

## 具有时延的简单神经元模型的混沌行为<sup>1</sup>

周尚波 廖晓峰\* 虞厥邦  
(电子科技大学光电子技术系 成都 610054)  
\*(重庆大学计算机学院 重庆 400044)

**摘要** 该文研究了具有时延的简单神经元方程周期解的失稳和混沌现象, 数值仿真表明: 在一阶非线性时延动力学系统中找到了新的混沌发生源. 文中给出了例子的波形图、相图及最大 Lyapunov 指数图.

**关键词** 神经元, 时延, 周期解, 混沌  
**中图分类号** TN-052, TN711.4

### 1 引言

研究时延神经网络模型的分岔和混沌现象, 是人们近年来关注的一个问题<sup>[1-3]</sup>, 时延动力学系统中具有丰富的动力学行为. 众所周知, 在一阶或二阶自治的连续动力学系统中, 不可能产生混沌现象, 蔡氏电路是最早发现并能在电路实验中观测到双蜗卷混沌现象的电路, 它是一个三阶自治系统. 1991 年蔡少棠等人发现了具有混沌现象的最简单的非自治耗散的二阶电路系统<sup>[4]</sup>.

神经网络是一个由简单神经元构成的大规模非线性动力学系统, 当然它也应具有非线性动力学系统所具有的动力学行为, 由于神经网络的复杂性国际上众多研究者已将注意力集中在简单的神经元上的研究<sup>[3,5,6]</sup>. 这是因为简单的神经元模型可以耦合成大规模的神经网络系统. 由 2 或 3 个具有时延的非线性神经元构成的神经网络系统, 能产生混沌现象<sup>[1,2]</sup>, 含 3 个细胞神经元的神经网络系统也能产生混沌现象的动力学行为.

在生物神经元中, 存在有细胞时延, 传输时延和突触时延等时延现象<sup>[3,5,6]</sup>, 目前, 人们提出了多种具有离散时延和连续时延的单个神经元模型<sup>[5]</sup>.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + a \tanh[y(t) - by(t - \tau) + c] \quad (1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + a \tanh \left[ y(t) - b \int_0^{+\infty} F(s)y(t-s)ds + c \right] \quad (2)$$

在文献 [7] 中, 我们讨论了具有任意激活函数  $f(t)$  的神经元模型:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + a[f(y(t)) - bf(y(t - \tau))] \quad (3)$$

的 Hopf 分岔现象, 由 Hopf 分岔定理得出了相应的判定系统 Hopf 分岔特性的定理. 依据这个 Hopf 分岔定理我们知道: 当系统参数在某一范围内时, 分岔周期解是稳定的; 而当系统参数不在这个范围时, 那么分岔周期解不稳定, 因此在这种情况下是否产生混沌现象, 我们基于上述思路来讨论系统 (3) 式的混沌行为. 我们知道, 要想从理论上证明一个动力学系统具有混沌吸引子的存在是非常困难的, 而现用的方法通常是计算其 Lyapunov 指数, 如果有正的 Lyapunov 指数, 那末这个系统就是一个混沌系统.

<sup>1</sup> 2001-03-02 收到, 2001-11-08 定稿

## 2 极限环的失稳

在文献 [7] 中, 针对 (3) 式, 我们得到了相应的定理, 现归纳如下:

**定理** 在 (4) 式中,  $\mu_2$  确定了 Hopf 分岔方向: 如果  $\mu_2 > 0 (< 0)$ , 那么 Hopf 分岔是上临界的 (下临界的), 并且对于  $b_1 > b_1^0 (< b_1^0)$ , 分岔周期解存在;  $\beta_2$  确定了分岔周期解的稳定性: 如果  $\beta_2 < 0 (> 0)$ , 那么分岔周期解是轨道稳定的 (不稳定的);  $T_2$  确定了分岔周期解的周期: 如果  $T_2 > 0 (< 0)$ , 那么周期增长 (缩短).

