

# 具有时延的神经元模型耦合系统的混沌同步<sup>1</sup>

周尚波 何松柏 虞厥邦 廖晓峰\*

(电子科技大学光电技术系 成都 610054)

\*(重庆大学计算机学院 重庆 400044)

**摘要** 该文研究了一个由有混沌现象的具有时延的简单神经元模型构成的耦合系统的混沌同步, 具有时延的神经元模型混沌系统, 对时延的初始值具有敏感性, 对于任意激活函数, 用解析分析方法得到了耦合系统达到强同步的一般化条件.

**关键词** 神经网络, 混沌, 混沌同步, 时延

**中图分类号** TN918.1

## 1 引言

自从英国数学家 Matthews 明确提出用混沌系统来产生系列密码及后来 Pecora 和 Carroll 提出混沌自同步方法以来, 混沌同步保密通信在国际电子工程界得到了广泛的研究<sup>[1-3]</sup>, 研究得最多的也是最著名的混沌同步系统是 Lorenz 系统和 Chua 氏电路. 人们不久便发现, 用由低维动力学系统产生的混沌来构造保密通讯系统的保密性是脆弱的<sup>[4]</sup>, 从而人们就想到利用高维动力学系统产生超混沌, 使正的 Lyapunov 指数个数大于 1, 以提高保密性能<sup>[5]</sup>, 但高维动力学系统的维数还是有限的, 系统的自由度要受到维数的限制. 近年来, 出现了具有时延的动力学系统用于保密通讯的研究, 一个典型的例子是 Mackey-Glass 系统<sup>[6]</sup>. 时延动力学混沌系统是无穷维的系统, 它不仅对初始时刻的初值极其敏感, 而且对时延  $[-\tau, 0]$  上的连续初值  $\Phi(y)$  极其敏感. 至今对一般非线性动力学系统复杂现象的深入认识远远没有完成, 对无穷维的混沌动力学系统复杂现象的深入认识更是举步艰难<sup>[6]</sup>.

近年来, 有人转向研究单个神经元的模型, 提出了如下系统模型方程<sup>[7]</sup>:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + a \tanh[x(t) - b(x)(t - \tau) + c] \quad (1)$$

在系统 (1) 式中, 令  $c = 0$ ,  $y(t) \equiv x(t) - bx(t - \tau)$ , 且用任一函数  $f(\cdot)$  代替  $\tanh(\cdot)$ , 有

$$\dot{y}(t) = -y(t) + a(f(y(t)) - bf(y(t - \tau))) \quad (2)$$

## 2 混沌同步

目前研究的混沌同步主要有 3 种方式: 自同步、一般化同步和相位同步.

给定两个连续动力系统

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (3a)$$

$$\dot{\hat{y}} = \hat{f}(t, \hat{y}) \quad (3b)$$

其中  $y \in R^n$ ,  $\hat{y} \in R^n$ ,  $f: R \times R^n \rightarrow R^n$ .

(1) 自同步 (identical synchronization)

对于任意初值状态  $y(0)$  和  $\hat{y}(0)$ , 满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{y}(t) - y(t)\| = 0$ , 则称系统 (3) 式是自同步的.

(2) 一般化同步 (generalized synchronization)

<sup>1</sup> 2001-04-09 收到, 2001-09-06 定稿

如果存在一个变换  $g$ , 使得对于任意初值状态  $y(0)$  和  $\dot{y}(0)$ , 满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{y}(t) - g(y(t))\| = 0$ , 则称系统 (3) 式是一般化同步的.

### (3) 相位同步 (phase synchronization)

如果在两个耦合系统中的“相位”差被一常数所界定, 即  $|\hat{\phi}(t) - \phi(t)| < c(\text{const.})$ , 则称耦合系统相位同步. 其中“相位”  $\phi(t)$  是适当选择的关于时间  $t$  的单调上升函数.

自同步为强同步, 一般化同步和相位同步是弱同步. 时延系统的同步应考虑连续的初值函数.

我们用系统 (2) 式可构造线性耦合系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= -y + a(f(y) - bf(y_\tau)) \\ \dot{z} &= -z + a(f(z) - bf(z_\tau)) + K(y - z) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $y_\tau = y(t - \tau)$ ,  $z_\tau = z(t - \tau)$ . 令  $\Delta = y - z$ ,  $\Delta_\tau = y_\tau - z_\tau$ , 则  $\dot{\Delta} = (af'(\xi) - (K + 1))\Delta - abf'(\xi_\tau)\Delta_\tau \cong (af'(y) - (K + 1))\Delta - abf'(y_\tau)\Delta_\tau$ , 其中  $\xi$  介于  $y$  与  $z$  之间,  $\xi_\tau$  介于  $y_\tau$  与  $z_\tau$  之间,  $f'(x) = df(x)/dx$ ,  $f'(\xi)(y - z) = f(y) - f(z)$ ,  $f'(\xi_\tau)(y_\tau - z_\tau) = f(y_\tau) - f(z_\tau)$ .

