitudes to stabilize the antenna pointing. While the strapdown inertial navigation system can fulfill the requirement. The instant attitude updating is one of the main tasks of attitude measurement for strapdown system. Consideration of the real time ability and stable performance, a new derivation method of the transformation equations between quaternion and attitudes is proposed. The influence of angle motion in airplane on SAR imaging is analyzed based on the derived equations. The method given in the paper can highly reduce the operation of triangle function and improve the efficiency of the system.

Key words: SAR; Strapdown inertial navigation; Angle motion error; Quaternion; Direction cosine matrix; Motion compensation

1 引言

对于机载 SAR 而言, 由于雷达载体在飞行中受到外界随机因素的扰动影响, 其运动不可避免地会偏离理想航迹而产生运动误差, 这将直接引起雷达回波信号的相位误差, 损害方位向分辨率。因此必须保证有精确的运动补偿来校正运动误差对图像的影响。国外对于 SAR 的运动补偿研究起步较早, 如文献[1,2]中的研究工作奠定了 SAR 运动补偿的理论基础, 文献[3-5]中初步研制了具有实时能力的运动补偿系统。国内对 SAR 运动补偿的研究也取得了一定的成果^[6,7]。

一般而言, 载机平台的运动误差可以分为两类: 第 1 类运动误差是载机非匀速直线的平移运动误差, 它影响雷达信号的相位历史, 造成相位误差; 第 2 类运动误差是指载机存在偏航、俯仰和横滚角运动, 它将引起天线平台的姿态变化,

产生天线指向误差, 该类误差将影响 SAR 图像的信杂比、对比度及图像强度的均匀性等, 本文主要对第 2 类运动误差进行分析。

在 SAR 运动补偿系统的设计中, 将 IMU/GPS 组合导航定位系统直接安装在 SAR 的天线上, 可以实时地给出导航参数, 用于对 SAR 运动误差的校正。在捷联惯导系统中, 由机体坐标系到导航坐标系的坐标转换矩阵称为方向余弦矩阵, 也称作姿态矩阵或捷联矩阵。捷联矩阵即时修正的算法很多, 有方向余弦算法、欧拉角变换算法、四元数算法等。对四元数而言, 因其计算量小、计算速度快且误差也较小, 常用于捷联惯导系统的工程实现。本文在分析载机角运动误差对 SAR 图像影响的基础上, 引入了基于四元数的姿态变换关系, 将姿态角的误差表示为四元数误差, 减少了运算量, 易于 SAR 运动补偿的实时实现。

2 四元数描述

四元数由哈密顿于 1843 年建立, 可表示为标量部分和矢量部分之和, 也可以采用三角法来表示刚体的定点转动^[8]问题, 它们的对应关系如下

$$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k = h(\cos \vartheta + \vec{u} \sin \vartheta) \quad (1)$$

其中 $h = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} = \sqrt{q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + q_4'^2}$ 是四元数的模。在捷联惯导系统中, 载体坐标系相对于平台坐标系的转动用转动四元数 q 表示时, 四元数还要满足以下条件: $h = 1$, 如果不满足上述条件还需要对四元数进行归一化。

在本文的推导过程中, 四元数采用式(1)的表达式, 推导了北东地导航坐标系下四元数与捷联矩阵的变换关系, 详见第 4 节。在捷联系统进行实时参数解算时, 该变换公式将用于姿态角、位置解和速度解的更新及初始四元数的选取。下面首先分析载机角运动与 SAR 天线平台指向的关系及其对成像的影响。

3 SAR 角运动误差

机载 SAR 在运动中由于受到外部环境的影响从而使得天线平台的指向存在运动误差。这里假设 SAR 为正侧视工作模式, 飞行速度为 v , 天线下视角为 γ , 波束宽度为 β , 天线孔径为 D , 距场景中心作用距离为 R , 下面分析载机姿态角变化对 SAR 成像的影响。

首先分析载机的姿态变化对天线平台指向的影响。先建立固定在地面的直角坐标系, 本文选取的导航坐标系为北东地坐标系, 由于载机的理想航迹是直线, 设载机的初始航向角为 ψ , 这两种坐标系间的关系见图 1 和图 2, 图中未考虑载机的平移运动。