$$\left. \begin{aligned} C_1(0) &= [i/(2\omega_0)] [g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - |g_{02}|^2/3] + g_{21}/2 \\ \mu_2 &= -\text{Re}\{C_1(0)\}/[\text{Re}\lambda'(0)] \\ T_2 &= -(\text{Im}\{C_1(0)\} + \mu_2\text{Im}\lambda'(0))/\omega_0 \\ \beta_2 &= 2\text{Re}\{C_1(0)\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

系统 (3) 式是最简单的具有时延的一阶非线性系统, 对于不同的  $a, b$ , 方程呈现出复杂的动力学特征. 我们固定  $a$  的值, 取  $a = 2$ , 让  $b$  的值变化, 并取具有严格单调上升的反正切函数  $\arctg(x)$  的组合形式  $f(x)$  为激活函数.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i [\arctg(x + k_i) - \arctg(x - k_i)]$$

式中  $\alpha_i, k_i$  为常数. 根据上述定理计算各个参数, 得出表 1 的结果.

从表 1 可以看出, 当  $b \in (1.1, 1.10998)$  时,  $\beta_2 < 0$  周期解稳定, 当  $b \in (1.11, 1.12)$  时,  $\beta_2 > 0$  周期解不稳定.

表 1 以  $b$  为变量的系统参数值

$b$	$a_1$	$b_1$	$E_q$	$\omega_0$	$\mu_2$	$\beta_2$
1.1	0.9110	-1.0021	-0.4846	1.6255	-0.9134	-0.8029
1.109	0.9914	-1.0994	-0.5231	1.5763	-2.0379	-1.8409
1.1099	0.9992	-1.1091	-0.5268	1.5713	-2.1406	-1.9390
1.10998	0.9999	-1.1099	-0.5272	1.5708	-2.1496	-1.9476
1.11	1.0001	-1.1101	-0.5273	4.7124	-6.8456	2.7802
1.1101	1.0010	-1.1112	-0.5277	4.7122	-6.8373	2.7770
1.105	1.0045	-1.1155	-0.5293	4.7114	-6.8041	2.7644
1.12	1.0857	-1.2160	-0.5683	4.6941	-6.0780	2.4857

## 3 混沌现象

对系统 (3) 式用四阶 Runge-Kutta 进行数值仿真, 得到方程的数值解, 我们将数值解视为一个离散系统. 混沌的一个重要特性就是系统对初值具有极端敏感依赖性, Lyapunov 指数是衡量系统对初值敏感依赖性的一个重要指标, 对于映射  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow R$ , Lyapunov 指数定义为

$$\lambda(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(t_0)}{dt} \right|$$

其中  $t_0$  是初值,  $f \in C^1[\alpha, \beta]$ , 只要有正的 Lyapunov 指数, 系统就会产生混沌现象.

具有连续的功率谱也是混沌的一个重要特性。对于函数  $y(t)$ , 其 Fourier 变换为

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{2\pi j\omega t} dt$$

对于有限的离散时间系列  $\{y_n\}$ , 其 Fourier 变换定义为

$$\hat{y}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N y_n e^{2\pi j\omega_k n/N}$$

其中  $\omega_k = k/(N\Delta t)$ ,  $k = -N/2, \dots, N/2$ ,  $\Delta t$  为采样时间间隔。

Fourier 变换  $\hat{y}(\omega)$  的模的平方  $S(\omega) = |\hat{y}(\omega)|^2$  就是一个信号的功率谱, 可以用有限离散时间系列的  $S_k = |\hat{y}_k|^2$  对其进行估计计算。

我们取  $b=2$ ,  $\alpha_1 = -1.5$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1/5$ ,  $a=2$ ,  $b$  分别取 1.5, 1.83, 3.73, 进行数值仿真计算。得到如下图 1, 图 3 的波形图和图 2, 图 4 的相图, 图 5 和图 6 为功率谱图, 图 7 为最大 Lyapunov 指数图。