考查系统:

$$\dot{\Delta} = (af'(y) - (K + 1))\Delta - abf'(y_\tau)\Delta_\tau \quad (5)$$

如果系统 (5) 式关于  $\Delta$  的最大 Lyapunov 指数小于零, 或其零解渐进稳定, 即  $|\Delta| \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$ , 则系统 (4) 式自同步, 这是个充分条件. 令  $r(t) = af'(y) - (K + 1)$ ,  $s(t) = abf'(y_\tau)$ , (5) 式变为  $\dot{\Delta} = r(t)\Delta - s(t)\Delta_\tau$ , 对于耦合系统 (5) 式, 最大 Lyapunov 指数的定义<sup>[8]</sup>为  $\lambda(K) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left[ \left\{ \int_{-\tau}^0 \Delta^2(t + \theta) d\theta \right\}^{1/2} / \left\{ \int_{-\tau}^0 \Delta^2(\theta) d\theta \right\}^{1/2} \right]$ , 经过计算  $\lambda(K)$ , 我们就可以判定系统 (5) 式零解的稳定性, 但在实际工程应用中, 要额外计算  $\lambda(K)$  为代价是不实际的. 我们在这里用 Lyapunov 第二方法来研究系统 (5) 式的零解渐进稳定, 取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \Delta^2 + \mu \int_{-\tau}^0 \Delta^2(t + \theta) d\theta, \quad \mu \geq 0 \quad (6)$$

$\frac{dV}{dt} = \dot{V} = \Delta \dot{\Delta} + \mu \int_{\theta=-\tau}^{\theta=0} 2\Delta(t + \theta) d\Delta(t + \theta) = (\mu - r(t))\Delta^2 + s(t)\Delta\Delta_\tau - \mu\Delta_\tau^2$ . 由  $\dot{V} < 0$ , 得  $(\mu - r(t))\Delta^2 + s(t)\Delta\Delta_\tau - \mu\Delta_\tau^2 < 0$ , 易见  $\Delta$  和  $\Delta_\tau$  不能同时为 0, 不妨设  $\Delta_\tau$  不为 0, 从而有  $(\mu - r(t))(\Delta/\Delta_\tau)^2 + s(t)(\Delta/\Delta_\tau) - \mu < 0$ , 由此可知, 关于变量  $\Delta/\Delta_\tau$  的二次方程  $(\mu - r(t))(\Delta/\Delta_\tau)^2 + s(t)(\Delta/\Delta_\tau) - \mu = 0$  没有实根, 故  $[s(t)]^2 - 4(\mu - r(t))(-\mu) < 0$ ,  $r(t) > [s(t)]^2/(4\mu) + \mu$ , 选取  $\mu$ , 使  $[s(t)]^2/(4\mu) + \mu$  最小, 则  $\mu = |s(t)|/2$ , 从而  $r(t) > |s(t)|$ , 即  $1 + K - af'(y) > |ab| \cdot |f'(y_\tau)|$ . 如果  $f'(\cdot)$  有界,  $|f'(\cdot)| < M$ , 取  $K > |ab|M - 1 + aM$ , 即使系统 (3) 式的同步流渐进稳定. 一般的神经元激活函数的微分是有界的, 由以上分析可将结果写成定理形式.

**定理 1** 如果神经元的激活函数  $f(\cdot)$  的导数有界, 即存在  $M < \infty$ , 使得  $|f'(\cdot)| < M$ , 则取  $K > |ab|M - 1 + aM$  时, 耦合系统 (3) 式自同步.

### 3 数值仿真例子

我们取  $f(\cdot) = \sin(5 \cdot)$ ,  $a = 1$ ,  $\tau = 1$ , 以  $b$  为系统参数. 图 1 为系统 (2) 式的最大 Lyapunov 指数图, 图 2 为  $b = 2$  的功率谱图. 由图 1 可以看出, 在系统参数  $1 < b < 5$  时, 系统产生混沌现象.