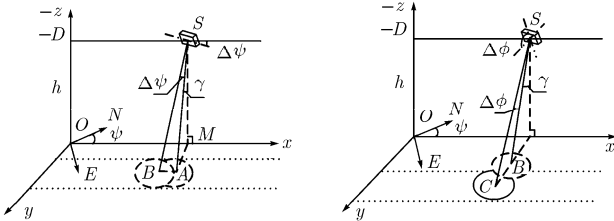


图 1 载机航向角运动示意图

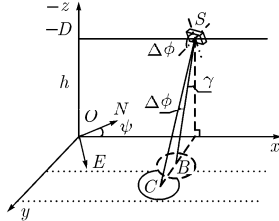


图 2 载机横滚角运动示意图

由图可知载机的理想航迹为 x 方向, 距地面高为 h , 其理想姿态角如下: 横滚角为零, 俯仰角为零及航向角为 ψ 。载机和 SAR 系统可以看作刚体, 当载机在空中存在角运动时, 将引起天线平台指向出现变化。经分析得出其具体关系为: 若载机横滚角变化 $\Delta\phi$, 则天线平台俯仰角变化 $\Delta\phi$ 大小; 同理, 若载机俯仰角变化 $\Delta\theta$, 则天线平台横滚角变化 $\Delta\theta$ 大小; 若载机航向角变化 $\Delta\psi$, 则天线平台航向角同样变化 $\Delta\psi$ 大小。

设 SAR 点目标回波信号为

$$S(t) = A e^{j\frac{1}{2}k_r(t-\alpha)^2} e^{j\omega_c(t-\alpha)} \quad (2)$$

其中 A 为雷达回波信号的幅度, k_r 为线性调频率, ω_c 为发射信号载频, α 由下式给出

$$\alpha = 2R(t)/c \quad (3)$$

其中 $R(t)$ 为雷达至目标的距离。先考虑载机存在俯仰角变化为 $\Delta\theta$ 的情况, 此时天线平台有横滚角运动, 对于固定目标而言, 天线辐照的区域没有改变, 斜距 $R(t) = SA = R_0$ 不变, 所以平台横滚角运动不会引起距离向误差和方位向误差。

若载机航向角变化 $\Delta\psi$, 则天线平台航向角同样变化 $\Delta\psi$ 大小。该情况下, 在图 1 中可见天线指向由 A 变为 B , 将引起目标到雷达的距离发生变化。此时, 斜距变为

$$R(t) = SB = \sqrt{AB^2 + R_0^2} = R_0 \sec(\Delta\psi) \quad (4)$$

雷达此时相当于工作在斜视模式, 因此会引起回波信号多普勒中心 $f_{dc} = 2v/\lambda \sin(\Delta\psi)$ 和多普勒调频斜率的变化 $f_R = -2v^2[\lambda R(t)]$, 从而会引起方位向的散焦, 也会引起方位向的偏移。

同理, 载机存在横滚角运动为 $\Delta\phi$ 时, 天线平台相应的有俯仰角变化 $\Delta\phi$, 如图 2 所示, 此时天线指向从 B 变至 C 。此时斜距为

$$R(t) = h \sec(\gamma + \Delta\phi) = \frac{hR_0}{h \cos\Delta\phi - \sqrt{R_0^2 - h^2} \sin\Delta\phi} \quad (5)$$

可见, 俯仰角的变化也会引起多普勒调频斜率的变化和方位向的散焦。

4 四元数与姿态矩阵的变换

在北东地导航坐标系下, 从导航坐标系到载体坐标系需要经过三次旋转得到, 依次为绕 z 轴旋转 ψ , 绕 y 轴旋转 θ , 绕 x 轴旋转 ϕ , 则其方向余弦矩阵可表示为

$$C_n^b = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) \quad (6)$$

其中 ψ , θ 和 ϕ 分别为航向角、俯仰角和横滚角。 R_x , R_y , R_z 分别表示沿 x 轴、 y 轴和 z 轴的转动矩阵。因此从载体坐标系变换到导航坐标系的捷联矩阵可以表示为

$$C_b^n = (C_n^b)^T = R_z(-\psi)R_y(-\theta)R_x(-\phi) = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi & \\ \cos\theta \sin\psi & \cos\phi \cos\psi + \sin\phi \sin\theta \sin\psi & \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\phi & \\ \sin\phi \sin\psi + \cos\phi \sin\theta \cos\psi & & \\ -\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi & & \\ \cos\theta \cos\phi & & \end{bmatrix} \quad (7)$$

设 $q = iq_1 + jq_2 + kq_3 + q_4$, 由四元数旋转变换理论^[9], 对四元数沿各轴进行同样的转动可得到与方向余弦矩阵对应的四元数如下

$$q_n^b = q_z(\psi) \otimes q_y(\theta) \otimes q_x(\phi) \quad (8)$$

其中“ \otimes ”为四元数的乘积, 将乘积展开, 可以得出下式

$$q_n^b = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) - \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) \\ \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) + \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) - \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) + \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) \end{bmatrix} \quad (9)$$