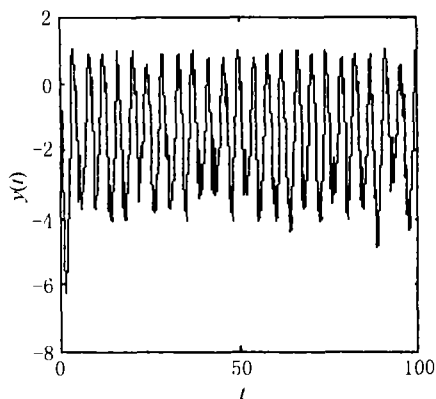


图 1  $a=2$ ,  $b=1.5$ , 系统 (3) 式的波形图

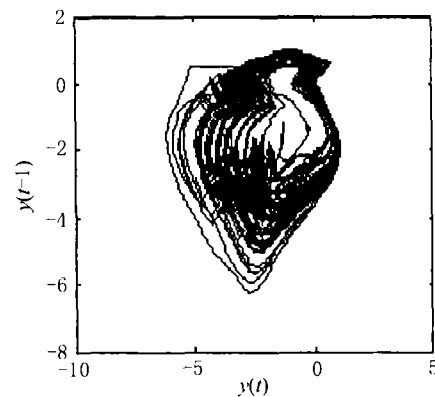


图 2  $a=2$ ,  $b=1.5$ , 系统 (3) 式的相图

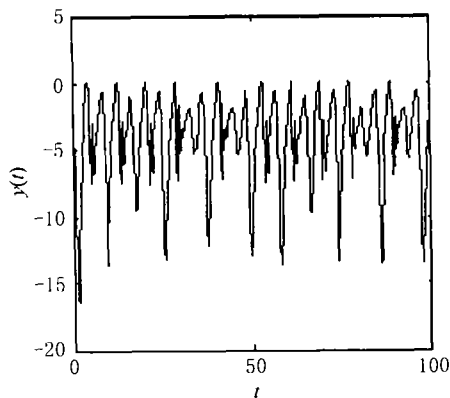


图 3  $a=2$ ,  $b=3.73$ , 系统 (3) 式的波形图

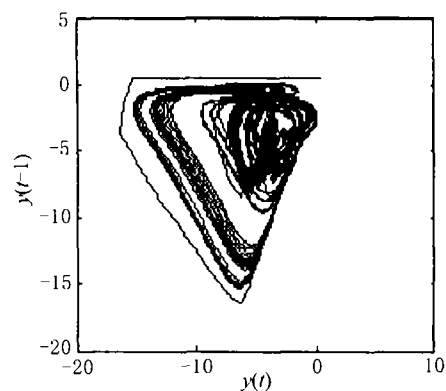


图 4  $a=2$ ,  $b=3.73$ , 系统 (3) 式的相图

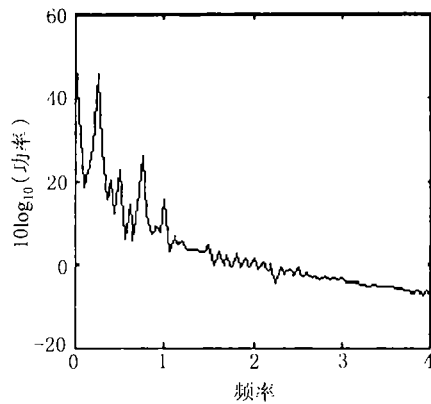
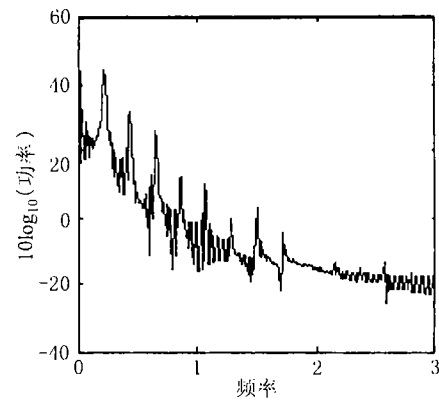
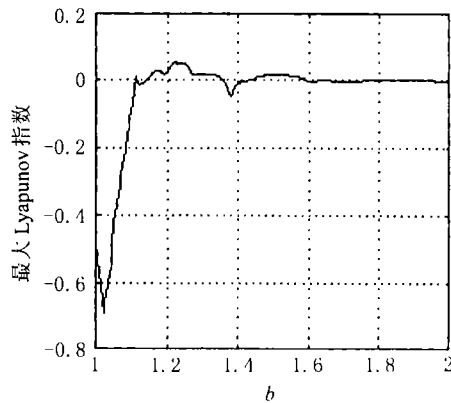
图5  $a=2, b=1.83$ , 系统(3)式的功率谱图图6  $a=2, b=1.50$ , 系统(3)式的功率谱图