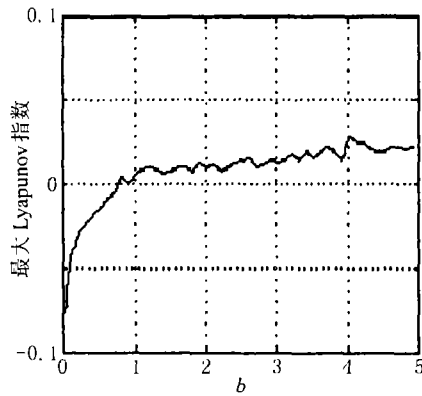


图 1 最大 Lyapunov 指数图

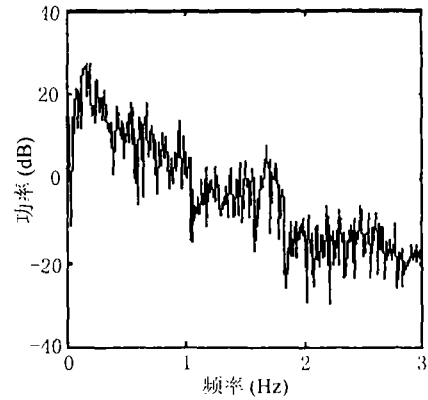


图 2  $a = 1, b = 2$  的功率谱图

图 3 和图 4 为系统取  $b = 2$ ，初始值为连续函数  $y(t) = 0.5, (-\tau \leq t < 0)$  时的波形图和相图。当取  $b = 2$ ，初始值为连续函数  $y(t) = 0.5 + 0.000001, (-\tau \leq t < 0)$  时的相图如图 5，与初始值为连续函数  $y(t) = 0.5, (-\tau \leq t < 0)$  的数值解差值如图 6，由图 6 可以看出，初始值相差仅有 0.000001，但当  $t > 45s$  后，误差值出现了大于 1 的振荡，表现了系统对时延初值的敏感性。

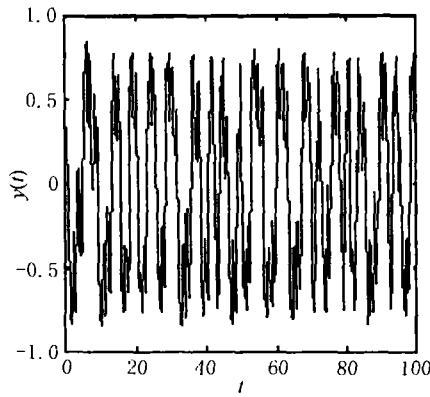


图 3  $a = 1, b = 2$ , 初始条件  $y(t) = 0.5, (0 \leq t < \tau)$  时的波形图

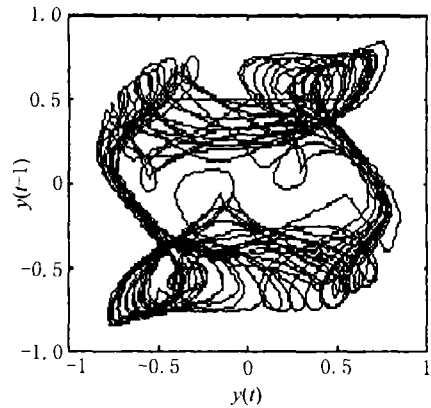


图 4  $a = 1, b = 2$ , 初始条件  $y(t) = 0.5, (0 \leq t < \tau)$  时的相图

由于  $f'(\cdot) = 5 \cos(5\cdot), |f'(\cdot)| < 5 = M, a = 1, b = 2$ ，根据上述定理 1， $K > 14$  时，两个混沌系统的耦合系统 (3) 式同步。