在北东地坐标系下, 式(9)是四元数的欧拉角表达式。通过对四元数元素的运算, 可以得到方向余弦矩阵的四元数表达式, 下面是求解过程。

设 $\alpha = \phi - \psi$ 和 $\beta = \phi + \psi$, 由式(9)可以得到下式

$$q_1 + q_3 = [\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)]\sin(\beta/2) \quad (10)$$

$$q_1 - q_3 = [\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)]\sin(\alpha/2) \quad (11)$$

$$q_2 + q_4 = [\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)]\cos(\alpha/2) \quad (12)$$

$$q_2 - q_4 = [\sin(\theta/2) - \cos(\theta/2)]\cos(\beta/2) \quad (13)$$

由以上四式可以求出俯仰角、横滚角和航向角如下

$$\left. \begin{aligned} \theta &= -\sin^{-1}(2q_1q_3 - 2q_4q_2) \\ \phi &= \frac{\alpha + \beta}{2} = \tan^{-1} \frac{q_1 - q_3}{q_2 + q_4} - \tan^{-1} \frac{q_1 + q_3}{q_2 - q_4} \\ \psi &= \frac{\beta - \alpha}{2} = -\tan^{-1} \frac{q_1 + q_3}{q_2 - q_4} - \tan^{-1} \frac{q_1 - q_3}{q_2 + q_4} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

设矩阵 C_n^b 第 i 行, 第 j 列的元素为 c_{ij} , 由式(10)乘式(12)加式(11)乘式(13)进行运算得

$$\left. \begin{aligned} c_{23} &= \cos\theta \sin\phi = 2q_1q_4 + 2q_2q_3 \\ c_{33} &= 2q_3^2 + 2q_4^2 - 1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

同理, 式(10)乘式(12)减式(11)乘式(13)得

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= \cos\theta \sin\psi = 2q_1^2 + 2q_4^2 - 1 \\ c_{12} &= 2q_1q_2 + 2q_3q_4 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

对 C_n^b 的元素进行运算, 并将式(14)代入, 可以有下述公式

$$c_{22} + c_{31} = (1 + \sin\theta)\cos\alpha = q_2^2 + q_4^2 - q_1^2 - q_3^2 + 2q_2q_4 + 2q_1q_3 \quad (17)$$

$$c_{22} - c_{31} = (1 - \sin\theta)\cos\beta = q_2^2 + q_4^2 - q_1^2 - q_3^2 - 2q_2q_4 - 2q_1q_3 \quad (18)$$

所以有

$$\left. \begin{aligned} c_{22} &= q_2^2 + q_4^2 - q_1^2 - q_3^2 = 2q_2^2 + 2q_4^2 - 1 \\ c_{31} &= 2q_2q_4 + 2q_1q_3 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

同理得到下式

$$\left. \begin{aligned} c_{21} &= 2q_1q_2 - 2q_3q_4 \\ c_{32} &= 2q_2q_3 - 2q_1q_4 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

因而通过式(10)~式(16), 得到捷联矩阵 C_n^b 的四元数表达式为

$$C_n^b = \begin{bmatrix} 2q_1^2 + 2q_4^2 - 1 & 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & 2q_1q_3 - 2q_2q_4 \\ 2q_1q_2 - 2q_3q_4 & 2q_2^2 + 2q_4^2 - 1 & 2q_2q_3 + 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 + 2q_2q_4 & 2q_2q_3 - 2q_1q_4 & 2q_3^2 + 2q_4^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

5 基于四元数的角运动误差分析

由第4节知, 姿态角的变化量 ($\Delta\phi, \Delta\psi, \Delta\theta$) 可以用相应的四元数变化 ($\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3, \Delta q_4$) 表示。因而, 由式(7)和式(21)可以得出下述关系:

$$\left. \begin{aligned} \cos\Delta\psi &= \frac{2\Delta q_1^2 + 2\Delta q_4^2 - 1}{\cos\Delta\theta} \\ \cos\Delta\phi &= \frac{2\Delta q_3^2 + 2\Delta q_4^2 - 1}{\cos\Delta\theta} \\ \sin\Delta\phi &= \frac{2\Delta q_1\Delta q_4 + 2\Delta q_2\Delta q_3}{\cos\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中 $\cos\Delta\theta = [(1 - 2\Delta q_2\Delta q_4 + 2\Delta q_1\Delta q_3)(1 + 2\Delta q_2\Delta q_4 - 2\Delta q_1\Delta q_3)]^{1/2}$ 。

在第3节中, 讨论了姿态角的变化对 SAR 成像的影响。下面给出基于四元数的角运动误差分析。利用式(22), 式(4)所表示的斜距可改写为

$$R(t) = \frac{R_0}{\cos\Delta\psi} = \frac{R_0\sqrt{(1 - 2\Delta q_2\Delta q_4 + 2\Delta q_1\Delta q_3)(1 + 2\Delta q_2\Delta q_4 - 2\Delta q_1\Delta q_3)}}{2\Delta q_1^2 + 2\Delta q_4^2 - 1} \quad (23)$$