图7 系统(3)式的最大 Lyapunov 指

## 4 结 论

数值仿真说明, 一个简单的一阶非线性时滞神经元系统在自抑制的作用下, 能产生复杂的动力学行为, 文中选择适当的参数, 得出的相图, 最大 Lyapunov 指数图, 功率谱图, 都显示了系统混沌现象的存在, 调整系统参数, 可达到混沌控制的目的。

## 参 考 文 献

- [1] K. L. Babcock, R. M. Westervelt, Dynamics of simple electronic neural networks, *Physica D*, 1987, 28(3), 305-316.
- [2] M. Gilli, Strange attractors in delayed cellular neural networks, *IEEE Trans. on CAS*, 1993, 40(11), 849-853.
- [3] Xiaofeng Liao, Zhongfu Wu, Juebang Yu, Stability switches and bifurcation analysis of a neural network with continuously delay, *IEEE Trans. on SMC-A*, 1999, 29(6), 692-698.
- [4] K. Murali, M. Lakshmanon, L. O. Chua, The simplest dissipative nonautonomous chaotic circuit, *IEEE Trans. on CAS-I*, 1994, 41(6), 462-463.

- [5] K. Gopalsmay, K. C. Leung, Convergence under dynamical thresholds with delays, *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1994, 8(4), 341-348.
- [6] Xiaofeng Liao, Zhongfu Wu, Juebang Yu, Hopf bifurcation analysis of a neural system with a continuously distributed delay, *International Symposium on Signal Processing and Intelligent System*, Guangzhou, China, Nov. 1999, 546-549.
- [7] 周尚波, 廖晓峰, 虞厥邦, 具有任意激活函数的时延神经元方程的 Hopf 分岔, *电子与信息学报*, 2002, 24(9), 1209-1217.
- [8] Liao Xiaofeng, Wong Kwokwo, Wu Zhongfu, Bifurcation analysis in a two-neuron system with distributed delays, *Physica D*, 2001, 179(1/2), 123-141.

## CHAOTIC BEHAVIOR IN A SIMPLEST NEURON MODEL WITH DISCRETE TIME DELAY

Zhou Shangbo    Liao Xiaofeng\*    Yu Juebang

*(Department of Opto-Electronic Technology, UEST of China, Chengdu 610054, China)*

*\*(Faculty of Computer Sci. and Eng., Chongqing University, Chongqing 400044, China)*

**Abstract** In this paper, stability losing of periodic solution and chaotic phenomenon in a simplest neuron equation with time delay are studied, The numerical simulations show that a new chaotic source is found in a first order nonlinear dynamical system. Some waveform diagrams, phase portraits, power spectra and plots of largest Lyapunov exponent are also given.

**Key words** Neuron, Time delay, Periodic solution, Chaos

周尚波: 男, 1963 年生, 博士生, 主要兴趣是神经网络动力学与混沌保密通信.

廖晓峰: 男, 1964 年生, 博士后, 教授, 主要兴趣是神经网络动力学, 混沌保密通信与信号处理.

虞厥邦: 男, 1932 年生, 教授, 主要兴趣是非线性网络与神经网络.