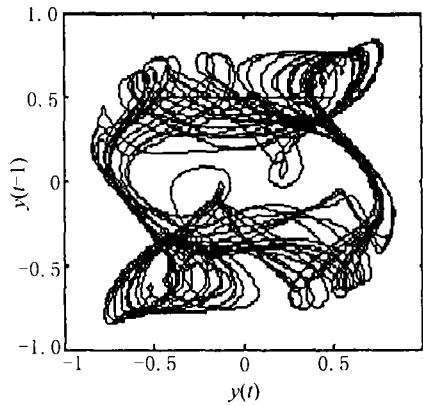


图5  $a = 1, b = 2$ , 初始条件  
 $y(t) = 0.500001, (0 \leq t < \tau)$  时的相图

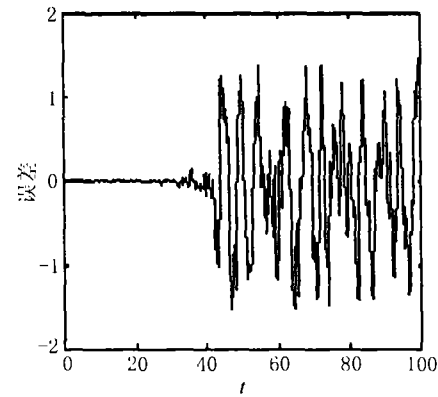


图6  $a = 1, b = 2$ , 初始条件  
相差 0.000001 时的数值解误差

图7为系统(5)式取耦合强度  $K = 14.5$  的波形图, 其中两个混沌系统的初值连续函数分别为  $\phi(y) = 0.5$  和  $\phi(z) = 5z$ , 即  $\Delta = 0.5 - 5z, t \in [-1, 0]$ 。我们分析了不同的连续初始函数对耦合系统稳定性的影响, 仿真实验结果与定理1的结论是相吻合的。定理的耦合强度  $K$  的下界是比较强的条件, 在这个例子中, 取  $K = 10$ , 系统即可得到同步,  $K = 10.5$  时, 捕获过程的时间很短。

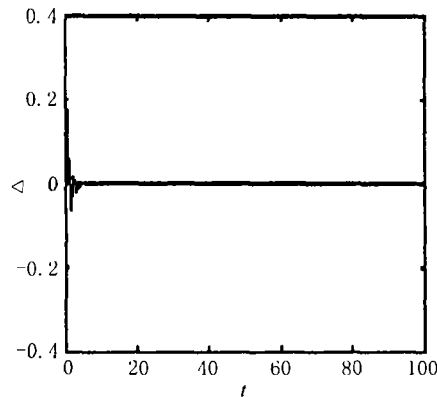


图7 系统(5)式的波形图

#### 4 结论

具有时延的动力学系统具有复杂的动力学行为, 具有时延的单个神经元的模型中, 对于某些激活函数和系统参数, 系统对时延初值具有敏感性, 表现出混沌现象。本文不用计算 Lyapunov 指数, 而用解析方法得出了系统自同步的条件, 实验例子的仿真结果与理论分析是一致的。

#### 参 考 文 献

- [1] M. J. Ogorzalek, Taming chaos—part I: Synchronization, IEEE Trans. on CAS-I., 1993, 40(10), 693-699.

- [2] Géza Kolumbán, Michael Peter Kennedy, Leon O. Chua, The role of synchronization in digital communication using chaos—part II: Chaotic modulation and chaotic synchronization, *IEEE Trans. on CAS-I.*, 1998, 45(11), 1129–1140.
- [3] Ömer Morgül, Moez Feki, A chaotic masking scheme by using synchronized chaotic systems, *Physics Lett. A*, 1999, 251(2), 169–176.
- [4] 周红, 凌雯亭, 混沌保密通讯原理及其保密性分析, *电路与系统学报*, 1996, 1(3), 57–62.
- [5] Giuseppe Grassi, Saverio Mascolo, Synchronizing hyperchaotic system by observer design, *IEEE Trans. on CAS-II*, 1999, 46(4), 478–483.
- [6] 杨维明编著, 时空混沌和耦合映像格子, 上海, 上海科技教育出版社, 1994, 第 1 章.
- [7] K. Gopalsmay, K. C. Leung, Convergence under dynamical thresholds with delays, *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1994, 8(2), 341–348.
- [8] K. Pyragas, Synchronization of coupled time-delay systems: Analytical estimations, *Phy. Rev. E*, 1998, 58(3), 3067–3071.

## CHAOTIC SYNCHRONIZATION IN NEURON MODEL WITH TIME-DELAY

Zhou Shangbo    He Songbai    Yu Juebang    Liao Xiaofeng

*(Dept. of Opto. Electronic Tech., UEST of China, Chengdu 610054, China)*

*\*(Faculty of Computer Sci. and Eng., Chongqing University, Chongqing 400044, China)*

**Abstract** In this paper, chaotic synchronization in a coupled system of neuron model with discrete time delay is studied. A chaotic system of neuron model with discrete time delay is sensitive to the continuous initial function. For arbitrary activate function, a general condition for strong chaotic synchronization are derived by using analytic method.

**Key words** Neural network, Chaos, Chaotic synchronization, Time delay

周尚波: 男, 1963 年生, 博士生, 主要兴趣是神经网络动力学与混沌保密通信.

何松柏: 男, 1972 年生, 主要兴趣是微波通讯, 非线性动力学.

虞厥邦: 男, 1932 年生, 教授, 博士生导师, 主要兴趣是非线性网络与神经网络.

廖晓峰: 男, 1964 年生, 博士后, 教授, 主要兴趣是神经网络动力学, 混沌保密通信与信号处理.