同理, 载机存在横滚角运动为 $\Delta\phi$ 时, 式(5)的斜距有下述形式

$$R(t) = \frac{hR_0\sqrt{(1 - 2\Delta q_2\Delta q_4 + 2\Delta q_1\Delta q_3)(1 + 2\Delta q_2\Delta q_4 - 2\Delta q_1\Delta q_3)}}{h(2\Delta q_3^2 + 2\Delta q_4^2 - 1) - \sqrt{R_0^2 - h^2}(2\Delta q_1\Delta q_4 + 2\Delta q_2\Delta q_3)} \quad (24)$$

下面给出一组仿真数据来验证本文给出的四元数算法的可行性。假设 $h = 5000\text{m}$, $R_0 = 20\text{km}$, 载机存在角运动误差为: 横滚角 1.3° , 俯仰角 0.3° , 偏航角 5.2° , 由四元数算法和传统算法得到的斜距和运算时间如表1所示, 两种算法的运算环境相同, 软件平台为 MATLAB 6.5, PC 机 CPU 主频为 2.4GHz。

表1 传统算法和四元数算法比较

	传统算法		四元数算法	
	横滚角运动	偏航角运动	横滚角运动	偏航角运动
斜距 ($\times 10^4 \text{ m}$)	2.1932832	2.0082652	2.1932832	2.00826528
运算时间 ($\times 10^{-2} \text{ s}$)	4.8000	2.7800	2.8100	1.5600

由表1可以看出, 在计算斜距时四元数算法可以在获得与传统算法同样的准确性, 并且其运算时间要比传统算法少

很多。综上所述, 在 SAR 成像过程中, 用四元数来描述这种姿态误差可以定量的给出斜距的变化量, 可用于 SAR 距离向回波信号的运动补偿, 避免了 SAR 信号的处理中复杂的三角函数运算, 从而减少了运算量, 提高了运算效率。

6 结束语

在姿态矩阵的即时更新中, 由于载体运动过程中姿态矩阵变化较快, 目前多采用四元数法, 利用四元数和方向余弦之间的关系求解姿态矩阵中的元素值。本文在东北地导航坐标系下, 对四元数与捷联矩阵的转换关系进行了推导。分析了载机存在横滚角运动、俯仰角运动和偏航角运动时, SAR 回波信号的变化及其对 SAR 成像的影响。文中根据推导的姿态角与四元数的变换公式给出了基于四元数的角运动误差分析, 对在 SAR 运动补偿中的实时运算具有重要的意义, 该方法具有运算量小, 便于实时应用的优点。

参考文献

- [1] Farrel J L, Mims J H, and Sorrell A. Effect of navigation errors in maneuvering SAR. *IEEE Trans. on AES*, 1973, 9(5): 758-776.
- [2] Kirk J C Jr. Motion compensation for SAR. *IEEE Trans. on AES*, 1975, 11(3): 338-348.
- [3] Damoulakis J N, *et al.* Analysis of three hierarchical motion compensation for SAR. *IEEE Proc. of NAECON*, Dayton, OH, 1982: 1284-1294.
- [4] Difilippo D J, *et al.* Evaluation of a Kalman filter for SAR motion compensation. *IEEE PLANS*, Orlando, FL, USA, 1988: 259-268.
- [5] Kennedy T A. Strapdown inertial measurement units for motion compensation for synthetic aperture radars. *IEEE Trans. on AES*, 1988, 3(10): 32-35.
- [6] 曹福祥, 保铮, 袁建平等. 用于 SAR 运动补偿的 DGPS/SINS 组合系统研究. *航空学报*, 2001, 22(2): 121-124.
Cao Fu-xiang, Bao Zheng, and Yuan Jian-ping, *et al.* DGPS/SINS integrated system used in SAR motion compensation. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2001, 22(2): 121-124.
- [7] 孙永荣, 刘建业, 陈武. 机载 SAR 运动传感器研究. *中国空间科学技术*, 2003, 23(5): 28-32.
Sun Yong-rong, Liu Jian-ye, and Chen Wu. Research on the airborne SAR motion information sensor. *Chinese Space Science and Technology*. 2003, 23(5): 28-32.
- [8] Farrell J and Barth M. *The Global Positioning Systems and Inertial Navigation*. McGraw-Hill, New York, 1999, Chapter 2.
- [9] [苏] B. H. 勃拉涅茨, N. H. 什梅格列夫斯基著. 梁振和译. 王朝群校. 四元数在刚体定位问题中的应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1977, 第二章.

郭春梅: 女, 1979 年生, 博士生, 研究方向为组合导航系统的理论研究与设计、SAR 运动补偿的理论研究。
王岩飞: 男, 1963 年生, 研究员, 博士生导师, 研究方向为微波成像雷达系统及其理论、数字信号处理等。